

专题 8 平面向量

考情解读

高考侧重考查正、余弦定理与其他知识(如三角函数、平面向量等)的综合应用,试题一般为中档题,各种题型均有可能出现.

预测高考仍将以正、余弦定理的综合应用为主要考点,重点考查计算能力及应用数学知识分析、解决问题的能力.

重点知识梳理

1. 向量的基本概念

- (1)既有大小又有方向的量叫做向量.
- (2)零向量的模为 0, 方向是任意的, 记作 $\mathbf{0}$.
- (3)长度等于 1 的向量叫单位向量.
- (4)长度相等且方向相同的向量叫相等向量.
- (5)方向相同或相反的非零向量叫平行向量, 也叫共线向量. 零向量和任一向量平行.

2. 共线向量定理

向量 $\mathbf{a}(\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ 与 $\mathbf{b}$ 共线, 当且仅当存在唯一一个实数 λ , 使 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

3. 平面向量基本定理

如果 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于这一平面内的任意向量 $\mathbf{a}$, 有且只有一对实数 λ_1 、 λ_2 , 使 $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$.

4. 两向量的夹角

已知两个非零向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 在平面上任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 则 $\angle AOB = \theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ 叫作 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角.

5. 向量的坐标表示及运算

(1) 设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, 则

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2), \quad \lambda \mathbf{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

(2) 若 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

6. 平面向量共线的坐标表示

已知 $\boldsymbol{a}=(x_1, \ y_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, \ y_2)$,

当且仅当 $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ 时, 向量 a 与 b 共线.

7. 平面向量的数量积

设 θ 为 a 与 b 的夹角.

(1) 定义: $a \cdot b = |a||b|\cos\theta$.

(2) 投影: $\frac{a \cdot b}{|b|} = |a|\cos\theta$ 叫做向量 a 在 b 方向上的投影.

8. 数量积的性质

(1) $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$;

(2) 当 a 与 b 同向时, $a \cdot b = |a| \cdot |b|$; 当 a 与 b 反向时, $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$; 特别地, $a \cdot a = |a|^2$;

(3) $|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$;

(4) $\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$.

9. 数量积的坐标表示、模、夹角

已知非零向量 $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$

(1) $a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2$;

(2) $|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$;

(3) $a \perp b \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$;

(4) $\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

【误区警示】

1. 两向量夹角的范围是 $[0, \pi]$, $a \cdot b > 0$ 与 $\langle a, b \rangle$ 为锐角不等价; $a \cdot b < 0$ 与 $\langle a, b \rangle$ 为钝角不等价.

2. 点共线和向量共线, 直线平行与向量平行既有联系又有区别.

3. a 在 b 方向上的投影为 $\frac{a \cdot b}{|b|}$, 而不是 $\frac{a \cdot b}{|a|}$.

4. 若 a 与 b 都是非零向量, 则 $\lambda a + \mu b = 0 \Leftrightarrow a$ 与 b 共线, 若 a 与 b 不共线, 则 $\lambda a + \mu b = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$.

高频者点突破

高频考点一 平面向量的概念及运算

例 1. 【2017 课标 1, 理 13】已知向量 a, b 的夹角为 60° , $|a|=2$, $|b|=1$, 则 $|a+2b| =$ _____.

【变式探究】已知向量 $a = (m, 4)$, $b = (3, -2)$, 且 $a \parallel b$, 则 $m =$ _____.

【变式探究】(1)已知点 $A(0,1)$ ， $B(3,2)$ ，向量 $\vec{AB} = (-4, -3)$ ，则向量 $\vec{BA} =$ ()

A. $(-7, -4)$

B. $(7,4)$

C. $(-1,4)$ D. $(1,4)$

【举一反三】向量的三角形法则要保证各向量“首尾相接”；平行四边形法则要保证两向量“共起点”，结合几何法、代数法(坐标)求解.

