# 第 12 讲 用因式分解法求解一元二次方程

## 模块导航

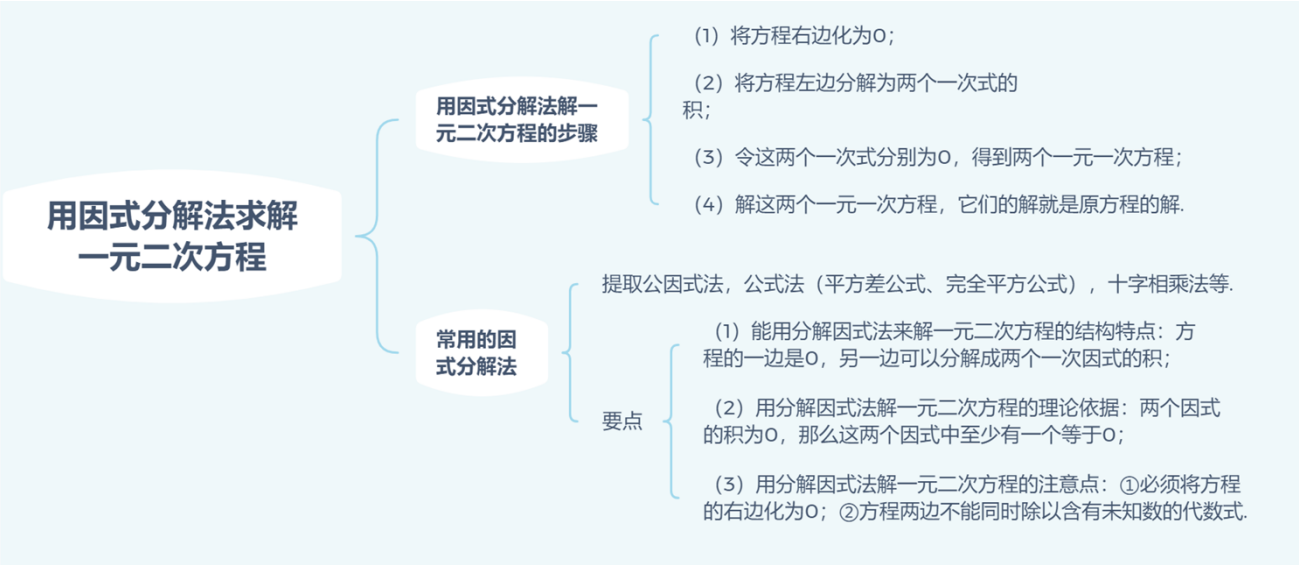
模块一　思维导图串知识
模块二　基础知识全梳理（吃透教材）
模块三　核心考点举一反三
模块四　小试牛刀过关测

## 素养目标

1．正确理解因式分解法的实质，熟练运用因式分解法解一元二次方程；

2．因式分解法解一元二次方方程的应用；

## 模块一 思维导图串知识




## 模块二 基础知识全梳理

### 知识点一. 用因式分解法解一元二次方程的步骤

（1）将方程右边化为 0；

（2）将方程左边分解为两个一次式的积；

（3）令这两个一次式分别为 0，得到两个一元一次方程；

（4）解这两个一元一次方程，它们的解就是原方程的解.

### 知识点二. 常用的因式分解法

提取公因式法，公式法（平方差公式、完全平方公式），十字相乘法等.

**要点：**

（1）能用分解因式法来解一元二次方程的结构特点：方程的一边是 0，另一边可以分解成两个一次因式的积；

（2）用分解因式法解一元二次方程的理论依据：两个因式的积为 0，那么这两个因式中至少有一个等于 0；

（3）用分解因式法解一元二次方程的注意点：①必须将方程的右边化为 0；②方程两边不能同时除以含有未知数的代数式.

## 模块三 核心考点举一反三

### 考点一：用因式分解法（除十字相乘法）求解一元二次方程

例 1．（23-24 九年级·江苏·假期作业）解关于 $x$ 的方程（因式分解方法）：

(1) $3x^2-\sqrt{5}x=0$；　　(2) $7x(x-3)=3x-9$．

【答案】(1) $x_1=0$，$x_2=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(2) $x_1=3$，$x_2=\dfrac{3}{7}$

