

第21章 代数方程（基础、典型、易错）分类专项训练

【基础】

一、单选题

1. (2022 春·上海·八年级校考期中) 下列说法正确的是 ()

A. $x^3 - 3x = 0$ 是二项方程

B. $x^2 + \sqrt{2}x - 3 = 0$ 是无理方程

C. $2x^2 + y = 3$ 是二元二次方程

D. $\frac{x^2 - x}{3} = 2$ 是分式方程

【答案】C

【分析】根据方程的定义，无理方程的定义，二元二次方程的定义，分式方程的定义逐个判断即可.

【详解】解：A、方程含有两个未知数项，没有非零常数项，不是二项方程，故本选项不符合题意；

B、根号内没有未知数，不是无理方程，故本选项不符合题意；

C、方程是二元二次方程，故本选项符合题意；

D、分母中没有未知数，不是分式方程，故本选项不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查了方程、无理方程、二元二次方程、分式方程的定义等知识点，注意：根号内含有未知数的方程，叫无理方程，分母中含有未知数的方程，叫分式方程.

2. (2022 春·上海奉贤·八年级校考期中) 用换元法解分式方程 $\frac{2x}{x-1} - \frac{5x-5}{x} + 3 = 0$ 时，如果设 $\frac{x}{x-1} = y$ ，那么原方程可化为 ()

A. $2y^2 + 3y - 5 = 0$ ； B. $2y^2 - 5y + 3 = 0$ ； C. $y^2 + 3y - 5 = 0$ ； D. $y^2 - 5y + 3 = 0$.

【答案】A

【分析】把 $\frac{x}{x-1} = y$ 代入原方程，得出 $2y - \frac{5}{y} + 3 = 0$ ，再进行整理即可.

【详解】解：整理 $\frac{2x}{x-1} - \frac{5x-5}{x} + 3 = 0$ ，得

$$\frac{2x}{x-1} - 5\left(\frac{x-1}{x}\right) + 3 = 0,$$

把 $\frac{x}{x-1} = y$ 代入方程得：

$$2y - \frac{5}{y} + 3 = 0,$$

整理得： $2y^2 + 3y - 5 = 0$ ，

故选 A.

【点睛】本题考查了解分式方程，解题的关键是熟练掌握利用换元法，把一个式子做为整体进行替换，将

分式方程化简为一元二次方程.

3. (2022 春·上海闵行·八年级上海市民办文绮中学校考期中) 下列方程中, 有实数根的方程是 ()

A. $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 1$ B. $x^3 + 9 = 0$ C. $\frac{1}{x^2-1} = 0$ D. $\sqrt{x} + 3 = 0$

【答案】B

【分析】A 利用二次根式的性质解题; B 利用立方根的性质解题; C 利用去分母的方法解决问题; D 利用二次根式的性质解决问题.

【详解】解: A 中根据题目条件得 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$, $\therefore x=1$, 此时方程没有实数根;

B 中是三次方程, $\therefore x$ 的取值范围是全体实数, $\therefore$ 此方程有解;

C 中去分母得 $1=0$, $\therefore$ 此方程无解;

D: $\sqrt{x} \geq 0$, $\therefore \sqrt{x} + 3 > 0$, $\therefore$ 此方程没有实数根.

故选: B.

【点睛】本题主要考查解无理方程的知识点, 去掉根号把无理式化成有理方程是解题的关键, 注意观察方程的结构特点, 需要同学们仔细掌握.

4. (2023 春·八年级单元测试) 下列方程组中, 为二元二次方程组的是 ()

A. $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -4 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x + \sqrt{y} = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x^2 + 3y = 2 \\ xy = 4 \end{cases}$

【答案】D

【分析】根据二元二次方程组的定义进行判断即可.

【详解】解: A、两个方程都是二元一次方程, 所组成的方程组为二元一次方程组, 所以 A 选项不正确;

B、两个方程都是分式方程, 所组成的方程组为分式方程组, 所以 B 选项不正确;

C、有一个方程是无理方程, 所组成的方程组不是二元二次方程组, 所以 C 选项不正确;

D、两个方程都是二元二次方程, 所组成的方程组为二元二次方程组, 所以 D 选项正确.