(2) 设 D, E, F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 的中点，则 $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} =$ ()

A. $\vec{0}$ B. $\frac{1}{2}\vec{AB}$

C. $\frac{1}{2}\vec{BC}$ D. $\frac{1}{2}\vec{CA}$

高频考点二 平面向量数量积的计算与应用

例 2. 【2019 年高考全国 II 卷理数】已知 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (3, t)$, $|\vec{a}| = 1$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

A. -3

B. -2

C. 2

D. 3

【举一反三】(2018 年全国 I 卷理数) 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过点 $(-2, 0)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M, N 两点, 则 $\vec{FM} \cdot \vec{FN} =$

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【变式探究】已知向量 $\vec{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 则 $\angle ABC =$ ()

A. 30° B. 45°

C. 60° D. 120°

【变式探究】(1) 向量 $\vec{a} = (1, -1)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, 则 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} =$ ()

A. -1 B. 0

C. 1 D. 2

【举一反三】当向量以几何图形的形式(有向线段)出现时, 其数量积的计算可利用定义法; 当向量以坐标形式出现时, 其数量积的计算用坐标法; 如果建立坐标系, 表示向量的有向线段可用坐标表示, 计算向量较简单.

(2) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 CD 的中点, 则 $\vec{AE} \cdot \vec{BD} =$ _____.

高频考点三 平面向量的综合应用

例 3、【2019 年高考浙江卷】已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，当每个 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 取遍 ± 1 时，

$|\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BC} + \lambda_3 \overrightarrow{CD} + \lambda_4 \overrightarrow{DA} + \lambda_5 \overrightarrow{AC} + \lambda_6 \overrightarrow{BD}|$ 的最小值是_____；最大值是_____.

【举一反三】（2018 年江苏卷）在平面直角坐标系 xOy 中， A 为直线 $y=2x$ 上在第一象限内的点， $B(5,0)$ ，

以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D ．若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ ，则点 A 的横坐标为_____．

【变式探究】【2017 江苏，16】 已知向量 $a = (\cos x, \sin x)$ ， $b = (3, -\sqrt{3})$ ， $x \in [0, \pi]$ ．

(1) 若 $a \parallel b$ ，求 x 的值；

(2) 记 $f(x) = a \cdot b$ ，求 $f(x)$ 的最大值和最小值以及对应的 x 的值．

真题感悟

1. 【2019 年高考全国 I 卷理数】已知非零向量 a, b 满足 $|a| = 2|b|$ ，且 $(a-b) \perp b$ ，则 a 与 b 的夹角

为

- | | |
|---------------------|---------------------|
| A. $\frac{\pi}{6}$ | B. $\frac{\pi}{3}$ |
| C. $\frac{2\pi}{3}$ | D. $\frac{5\pi}{6}$ |

2. 【2019 年高考全国 II 卷理数】已知 $a=(2,3)$ ， $b=(3, t)$ ， $a \cdot b=1$ ，则 $|b|$

- | | |
|---------|---------|
| A. -3 | B. -2 |
| C. 2 | D. 3 |

3. 【2019 年高考北京卷理数】设点 A, B, C 不共线，则“ $\angle BAC$ 为锐角”是“ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ”的

- | | |
|-------------|---------------|
| A. 充分而不必要条件 | B. 必要而不充分条件 |
| C. 充分必要条件 | D. 既不充分也不必要条件 |

4. 【2019 年高考全国 III 卷理数】已知 a, b 为单位向量，且 $a \cdot b = 0$ ，若 $c = 2a - \sqrt{5}b$ ，则

$\cos \langle a, c \rangle =$ _____．

5. 【2019 年高考天津卷理数】在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ， $AD = 5$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，

点 E 在线段 CB 的延长线上，且 $AE = BE$ ，则 $BD \cdot AE =$ _____．

6. 【2019 年高考浙江卷】已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，当每个 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 取遍 ± 1 时，

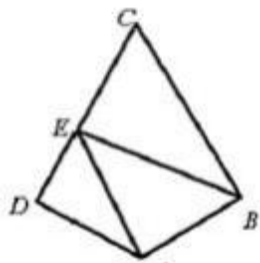
$|\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BC} + \lambda_3 \overrightarrow{CD} + \lambda_4 \overrightarrow{DA} + \lambda_5 \overrightarrow{AC} + \lambda_6 \overrightarrow{BD}|$ 的最小值是_____；最大值是_____.

