

金丽衢十二校 2024 学年高三第二次联考

数 学 试 题 (答案在最后)

命题人:

本卷分选择题和非选择题两部分, 考试时间为 **120** 分钟, 试卷总分为 **150** 分, 请考生将所有试题的答案涂、写在答题纸上.

选择题部分

一、选择题 (本题共 **8** 小题, 每小题 **5** 分, 共 **40** 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 < 4\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{0, 1, 2, 3\}$ C. $\{-1, 1, 2, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

【答案】B

【解析】

【分析】求出集合 B , 利用并集的定义可求得集合 $A \cup B$.

【详解】因为 $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 < 4\} = \{x \in \mathbf{N} \mid -2 < x < 2\} = \{0, 1\}$, $A = \{1, 2, 3\}$,
则 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$.

故选: B.

2. 已知向量 $\vec{a} = (2x, 3)$, $\vec{b} = (2, 0)$, $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, 则 x 的值为 ()

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】求出向量 $\vec{a} - \vec{b}$ 的坐标, 利用平面向量数量积的坐标运算可得出关于 x 的等式, 解之即可.

【详解】因为向量 $\vec{a} = (2x, 3)$, $\vec{b} = (2, 0)$, 则 $\vec{a} - \vec{b} = (2x - 2, 3)$,
所以 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 2(2x - 2) = 0$, 解得 $x = 1$.

故选: C.

3. 已知复数 z 满足 $(1+i)z = 2i$, 则 $|z|$ 为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】由条件，结合复数除法法则求 z 的代数形式，再由复数的模的公式求结论.

【详解】因为 $(1+i)z=2i$,

$$\text{所以 } z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1+i,$$

$$\text{所以 } |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

故选：C.

4. 若圆锥的轴截面是一个边长为4的等边三角形，则它的体积为（ ）

A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

B. 8π

C. 12π

D. $8\sqrt{3}\pi$

【答案】A

【解析】

【分析】由条件确定圆锥的底面半径和高，在利用圆锥的体积公式求结论.

【详解】因为圆锥的轴截面是一个边长为4的等边三角形，

所以圆锥的底面半径 $r=2$ ，高 $h=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ ，

$$\text{所以圆锥的体积 } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 4 \times 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi.$$

故选：A.

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ \ln x - x^2, & x > 0 \end{cases}$ ，则 $f(f(1)) =$ （ ）

A. -1

B. $-\frac{1}{e}$

C. 1

D. e

【答案】B

【解析】

【分析】根据分段函数 $f(x)$ 的解析式求 $f(1)$ ，再求 $f(f(1))$ 即可.

【详解】因为函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ \ln x - x^2, & x > 0 \end{cases}$,

所以 $f(1) = \ln 1 - 1 = -1$,

所以 $f(f(-1)) = f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

故选: B.

6. 已知两条相交直线 a, b , a 在平面 α 内, b 在平面 α 外. 设 a, b 的夹角为 θ_1 , 直线 b 与平面 α 所成角为

$\frac{\pi}{2} - \theta_1$, $\sin \theta_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 则由 a, b 确定的平面与平面 α 夹角的大小为 ()

A. $\frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{3}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 设直线 a, b 的交点为 O , 过直线 b 上异于点 O 的一点 P 作平面 α 的垂线, 设垂足为 B , 过点 B 作 $BA \perp a$, 垂足为 A , 连接 PA , 由已知可得 $\angle POA = \theta_1$, $\angle POB = \frac{\pi}{2} - \theta_1$,

根据平面与平面夹角定义可得由 a, b 确定的平面与平面 α 夹角为 $\angle PAB$, 解三角形求夹角大小.

【详解】 设直线 a, b 的交点为 O , 过直线 b 上异于点 O 的一点 P 作平面 α 的垂线, 设垂足为 B , 过点 B 作 $BA \perp a$, 垂足为 A , 连接 PA , 如图:

因为 $PB \perp \alpha$, 所以 OB 为直线 b 在平面 α 内的投影,

所以直线 b 与平面 α 所成角为 $\angle POB$,

由已知 $\angle POA = \theta_1$, $\angle POB = \frac{\pi}{2} - \theta_1$,

因为 $PB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$,

所以 $PB \perp a$, 又 $AB \perp a$, $PB \cap AB = B$, $PB, AB \subset$ 平面 PAB ,

所以直线 $OA \perp$ 平面 PAB , 又 $PA \subset$ 平面 PAB ,

所以 $PA \perp OA$, 即 $PA \perp a$,

所以由 a, b 确定的平面与平面 α 夹角为 $\angle PAB$,

在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中, $\sin \angle PAB = \frac{PB}{PA}$,