故选: D.

【点睛】本题考查了二元二次方程组: 有两个二元二次方程或一个二元二次方程, 一个一元一次方程所组成的方程组称为二元二次方程组.

二、填空题

5. (2022 春·上海奉贤·八年级校联考期中) 用换元法解分式方程 $\frac{2x^2+1}{x} - \frac{2x}{2x^2+1} = 1$ 时, 如果设 $\frac{2x^2+1}{x} = y$, 将原方程化为关于 y 的整式方程, 那么这个整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - y - 2 = 0$

【分析】设 $\frac{2x^2+1}{x} = y$, 则原方程化为 $y - \frac{2}{y} = 1$, 再方程两边都乘 y 即可.

【详解】解: $\frac{2x^2+1}{x} - \frac{2x}{2x^2+1} = 1$,

设 $\frac{2x^2+1}{x} = y$, 则原方程化为:

$$y - \frac{2}{y} = 1,$$

方程两边都乘 y , 得 $y^2 - 2 = y$,

即 $y^2 - y - 2 = 0$,

故答案为: $y^2 - y - 2 = 0$.

【点睛】本题考查了用换元法解分式方程, 能正确换元是解此题的关键.

6. (2022 春·上海·八年级阶段练习) 在平面直角坐标系中, 一次函数 $y=kx+b$ 和 $y=mx+n$ 相交于点 $(2, -1)$, 则关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} y=kx+b \\ y=mx+n \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

【分析】利用方程组的解就是两个相应的一次函数图象的交点坐标解决问题.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y=kx+b$ 和 $y=mx+n$ 相交于点 $(2, -1)$,

$\therefore$ 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} y=kx+b \\ y=mx+n \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$.

故答案为 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$.

【点睛】本题考查了一次函数与二元一次方程(组): 方程组的解就是使方程组中两个方程同时成立的一对未知数的值, 而这一对未知数的值也同时满足两个相应的一次函数式, 因此方程组的解就是两个相应的一次函数图象的交点坐标.

7. (2022 春·上海·八年级期中) 当 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 方程 $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{k}{x^2-1}$ 会产生增根.

【答案】6 或 -4.

【分析】由题意根据增根是分式方程化为整式方程后产生的使分式方程的分母为 0 的根, 进而把增根代入

化为整式方程的方程即可求出 k 的值.

【详解】解：分式方程去分母得： $2(x-1)+3(x+1)=k$,

由分式方程有增根，得到 $x=1$ 或 $x=-1$,

把 $x=1$ 代入整式方程得： $k=6$;

把 $x=-1$ 代入整式方程得： $k=-4$,

综上， k 的值为 6 或 -4 时，方程 $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{k}{x^2-1}$ 会产生增根，

故答案为： 6 或 -4 .

【点睛】本题考查分式方程的增根，注意掌握增根确定后可按如下步骤进行：①化分式方程为整式方程；②把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

8. (2022 春·上海·八年级专题练习) 方程 $\sqrt{x^2-1}=1$ 的根是_____.

【答案】 $x=\pm\sqrt{2}$.

【分析】首先把方程两边同时平方，然后解一元二次方程，最后要验根.

【详解】解： $\because \sqrt{x^2-1}=1$,

$$\therefore x^2-1=1,$$

$$\therefore x^2=2,$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{2},$$

经检验 $x=\pm\sqrt{2}$ 是原方程的根，

$$x=\pm\sqrt{2}.$$

故答案为： $x=\pm\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了无理方程的解法，把方程两边同时平方是解题的关键，要注意解答后一定要检验.

9. (2022 春·上海·八年级专题练习) 方程 $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x-1}$ 的解是_____

【答案】 $x=1$.

【分析】首先把方程两边同时平方，然后解一元二次方程，最后要验根.