1. (2018 年浙江卷) 已知 a, b, e 是平面向量, e 是单位向量. 若非零向量 a 与 e 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 向量 b 满足 $b^2 - 4e \cdot b + 3 = 0$, 则 $|a - b|$ 的最小值是

- A. $\sqrt{3}-1$ B. $\sqrt{3}+1$ C. 2 D. $2-\sqrt{3}$

2. (2018 年天津卷) 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC, \angle ADC, \angle BAD=120^\circ$, $AB=AD=1$.

若点 E 为边 CD 上的动点, 则 $\vec{AE} \cdot \vec{BE}$ 的最小值为



- A. $\frac{21}{16}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{25}{16}$ D. 3

3. (2018 年全国 I 卷理数) 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F , 过点 $(-2, 0)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M, N 两点, 则 $FM \cdot FN =$

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

4. (2018 年全国 I 卷理数) 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $=$

- A. $\frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC}$ B. $\frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AC}$
C. $\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$ D. $\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$

5. (2018 年全国 II 卷理数) 已知向量 a, b 满足 $|a|=1, a \cdot b = -1$, 则 $a \cdot (2a-b) =$

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 0

6. (2018 年江苏卷) 在平面直角坐标系 xOy 中, A 为直线 $y=2x$ 上在第一象限内的点, $B(5,0)$, 以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D . 若 $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$, 则点 A 的横坐标为_____.

7. (2018 年全国 III 卷理数) 已知向量 $a=(1,2), b=(2,-2), c=(1)$. 若 $cl(ca+b)$, 则 $\lambda =$ _____.

1. 【2017 课标 3, 理 12】在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1, AD=2$, 动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上.

若 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AD}$, 则 $\lambda + \mu$ 的最大值为

- A. 3 B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. 2

2. 【2017 北京, 理 6】设 m, n 为非零向量, 则“存在负数 λ , 使得 $m = \lambda n$ ”是“ $m \cdot n < 0$ ”的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

3. 【2017 课标 II, 理 12】已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$



(第 12 题)

10. 【2017 江苏, 16】 已知向量 $\boldsymbol{a} = (\cos x, \sin x)$, $\boldsymbol{b} = (3, -\sqrt{3})$, $x \in [0, \pi]$.

(1) 若 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, 求 x 的值;

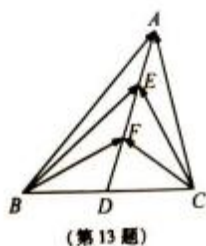
(2) 记 $f(x) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}$, 求 $f(x)$ 的最大值和最小值以及对应的 x 的值.

1. 【2016 高考新课标 2 理数】 已知向量 $\vec{a} = (1, m)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3, -2$, 且 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $m =$ ()

- (A) -8 (B) -6 (C) 6 (D) 8

2. 【2016 高考江苏卷】 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上的两个三等分点,

$\vec{BC} \cdot \vec{CA} = 4$, $\vec{BF} \cdot \vec{CF} = -1$, 则 $\vec{BE} \cdot \vec{CE}$ 的值是 .



3. 【2016 年高考四川理数】 在平面内, 定点 A, B, C, D 满足 DA

$= |DB| = |DC|$, $DA \cdot DB = DB \cdot DC$, $DA = -2$, 动点 P, M 满足 $\vec{AP} = \vec{MP}$

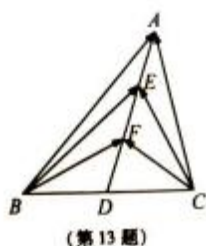
大值是()

$= 1$, $\vec{PM} = \vec{MC}$, 则 $|\vec{PM}|^2$ 的最

- (A) $\frac{43}{4}$ (B) $\frac{49}{4}$ (C) $\frac{37+6\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{37+2\sqrt{33}}{4}$

4. 【2016 高考江苏卷】 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上的两个三等分点,

$\vec{BC} \cdot \vec{CA} = 4$, $\vec{BF} \cdot \vec{CF} = -1$, 则 $\vec{BE} \cdot \vec{CE}$ 的值是 .



