# 专题三　函数的概念与基本初等函数Ⅰ

# 第9讲　指数与指数函数

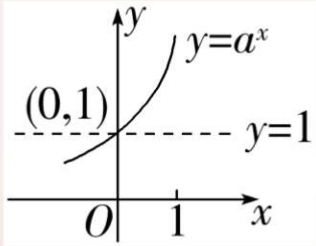
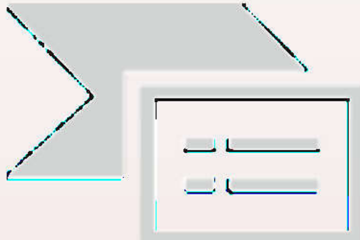
## 必备知识　BIBEI ZHISHI

### 1．分数指数幂

(1)规定：正数的正分数指数幂的意义是 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$；正数的负分数指数幂的意义是 $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$；0 的正分数指数幂等于 0；0 的负分数指数幂没有意义.

(2)有理数指数幂的运算性质：$a^ra^s=a^{r+s}$，$(a^r)^s=a^{rs}$，$(ab)^r=a^rb^r$，其中 $a>0$，$b>0$，$r$，$s\in\mathbf{Q}$.

2．指数函数的图象和性质

| $y=a^x$ | $a>1$ | $0<a<1$ |
| --- | --- | --- |
| 图象 |  |  |
| 定义域 | **R** | |
| 值域 | (0，＋∞) | |
| 单调性 | 在(－∞，＋∞)上是增函数 | 在(－∞，＋∞)上是减函数 |
| 图象特征 | 当$x>0$时，$y>1$；当$x<0$时，$0<y<1$ | 当$x>0$时，$0<y<1$；当$x<0$时，$y>1$ |
| | 图象必过点(0，1) | |

## 考点精析 KAODIAN JINGXI

### 1．指数幂的运算

**例1** (1)计算$(-0.12)^0+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\sqrt{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{4}{3}}+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$；

(2)化简：$\dfrac{\left(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{a\cdot b^5}}$.

**解析：**(1)$(-0.12)^0+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\sqrt{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{4}{3}}+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=1+\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{4}-3+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-2$.

(2)$\dfrac{\left(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{a\cdot b^5}}=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}=a^{-1}=\dfrac{1}{a}$.

**剖析：**(1)指数幂的运算首先将根式、分数指数幂统一为分数指数幂，以便利用法则计算，还应注意：①必须同底数幂相乘，指数才能相加；②运算的先后顺序．

(2)当底数是负数时，先确定符号，再把底数化为正数．

(3)运算结果不能同时含有根号和分数指数，也不能既有分母又含有负指数．

2．指数函数的图象及应用

例2 (1)(2023·广东模拟)下列数值大于1的是(　　)

A．$1.7^{0.2}$　　B．$0.7^{1.3}$

C．lg 2　　D．ln 0.5

(2)已知函数$f(x)=a^{x+1}-2(a>0$且$a\neq1)$的图象不经过第四象限，则$a$的取值范围为____________.

解析：(1)$1.7^{0.2}>1.7^{0}=1$，A正确；

$0.7^{1.3}<0.7^{0}=1$，B错误；

$\lg 2<\lg 10=1$，C错误；

$\ln 0.5<\ln e=1$，D错误．

故选A.

(2)函数$f(x)=a^{x+1}-2(a>0$且$a\neq1)$中，

令$x+1=0$，得$x=-1$，所以$f(-1)=1-2=-1$，

即$f(x)$的图象过定点$(-1，-1)$；

由$f(x)$的图象不经过第四象限，

则$f(0)=a-2\geqslant0$，

解得$a\geqslant2$，

所以$a$的取值范围是$[2，+\infty)$．

答案：(1)A　(2)$[2，+\infty)$

**剖析：**(1)已知函数解析式判断其图象一般是取特殊点，判断选项中的图象是否过这些点，若不满足则排除．

(2)对于有关指数型函数的图象问题，一般是从最基本的指数函数的图象入手，通过平移、伸缩、对称变换而得到．特别地，当底数$a$与1的大小关系不确定时应注意分类讨论．

(3)有关指数方程、不等式问题的求解，往往利用相应的指数型函数图象，数形结合求解．

3．指数函数性质及应用

例3 (1)函数 $y=\sqrt{2^x-8}$的定义域为(　　)

A．$(-\infty,\ 3)$　　B．$(-\infty,\ 3]$

C．$(3,\ +\infty)$　　D．$[3,\ +\infty)$

(2)设 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$，$b=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$，$c=\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$，则 $a$，$b$，$c$ 的大小关系为(　　)

A．$a>b>c$　　B．$c>a>b$

C．$c>b>a$　　D．$a>c>b$

解析：(1)由题意得 $2^x-8\geq 0$，所以 $2^x\geq 2^3$，解得 $x\geq 3$.故选 D.

(2)因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$是单调递减的且 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$，$b=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$，所以 $b>a$，

又 $b=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}}$，$c=\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}=(25)^{\frac{1}{5}}$，

因为函数 $y=x^{\frac{1}{5}}$是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $c>b$，

所以 $c>b>a$.

故选 C.

答案：(1)D　(2)C

剖析：指数函数的性质及应用问题的解题策略

(1)比较大小问题：常利用指数函数的单调性及中间值(0或1)法．

(2)简单的指数方程或不等式的求解问题：解决此类问题应利用指数函数的单调性，要特别注意底数$a$的取值范围，并在必要时进行分类讨论．

(3)解决指数函数的综合问题时，要把指数函数的概念和性质同函数的其他性质(如奇偶性、周期性)相结合，同时要特别注意底数不确定时，对底数的分类讨论．