【分析】（1）用提公因式法进行因式分解，再解方程即可；

（2）移项后，用提公因式法进行因式分解，再解方程即可．

【详解】（1）解：$x(3x-\sqrt{5})=0$

①$x=0$ ②$3x-\sqrt{5}=0$

$\therefore x_1=0$，$x_2=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$．

（2）解：$7x(x-3)=3(x-3)$

$7x(x-3)-3(x-3)=0$

$(x-3)(7x-3)=0$

①$x-3=0$ ②$7x-3=0$

$\therefore x_1=3$，$x_2=\dfrac{3}{7}$．

【点睛】本题考查了因式分解法解一元二次方程．其中找到合适的公因式是解题的关键．

**【变式 1-1】**（2023 八年级下·浙江·专题练习）用因式分解解方程：$x(x-5)=8(5-x)$．

【答案】$x_1=-8$，$x_2=5$

【分析】采用因式分解法即可求解．

【详解】$x(x-5)=8(5-x)$

移项得，$x(x-5)-8(5-x)=0$，

提取公因式得，$(x+8)(x-5)=0$．

故 $x+8=0$ 或 $x-5=0$，

解得 $x_1=-8$，$x_2=5$．

【点睛】本题重点是利用因式分解法解一元二次方程，掌握因式分解求解的方法是解题的关键．

**【变式 1-2】**（2024·陕西西安·模拟预测）解方程：$3x(x-2)=6-3x$．

【答案】$x_1=-1$，$x_2=2$

【分析】本题主要考查了解一元二次方程，先移项，然后利用因式分解法解方程即可．

【详解】解：$\because 3x(x-2)=6-3x$，

$\therefore 3x(x-2)+3(x-2)=0$，

$\therefore 3(x-2)(x+1)=0$，

$\therefore x-2=0$或$x+1=0$，

解得$x_1=-1$，$x_2=2$.

**【变式 1-3】**（23-24 八年级下·广西崇左·期中）解方程：

(1) $x^2-2x-35=0$；　　(2) $(x+3)^2=2x+6$.

【答案】(1) $x_1=7$，$x_2=-5$

(2) $x_1=-3$，$x_2=-1$

【分析】本题考查了解一元二次方程，能选择适当的方法解一元二次方程是解此题的关键，解一元二次方程的方法有直接开平方法、因式分解法、配方法、公式法等.

（1）先分解因式，即可得出两个一元一次方程，求出方程的解即可；

（2）移项后分解因式，即可得出两个一元一次方程，求出方程的解即可.

【详解】（1）解：$x^2-2x-35=0$，

因式分解得$(x-7)(x+5)=0$，

即$x-7=0$或$x+5=0$，

解得$x_1=7$，$x_2=-5$.

（2）解：$(x+3)^2=2x+6$，

移项得$(x+3)^2-2(x+3)=0$，

因式分解得$(x+3)(x+3-2)=0$，

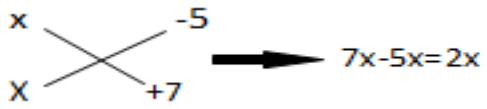
即$x+3=0$或$x+3-2=0$，

解得$x_1=-3$，$x_2=-1$.

## 考点二：用十字相乘法求解一元二次方程

例 2.（23-24 九年级上·四川眉山·阶段练习）阅读材料：解方程$x^2+2x-35=0$，我们可以按下面的方法解答：

| | |
|---|---|
| （1）分解因式$x^2+2x-35$<br>①竖分二次项与常数项：<br>$x^2=x\cdot x,-35=(-5)\times(+7)$<br>②交叉相乘，验中项： | （2）根据乘法原理，若$ab=0$，则$a=0$或$b=0$，则方程$x^2+2x-35$可以这样求解：<br>方程左边因式分解得$(x-5)(x+7)=0$<br>$\therefore x-5=0$或$x+7=0$ |

| | |
|---|---|
| <br>③横向写出两因式：<br>$x^2+2x-35=(x-5)(x+7)$ | $\therefore x_1=5, x_2=-7$ |

试用上述这种十字相乘法解下列方程

(1) $x^2+5x+4=0$；

(2) $x^2-6x+8=0$；

(3) $x^2+3x-10=0$；

(4) $x^2-6x-7=0$.

【答案】(1) $x_1=-4$， $x_2=-1$

(2) $x_1=2$， $x_2=4$

(3) $x_1=2$， $x_2=-5$

(4) $x_1=7$， $x_2=-1$

【分析】（1）利用十字相乘法解方程即可；

（2）利用十字相乘法解方程即可；

（3）利用十字相乘法解方程即可；

（4）利用十字相乘法解方程即可.