专题 8 平面向量

考情解读

高考侧重考查正、余弦定理与其他知识(如三角函数、平面向量等)的综合应用,试题一般为中档题,各种题型均有可能出现.

预测高考仍将以正、余弦定理的综合应用为主要考点,重点考查计算能力及应用数学知识分析、解决问题的能力.

重点知识梳理

1. 向量的基本概念

- (1)既有大小又有方向的量叫做向量.
- (2)零向量的模为 0, 方向是任意的, 记作 $\mathbf{0}$.
- (3)长度等于 1 的向量叫单位向量.
- (4)长度相等且方向相同的向量叫相等向量.
- (5)方向相同或相反的非零向量叫平行向量, 也叫共线向量. 零向量和任一向量平行.

2. 共线向量定理

向量 $\mathbf{a}(\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ 与 $\mathbf{b}$ 共线, 当且仅当存在唯一一个实数 λ , 使 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

3. 平面向量基本定理

如果 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于这一平面内的任意向量 $\mathbf{a}$, 有且只有一对实数 λ_1 、 λ_2 , 使 $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$.

4. 两向量的夹角

已知两个非零向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 在平面上任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 则 $\angle AOB = \theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ 叫作 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角.

5. 向量的坐标表示及运算

- (1)设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, 则

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2), \quad \lambda \mathbf{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

$\rightarrow$

(2)若 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

6. 平面向量共线的坐标表示

已知 $\mathbf{a}=(x_1, y_1)$, $\mathbf{b}=(x_2, y_2)$,

当且仅当 $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ 时, 向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线.

7. 平面向量的数量积

设 θ 为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角.

(1) 定义: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$.

(2) 投影: $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = |\mathbf{a}| \cos \theta$ 叫做向量 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 方向上的投影.

8. 数量积的性质

(1) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$;

(2) 当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向时, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$; 当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 反向时, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$; 特别地, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$;

(3) $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$;

(4) $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$.

9. 数量积的坐标表示、模、夹角

已知非零向量 $\mathbf{a}=(x_1, y_1)$, $\mathbf{b}=(x_2, y_2)$

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2$;

(2) $|\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$;

(3) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$;

(4) $\cos \theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

【误区警示】

1. 两向量夹角的范围是 $[0, \pi]$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ 与 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为锐角不等价; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ 与 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为钝角不等价.

2. 点共线和向量共线, 直线平行与向量平行既有联系又有区别.

3. $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 方向上的投影为 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$, 而不是 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$.

4. 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 都是非零向量, 则 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线, 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, 则 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$.

高频考点突攻

高频考点一 平面向量的概念及运算

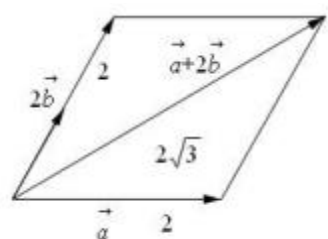
例 1. 【2017 课标 1, 理 13】已知向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的夹角为 60° , $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=1$, 则 $|\mathbf{a}+2\mathbf{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】利用如下图形，可以判断出 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 的模长是以 2 为边长的菱形对角线的长度，

$$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 4 + 4 \times 2 \times 1 \times \cos 60^\circ + 4 = 12$$

所以 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.



【变式探究】已知向量 $\vec{a} = (m, 4)$ ， $\vec{b} = (3, -2)$ ，且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $m =$ _____.

解析：基本法： $\because \vec{a} \parallel \vec{b}$ ， $\therefore \vec{a} = \lambda \vec{b}$

即 $(m, 4) = \lambda(3, -2) = (3\lambda, -2\lambda)$

$$m = 3\lambda,$$

$$\because 4 = -2\lambda, \quad \text{故 } m = -6.$$

速解法：根据向量平行的坐标运算求解：

$$\because \vec{a} = (m, 4), \vec{b} = (3, -2), \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\therefore m \times (-2) - 4 \times 3 = 0$$

$$\therefore -2m - 12 = 0, \quad \therefore m = -6.$$

答案：-6

【变式探究】(1)已知点 $A(0, 1)$ ， $B(3, 2)$ ，向量 $\vec{AC} = (-4, -3)$ ，则向量 $\vec{BC} =$ ()

A. $(-7, -4)$

B. $(7, 4)$

C. $(-1, 4)$

D. $(1, 4)$

解析：基本法：设 $C(x, y)$ ，则 $\vec{AC} = (x, y-1) = (-4, -3)$ ，

$$x = -4,$$

所以 $y = -2$ ，从而 $\vec{BC} = (-4, -2) - (3, 2) = (-7, -4)$ ．故选 A.