在 $\text{Rt}\triangle POB$ 中, $\sin \angle POB = \frac{PB}{OP}$, 即 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \frac{PB}{OP}$,

在 $\text{Rt}\triangle POA$ 中, $\sin \angle POA = \frac{PA}{OP}$, 即 $\sin \theta_1 = \frac{PA}{OP}$,

$$\text{所以 } \sin \angle PAB = \frac{PB}{PA} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)}{\sin \theta_1} = \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1},$$

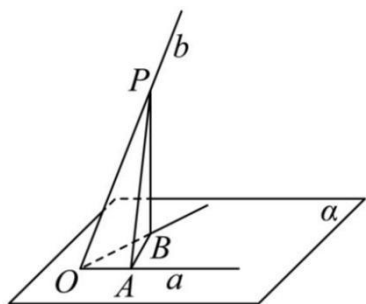
$$\text{又 } \sin \theta_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{所以 } \cos \theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 所以 } \sin \angle PAB = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } \angle PAB \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 所以 } \angle PAB = \frac{\pi}{6},$$

所以由 a, b 确定的平面与平面 α 夹角的大小为 $\frac{\pi}{6}$.

故选: B



7. 设抛物线 $C: x^2 = 4y$ 焦点为 F , 斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与抛物线交于 A, B 两点, 若 $|AF| + |BF| = 7$, 则 $\cos \angle AFB$ 的值为 ()

- A. 0 B. $-\frac{4}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{7}}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】设直线 AB 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + b$, 联立方程组, 结合设而不求法根据关系 $|AF| + |BF| = 7$ 可求 b , 再求 $|AF|$, $|BF|$, $|AB|$, 根据余弦定理求结论.

【详解】抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点 F 的坐标为 $(0, 1)$, 准线方程为 $y = -1$,

设直线 AB 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + b$,

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 = 4y \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases}, \text{消} y \text{ 可得 } x^2 - 2x - 4b = 0,$$

方程 $x^2 - 2x - 4b = 0$ 的判别式 $\Delta = 4 + 16b > 0$, 故 $b > -\frac{1}{4}$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 不妨设 $x_1 < x_2$,

由已知 x_1, x_2 为方程 $x^2 - 2x - 4b = 0$ 的根,

所以 $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 x_2 = -4b$,

设点 A , B 在准线上的投影分别为 A_1 , B_1 ,

因为 $|AF| + |BF| = |AA_1| + |BB_1| = 7$, 所以 $y_1 + 1 + y_2 + 1 = 7$,

故 $\frac{1}{2}x_1 + b + \frac{1}{2}x_2 + b = 5$, 所以 $b = 2$,

即 x_1, x_2 为方程 $x^2 - 2x - 8 = 0$ 的根,

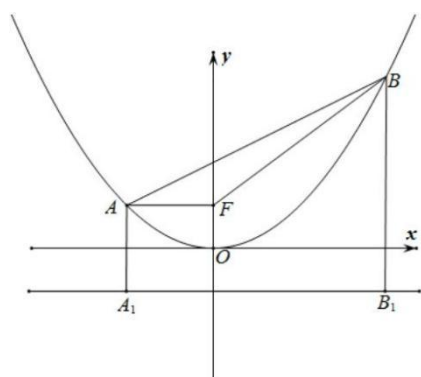
故 $x_1 = -2$, $x_2 = 4$,

所以 $|AF| = y_1 + 1 = \frac{1}{2}x_1 + 2 + 1 = 2$, $|BF| = y_2 + 1 = \frac{1}{2}x_2 + 2 + 1 = 5$,

又 $|AB| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} |x_2 - x_1| = 3\sqrt{5}$,

由余弦定理, $\cos \angle AFB = \frac{|AF|^2 + |BF|^2 - |AB|^2}{2|AF| \cdot |BF|} = \frac{4 + 25 - 45}{2 \times 2 \times 5} = -\frac{4}{5}$.

故选: B.



8. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2(A + B)$ ” 是 “ C 为直角” 的 ()

A. 充分但非必要条件

B. 必要但非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分条件也非必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】对于必要性，假设 C 是直角，利用诱导公式将等式转化为关于一个角的三角函数的关系，利用同角三角函数的平方关系可证等式成立，从而证明了必要性；对于非充分性，构造函数

$f(x) = \sin^2 A + \sin^2 x - \sin(A+x)$ ，其中 $0 \leq x \leq \pi - A$ ，利用导数研究单调性和极值，发现当角 A 足够小时是存在 3 个零点，每个零点都可以作为角 B 的值，所以 $A+B$ 的值有三个，存在不是直角的情况，从而否定充分性..

【详解】第一步：检验必要性.

如果 C 是直角，那么 $A+B=90^\circ$.

此时，等式 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin(A+B)$ 可变为 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ，这是成立的，

因此，如果 C 是直角，等式 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin(A+B)$ 成立；

第二步：验证充分性.

若 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin(A+B)$ ，

构造函数 $f(x) = \sin^2 A + \sin^2 x - \sin(A+x)$ ，其中 $0 < x < \pi - A$.

则 $f'(x) = 2 \sin x \cos x - \cos(A+x) = \sin 2x + \sin\left(x + A - \frac{\pi}{2}\right)$

$$= 2 \sin\left(\frac{2x + x + A - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{2x - x - A + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{A}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{A}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

记以 $u = \frac{3}{2}x + \frac{A}{2} - \frac{\pi}{4}$ $v = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}$ ，则 $f'(x) = 2 \sin u \cos v$ ，

因为 $0 < x < \pi - A$ ，所以 $\frac{A}{2} - \frac{\pi}{4} < u < \frac{5\pi}{4} - A$ ， $\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2} < v < \frac{3}{4}\pi - A$ ，

令 $f'(x) = 0$ ，得 $x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{A}{3}$ ， $x_2 = \frac{\pi}{2} + A$ ， $x_3 = \frac{5\pi}{6} - \frac{A}{3}$ ，

令 $\frac{\pi}{6} - \frac{A}{3} < \frac{\pi}{2} + A < \frac{5\pi}{6} - \frac{A}{3}$ ，解得 $0 < A < \frac{\pi}{4}$ ，

列表如下：

x	0	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, x_3)	x_3	$(x_3, \pi - A)$	$\pi - A$
-----	---	------------	-------	--------------	-------	--------------	-------	------------------	-----------

u	$\frac{A}{2} - \frac{\pi}{4}$		0				π		
	$\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}$				$\frac{\pi}{2}$				$\frac{3}{4}\pi - A$
$\sin u$			0	+	+	+	0		
$\cos v$		+	+	+	0				
$f'(x)$			0	+	0		0	+	
$f(x)$	$-\cos A$	减	$f(x_1)$	增	$f(x_2)$	减	$f(x_2)$	增	$2\sin^2 A$

$$f(x_1) = \sin^2 A + \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{A}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2A}{3}\right), f(x_2) = 1 - \cos 2A > 0,$$

$$f(x_3) = \sin^2 A + \sin^2\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{A}{3}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2A}{3}\right),$$

当 $A \rightarrow 0$ 时, $f(x_3) \rightarrow -\frac{1}{4}$, 故存在 $A \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 使得 $f(x_3) < 0$,

而 $f\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = 0$, 且 $x_1 < \frac{\pi}{2} - A < x_2$, 从而函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi - A)$ 上有 3 个零点,

每个零点都可以作为角 B 的值,

所以 $A + B$ 的值有三个, 存在不是直角的情况,

即存在角 C 不是直角的情况, 所以充分性不成立.

综上所述, “ $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin(A + B)$ ” 是 “ C 为直角” 必要不充分条件.

故选: B.

【点睛】思路点睛: 本题中非充分性的检验问题, 一开始尝试证明充分性, 发现不能给出证明, 于是开始时尝试举反例来进行逻辑否定, 例子常常很难找到, 通常可以计算的例子都不会成功的否定, 需要极端情况下才能找到适合的例子, 这里利用构造函数, 利用导数探求是否有多余 1 个的零点, 从而说明原等式对于给定得角 A , 除了它的余角满足等式, 探索是否其它得角满足, 从而确定是否必须是使得角 C 为直角.

二、选择题 (本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 设 $(1 + 2x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$, 则下列说法正确的有 ()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/676111041140011101>