【详解】解： $\because \sqrt{x^2-1}=\sqrt{x-1}$,

则有 $x^2-1\geq 0$ 且 $x-1\geq 0$,

即： $x\geq 1$,

$$\therefore x^2-1=x-1,$$

$$\therefore x^2-x=0,$$

$$\therefore x(x-1)=0,$$

$$\therefore x_1=0(\text{舍}), x_2=1$$

$\therefore x=1$ 是原方程的根,

$$\therefore x=1.$$

故答案为: $x=1$.

【点睛】本题考查了无理方程的解法,把方程两边同时平方是解题的关键,要注意解答后一定要检验.

三、解答题

10. (2022 春·上海·八年级开学考试) 解方程: $\frac{x+2}{x-2}+1=\frac{16}{x^2-4}.$

【答案】 $x=-4$

【分析】先去分母,然后解整式方程,最后检验,进而得到正确答案.

【详解】解:去分母,得 $(x+2)^2+x^2-4=16$,

整理,得 $x^2+2x-8=0$,

解得 $x_1=2, x_2=-4$,

经检验 $x_1=2$ 是增根,舍去; $x_2=-4$ 是原方程的根,

所以原方程的根是 $x=-4$.

【点睛】本题主要考查解分式方程,掌握解分式方程的方法是解题的关键.

11. (2022 春·上海奉贤·八年级校考阶段练习) 解方程: $\frac{2x}{x^2+2x-3}+\frac{1}{x+3}=1$

【答案】 $x_1=2, x_2=-1$

【分析】分式方程去分母转化为整式方程,求出整式方程的解得到 x 的值,经检验即可得到分式方程的解.

【详解】解: $\frac{2x}{x^2+2x-3}+\frac{1}{x+3}=1$

$$2x+(x-1)=x^2+2x-3$$

$$x^2-x-2=0$$

$$x_1=2, x_2=-1$$

经检验: $x_1=2, x_2=-1$ 是原方程的根

所以，原方程的根是 $x_1 = 2$ ， $x_2 = -1$ 。

【点睛】本题考查解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验。

12. (2022 春·上海·八年级上海市泗塘中学校考阶段练习) 解方程： $2x + \sqrt{x-3} = 6$

【答案】 $x = 3$

【分析】移项后两边平方，即可得出一个一元二次方程，求出方程的解，再把所得的结果进行检验即可。

【详解】解： $\sqrt{x-3} = 6 - 2x$

$$x - 3 = (6 - 2x)^2$$

$$4x^2 - 25x + 39 = 0$$

$$(x-3)(4x-13) = 0,$$

$$\text{解得：} x_1 = \frac{13}{4}, x_2 = 3$$

经检验： $x = \frac{13}{4}$ 是原方程的增根，舍去

所以，原方程的根是 $x = 3$ 。

【点睛】本题考查解无理方程，能把无理方程转化成有理方程是解题的关键，在计算时要注意检验。

13. (2022 秋·上海奉贤·八年级校考期中) 解方程： $(x-1)(x+3) = 5$

【答案】 $x_1 = -4, x_2 = 2$ 。

【分析】把一元二次方程化为方程的一般形式，再按因式分解的方法解方程即可。

【详解】解： $\because (x-1)(x+3) = 5$,

$$\therefore x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\therefore (x+4)(x-2) = 0,$$

$$\therefore x_1 = -4, x_2 = 2.$$

【点睛】本题考查的是一元二次方程的解法，掌握利用十字乘法分解因式是解题的关键。

14. (2022 春·上海·八年级期中) 解方程组：
$$\begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -1 \end{cases}$

【分析】先把方程组中的第一个方程转化为两个二元一次方程，再和方程组中的第二个方程组成二元一次

方程组，求解即可．

【详解】解：
$$\begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 = 0 \text{①} \\ x + y = 2 \text{②} \end{cases},$$

由①得： $(x+2y)(x+3y) = 0$,

$\therefore x+2y=0 \text{③}$ 或 $x+3y=0 \text{④}$,

由②③，②④联立得方程组 $\begin{cases} x+2y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x+3y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$ ，

解方程组 $\begin{cases} x+2y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=-2 \end{cases}$ ，