速解法： $\because \vec{AB} = (3, 2) - (0, 1) = (3, 1)$ ，

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-4, -3) - (3, 1) = (-7, -4).$$

答案：A

【举一反三】向量的三角形法则要保证各向量“首尾相接”；平行四边形法则要保证两向量“共起点”，结

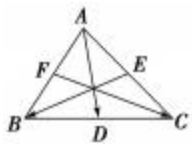
合几何法、代数法(坐标)求解.

(2) 设 D, E, F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 的中点, 则 $\vec{E} + \vec{F} + \vec{C} =$ ()

$$\vec{A} + \vec{D} = \vec{B} + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

$$\vec{C} + \vec{BC} = \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{BC}$$

解析: 基本法一: 设 $\vec{A} \rightarrow B = \vec{a}, \vec{A} \rightarrow C = \vec{b}$, 则 $\vec{E} \rightarrow B = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}, \vec{F} \rightarrow C = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$, 从而 $\vec{E} \rightarrow B + \vec{F} \rightarrow C = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{A} \rightarrow D$, 故选 A.



基本法二: 如图, $\vec{E} \rightarrow B + \vec{F} \rightarrow C = \vec{E} \rightarrow C + \vec{C} \rightarrow B + \vec{F} \rightarrow B + \vec{B} \rightarrow C = \vec{E} \rightarrow C + \vec{F} \rightarrow B = \frac{1}{2}(\vec{A} \rightarrow C + \vec{A} \rightarrow B)$

$$= \frac{1}{2} \vec{A} \rightarrow D = \vec{A} \rightarrow D.$$

答案: A

高频考点二 平面向量数量积的计算与应用

例 2. 【2019 年高考全国 II 卷理数】已知 $\vec{A} \rightarrow B = (2, 3), \vec{A} \rightarrow C = (3, t), \vec{B} \rightarrow C = 1$, 则 $\vec{A} \rightarrow B \cdot \vec{B} \rightarrow C =$

A. -3

B. -2

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】由 $\vec{B} \rightarrow C = \vec{A} \rightarrow C - \vec{A} \rightarrow B = (1, t-3)$, $|\vec{B} \rightarrow C| = \sqrt{1^2 + (t-3)^2} = 1$, 得 $t = 3$, 则 $\vec{B} \rightarrow C = (1, 0)$, $\vec{A} \rightarrow B \cdot \vec{B} \rightarrow C = 2$. 故选 C.

【举一反三】(2018 年全国 I 卷理数) 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过点 $(-2, 0)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线

与 C 交于 M, N 两点, 则 $FM \cdot FN =$

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【答案】D

【解析】根据题意，过点 $(-2, 0)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线方程为 $y = \frac{2}{3}(x+2)$ ，与抛物线方程联立 $\begin{cases} y = \frac{2}{3}(x+2) \\ y^2 = 4x \end{cases}$ ，

消元整理得： $y^2 - 6y + 8 = 0$ ，解得 $M(1, 2), N(4, 4)$ ，又 $F(1, 0)$ ，所以 $\overrightarrow{FM} = (0, 2), \overrightarrow{FN} = (3, 4)$ ，从而可以求得

$\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 0 \times 3 + 2 \times 4 = 8$ ，故选 D.