【详解】（1）解： $x^2+5x+4=0$

$(x+4)(x+1)=0$

$x+4=0$ 或 $x+1=0$

$\therefore x_1=-4$， $x_2=-1$；

（2）解： $x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

$x-2=0$ 或 $x-4=0$

$\therefore x_1=2$， $x_2=4$；

（3） $x^2+3x-10=0$

$(x+5)(x-2)=0$

$x+5=0$ 或 $x-2=0$

$\therefore x_1=2$， $x_2=-5$；

（4） $x^2-6x-7=0$

$(x+1)(x-7)=0$

$x+1=0$ 或 $x-7=0$

$\therefore x_1=7$，$x_2=-1$.

【点睛】本题考查十字相乘法解方程，掌握十字相乘法是解题的关键.

**【变式 2-1】**（2024·广东广州·二模）解方程：$x^2-2x-35=0$.

【答案】$x_1=7$，$x_2=-5$.

【分析】本题考查了解一元二次方程，利用因式分解法求解即可，解题的关键在于灵活选取适当的方法解方程.

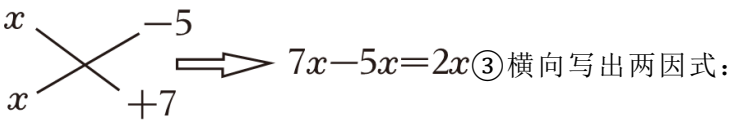
【详解】解：$x^2-2x-35=0$，

$(x-7)(x+5)=0$，

$x-7=0$或$x+5=0$，

$\therefore x_1=7$，$x_2=-5$.

**【变式 2-2】**（23-24 八年级下·山东烟台·期中）阅读材料：解方程$x^2+2x-35=0$，我们可以按下面的方法解答：

| | |
|---|---|
| （1）分解因式$x^2+2x-35$<br>①竖分二次项与常数项：<br>$x^2=x\cdot x$，$-35=(-5)\times(+7)$<br>②交叉相乘，验中项：<br><br>$7x-5x=2x$③横向写出两因式：<br>$x^2+2x-35=(x-5)(x+7)$ | （2）若$ab=0$，则$a=0$或$b=0$，所以方程$x^2+2x-35$可以这样求解：<br>方程左边分解因式得$(x-5)(x+7)=0$<br>$\therefore x-5=0$或$x+7=0$<br>$\therefore x_1=5$，$x_2=-7$ |

上述这种解一元二次方程的方法叫做十字相乘法．请参考以上方法解下列方程：

(1) $x^2+5x+4=0$；

(2) $2x^2+x-10=0$.

【答案】(1) $x_1=-4$，$x_2=-1$；

(2) $x_1=2$，$x_2=-\dfrac{5}{2}$

【分析】本题主要考查解一元二次方程的能力，熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法：直接开平方法、因式分解法、公式法、配方法，结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键.

（1）利用十字相乘法将方程的左边因式分解，继而得出两个关于 $x$ 的一元一次方程，进一步求解可得答案；

（2）利用十字相乘法将方程的左边因式分解，继而得出两个关于 $x$ 的一元一次方程，进一步求解可得答案.

【详解】（1）解：$x^2+5x+4=0$

$(x+4)(x+1)=0$

$x+4=0$或$x+1=0$

$\therefore x_1=-4$，$x_2=-1$；

（2）解：$2x^2+x-10=0$

$(2x+5)(x-2)=0$

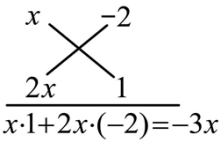
$2x+5=0$或$x-2=0$

$\therefore x_1=2$，$x_2=-\frac{5}{2}$.

**【变式 2-3】**（23-24 九年级上·全国·课后作业）（1）将$2x^2-3x-2$进行因式分解，我们可以按下面的方法解答：

解：①坚分二次项与常数项：$2x^2=x\cdot 2x,-2=(-2)\times 1$.

②交叉相乘，验中项（交叉相乘后的结果相加，其结果须等于多项式中的一次项）：




$x\cdot 1+2x\cdot(-2)=-3x$

③横向写出两因式：$2x^2-3x-2=(x-2)(2x+1)$.

我们把这种用十字交叉相乘分解因式的方法叫十字相乘法.

（2）根据乘法原理：若$ab=0$，则$a=0$或$b=0$.

试用上述方法和原理解下列方程：

①$x^2-3x+2=0$；

②$x^2-x-6=0$；

③$x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$；

④$2x^2+x-6=0$.

【答案】①$x_1=1$，$x_2=2$ ②$x_1=3$，$x_2=-2$ ③$x_1=\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{2}$ ④$x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=-2$

【分析】根据题中十字相乘法的解法步骤求解即可.