解方程组 $\begin{cases} x+3y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} x_2=3 \\ y_2=-1 \end{cases}$ ，

所以原方程组的解为： $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=-2 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x_2=3 \\ y_2=-1 \end{cases}$ ．

【点睛】本题考查了二元二次方程组的解法，把二次方程转化为两个一次方程，是解决此类题目常用的办法．解决本题亦可变形组中的一次方程，代入二次方程先求出其中一个未知数的值，再求另一个未知数的值．

15. (2022 春·上海奉贤·八年级校考期末) 古语有“四方上下曰宇，古往今来曰宙”，自古以来，中华民族对于宇宙的探索从未停歇．在 2022 年 6 月 5 日，神舟十四号成功发射，而即将到来的 7 月，问天实验舱也将发射升空．HYDZ 公司的 G 项目组承担了实验舱某个电子设备的研发工作，在顺利完成一半研发工作时，由于受疫情影响，开发效率被迫减缓为原来的 60%，结果最后比原计划多了 10 天完成任务，问：该电子设备原计划的研发时间为多少天．

【答案】该电子设备原计划的研发时间为 30 天

【分析】设该电子设备原计划的研发时间为 x 天，则实际完成后一半研发工作的时间为 $\left(\frac{1}{2}x+10\right)$ 天，根据实际完成后一半研发工作时的工作效率为原计划工作效率的 60%，即可得出关于 x 的分式方程，解之经检验后即可得出结论．

【详解】解：设该电子设备原计划的研发时间为 x 天，则实际完成后一半研发工作的时间为 $\left(\frac{1}{2}x+10\right)$ 天，

依题意得： $60\% = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x+10}$ ，

解得： $x=30$ ，

经检验， $x=30$ 是原方程的解，且符合题意，

答：该电子设备原计划的研发时间为 30 天。

【点睛】本题考查了分式方程的应用，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键。

【典型】

一、单选题

1. (2020 春·上海静安·八年级校考期中) 下列方程组中，属于二元二次方程组的为 ()

A. $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=3 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-4 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x+\sqrt{y}=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 3x=2 \\ xy=4 \end{cases}$

【答案】D

【分析】根据一元一次方程组的定义对 A 进行判断；根据整式方程组的定义对 B、C 进行判断；根据二元二次方程组的定义对 D 进行判断。

【详解】解：A、两个方程都是二元一次方程，所组成的方程组为二元一次方程组，所以 A 选项不正确；

B、两个方程都是分式方程，所组成的方程组为分式方程组，所以 B 选项不正确；

C、有一个方程是无理方程，所组成的方程组不是二元二次方程组，所以 C 选项不正确；

D、有一个方程是二元二次方程，另一个是一元一次方程，所组成的方程组为二元二次方程组，所以 D 选项正确。

故选 D。

【点睛】本题考查二元二次方程组：有两个二元二次方程或一个二元二次方程，一个一元一次方程所组成的方程组称为二元二次方程组。

2. (2020 春·上海静安·八年级校考期中) 下列方程中,有实数解的方程的是()

A. $\sqrt{x+1}+2=0$ B. $x^2+2x+3=0$ C. $\sqrt{3-2x}+x=0$ D. $\frac{x}{x-2}=\frac{2}{x-2}$

【答案】C

【分析】利用二次根式的非负性对 A 进行判断；利用根的判别式的意义对 B 进行判断；解无理方程对 C 进行判断；解分式方程对 D 进行判断。

【详解】解：A、移项得： $\sqrt{x+1}=-2$ ， $\because \sqrt{x+1} \geq 0$ ，所以原方程没有实数解，所以 A 选项错误；

B、因为 $\Delta=2^2-4 \times 3=-8 < 0$ ，所以原方程没有实数解，所以 B 选项错误；

C、移项得： $\sqrt{3-2x}=-x$ ，方程两边同时平方得： $3-2x=x^2$ ，化为一般形式为： $x^2+2x-3=0$ ，解得

$x_1=1$, $x_2=-3$, 经检验 $x_1=1$ 时不满足原方程, 所以 $x=-3$, 所以 C 选项正确;

D、解方程得 $x=2$, 经检验当 $x=2$ 时分母为零, 所以原方程无实数解, 所以 D 选项错误.