【变式探究】已知向量 $\overrightarrow{BA} = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ ， $\overrightarrow{BC} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right]$ ，则 $\angle ABC = (\quad)$

A. 30° B. 45°

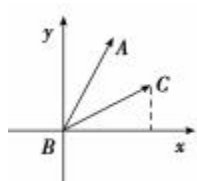
C. 60° D. 120°

解析：基本法：根据向量的夹角公式求解。

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right], \overrightarrow{BC} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right], \therefore |\overrightarrow{BA}| = 1, |\overrightarrow{BC}| = 1, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \cos \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\because 0^\circ \leq \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle \leq 180^\circ, \therefore \angle ABC = \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle = 30^\circ.$$



速解法：如图，B 为原点，则 $\overrightarrow{BA} = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$

$$\therefore \angle ABx = 60^\circ, \overrightarrow{BC} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right], \angle CBx = 30^\circ, \therefore \angle ABC = 30^\circ.$$

答案：A

【变式探究】(1) 向量 $\mathbf{a} = (1, -1)$ ， $\mathbf{b} = (-1, 2)$ ，则 $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\quad)$

A. -1 B. 0

C. 1 D. 2

解析：基本法：因为 $2\mathbf{a}+\mathbf{b}=2(1, -1)+(-1,2)=(2, -2)+(-1,2)=(1,0)$ ，所以 $(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=(1,0)\cdot(1, -1)=1\times 1+0\times(-1)=1$. 故选 C.

速解法： $\because \mathbf{a}=(1, -1)$ ， $\mathbf{b}=(-1,2)$ ， $\therefore \mathbf{a}^2=2$ ， $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-3$ ，

从而 $(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=2\mathbf{a}^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=4-3=1$. 故选 C.

答案： C

【举一反三】当向量以几何图形的形式(有向线段)出现时，其数量积的计算可利用定义法；当向量以坐标形式出现时，其数量积的计算用坐标法；如果建立坐标系，表示向量的有向线段可用坐标表示，计算向量较简单.

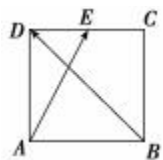
(2)已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 CD 的中点, 则 $\vec{A} \cdot \vec{E} \cdot \vec{B} \cdot \vec{D} =$ _____.

解析: 基本法: 以 $\vec{A} \cdot \vec{B}$ 、 $\vec{A} \cdot \vec{D}$ 为基底表示 $\vec{A} \cdot \vec{E}$ 和 $\vec{B} \cdot \vec{D}$ 后直接计算数量积.

$$\vec{A} \cdot \vec{E} = \vec{A} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{B}, \quad \vec{B} \cdot \vec{D} = \vec{A} \cdot \vec{D} - \vec{A} \cdot \vec{B},$$

$$\begin{aligned} & \left| \vec{A} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{B} \right| \\ \therefore \vec{A} \cdot \vec{E} \cdot \vec{B} \cdot \vec{D} &= \left(\vec{A} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{B} \right) \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{D} - \vec{A} \cdot \vec{B} \right) \end{aligned}$$

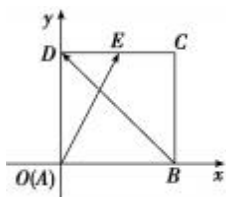
$$= |\vec{A} \cdot \vec{D}|^2 - \frac{1}{4} |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 = 2^2 - \frac{1}{4} \times 2^2 = 2.$$



速解法: (坐标法)先建立平面直角坐标系, 结合向量数量积的坐标运算求解.

如图, 以 A 为坐标原点, AB 所在的直线为 x 轴, AD 所在的直线为 y 轴, 建立平面直角坐标系, 则 $A(0,0)$,

$B(2,0)$, $D(0,2)$, $E(1,2)$,



$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{E} = (1, 2), \quad \vec{B} \cdot \vec{D} = (-2, 2),$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{E} \cdot \vec{B} \cdot \vec{D} = 1 \times (-2) + 2 \times 2 = 2.$$

答案: 2

高频考点三 平面向量的综合应用

例 3、【2019 年高考浙江卷】已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 当每个 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 取遍 ± 1 时,

$|\lambda_1 \vec{AB} + \lambda_2 \vec{BC} + \lambda_3 \vec{CD} + \lambda_4 \vec{DA} + \lambda_5 \vec{AC} + \lambda_6 \vec{BD}|$ 的最小值是_____ ; 最大值是_____.