故选 C.

【点睛】本题考查了解无理方程: 解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解, 在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法. 也考查了一元二次方程和分式方程.

3. (2019 春·八年级课时练习) 方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+m \end{cases}$ 有两组不同的实数解, 则 ()

- A. $m \geq -\frac{1}{4}$ B. $m > -\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{4}$ D. 以上答案都不对

【答案】B

【分析】将 $y=x^2$ 与 $y=x+m$ 函数联立, 根据解的个数求解即可.

【详解】方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+m \end{cases}$ 有两组不同的实数解, 两个方程消去 y 得, $x^2-x-m=0$, 需要 $\Delta > 0$, 即 $1+4m > 0$, 所以 $m > -\frac{1}{4}$, 故选 B.

【点睛】本题考查了二元二次方程, 用到的知识点是加减消元法解方程组, 根的判别式、解一元二次方程等知识, 关键是根据根的判别式求出 m 的值.

4. (2019 春·八年级单元测试) 下列各对未知数的值中, 是方程组 $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9 \\ (x-y)^2-3(x-y)+2=0 \end{cases}$ 的解的是 ()

- A. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}$

【答案】A

【分析】此题根据方程组的解的定义, 运用代入排除法即可作出选择.

【详解】把四个选项的答案分别代入方程组, 发现只有 A 中的答案适合两个方程.

故选 A.

【点睛】本题主要考查了方程组的解的定义.

5. (2019 春·上海松江·八年级统考期末) 下列说法正确的是 ()

- A. $x^4+1=0$ 是二项方程 B. $x^2y-y=2$ 是二元二次方程
C. $\frac{x}{3}-\frac{x}{2}=1$ 是分式方程 D. $\sqrt{2}x^2-1=0$ 是无理方程

【答案】A

【分析】根据整式方程、分式方程和无理方程的概念逐一判断即可得.

【详解】A. 方程是一般式, 且方程的左边只有 2 项, 此方程是二项方程, 此选项正确;

B. $x^2y-y=2$ 是二元三次方程, 此选项错误;

C. $\frac{x}{3}-\frac{x}{2}=1$ 是一元一次方程, 属于整式方程, 此选项错误;

D. $\sqrt{2}x^2-1=0$ 是一元二次方程, 属于整式方程;

故选 A.

【点睛】本题主要考查无理方程, 解题的关键是掌握整式方程、分式方程和无理方程的定义.

6. (2019 春·八年级课时练习) 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$ 的解有 () 组.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】D

【分析】由①+②得: $2x^2=18$, 解出 x 的值, 分别代入①求出 y 即可.

【详解】解: $\begin{cases} x^2+y^2=13 \text{ ①} \\ x^2-y^2=5 \text{ ②} \end{cases}$, ①+②得: $2x^2=18$, 解得: $x_1=3, x_2=-3$;

把 $x=3$ 代入①得: $y_1=2, y_2=-2$,

把 $x=-3$ 代入①得: $y_3=2, y_4=-2$

∴方程组的解为: $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=-2 \end{cases}, \begin{cases} x_3=-3 \\ y_3=2 \end{cases}, \begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=-2 \end{cases}$, 故选 D.

【点睛】本题考查了二元二次方程组和解一元二次方程的应用, 关键是能把方程组转化成一元二次方程.

二、填空题

7. (2019 春·上海·八年级校考期中) 方程 $x^4+x=0$ _____ 二项方程 (填“是”或“不是”)

【答案】不是

【分析】根据二项方程的定义判断即可.

【详解】解: 根据二项方程的定义可知, 方程 $x^4+x=0$ 不是二项方程,

故答案为不是.

【点睛】本题考查了二项方程的定义, 注意二项方程的左边只有两项, 一项含未知数, 一项是常数, 右边为 0.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/676044235115010150>