【详解】解：①由题知，$x^2=x\cdot x$，$2=(-1)\times(-2)$，

$\therefore$原方程$x^2-3x+2=0$可化为$(x-1)(x-2)=0$，

$\therefore x-1=0$或$x-2=0$，

$\therefore x_1=1$，$x_2=2$；

②由题知，$x^2=x\cdot x$，$-6=(-3)\times 2$，

$\therefore$原方程$x^2-x-6=0$可化为$(x-3)(x+2)=0$，

$\therefore x-3=0$或$x+2=0$，

$\therefore x_1=3$，$x_2=-2$；

③由题知，$x^2=x\cdot x$，$\sqrt{6}=\left(-\sqrt{3}\right)\times\left(-\sqrt{2}\right)$，

∴原方程$x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}=0$可化为$\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=0$，

∴$x-\sqrt{3}=0$或$x-\sqrt{2}=0$，

∴$x_1=\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{2}$；

④由题知，$x^2=x\cdot 2x$，$-6=2\times(-3)$，

∴原方程$2x^2+x-6=0$可化为$(x+2)(2x-3)=0$，

∴$x+2=0$或$2x-3=0$，

∴$x_1=\dfrac{3}{2}$，$x_2=-2$.

【点睛】本题考查十字相乘法解一元二次方程，理解题干中的十字相乘法的解法是解答的关键.

## 考点三：用因式分解法解一元二次方程中的错解复原问题

例 3.（22-23 九年级上·陕西榆林·阶段练习）以下是某同学解方程$x^2-3x=-2x+6$的过程：

解：方程两边因式分解，得$x(x-3)=-2(x-3)$，①

方程两边同除以$(x-3)$，得$x=-2$，②

∴原方程的解为$x=-2$.③

(1)上面的运算过程第_____步出现了错误.

(2)请你写出正确的解答过程.

【答案】(1)②

(2)过程见解析

【分析】（1）根据等式的性质作答即可；

（2）先移项，然后用因式分解法求解.

【详解】（1）解：∵$(x-3)$可能为 0，

∴不能除以$(x-3)$，

∴第②步出现了错误

故答案为②.

（2）解：方程两边因式分解，得$x(x-3)=-2(x-3)$，

移项，得$x(x-3)+2(x-3)=0$，

∴$(x-3)(x+2)=0$，

∴$x_1=3$，$x_2=-2$.

【点睛】本题考查了一元二次方程的解法，常用的方法有直接开平方法、配方法、因式分解法、求根公式法，熟练掌握各种方法是解答本题的关键.

**【变式 3-1】**（2024·浙江舟山·一模）解一元二次方程$x^2-2x-3=0$时，两位同学的解法如下：

| 解法一： | 解法二： |
| --- | --- |
| $x^2-2x=3$ | $a=1$，$b=-2$，$c=-3$ |
| $x(x-2)=3$ | $b^2-4ac=4-12=-8$ |
| $x=1$或$x-2=3$ | Q $b^2-4ac<0$ |
| $\therefore x_1=1$或$x_2=5$ | $\therefore$此方程无实数根. |

(1)判断：两位同学的解题过程是否正确，若正确，请在框内打“√”；若错误，请在框内打“×”.

(2)请选择合适的方法求解此方程.

【答案】(1)两位同学均错

(2)$x_1=3$，$x_2=-1$

【分析】本题考查了根的判别式：一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根与$\Delta=b^2-4ac$有如下关系：当$\Delta>0$时，方程有两个不相等的实数根；当$\Delta=0$时，方程有两个相等的实数根；当$\Delta<0$时，方程无实数根．也考查了因式分解法解一元二次方程.

（1）利用因式分解法解方程可对解法一进行判断；根据根的判别式的计算可判断解法二进行判断；

（2）利用因式分解法把方程转化为$x-3=0$或$x+1=0$，然后解两个一次方程.

【详解】（1）两位同学的解题过程都不正确.

（2）$x^2-2x-3=0$，

$(x-3)(x+1)=0$，

$x-3=0$或$x+1=0$，

所以$x_1=3$，$x_2=-1$.

**【变式 3-2】**（23-24 八年级下·浙江·期中）甲、乙两位同学解方程$2(x-2)=(x-2)^2$的过程如下框：

| 甲：$2(x-2)=(x-2)^2$ | 乙： |
| --- | --- |
| 两边同除以$(x-2)$得： | 移项得$2(x-2)-(x-2)^2=0$ |
| $2=x-2$ | 提公因式$(x-2)(2-x-2)=0$ |
| 则$x=4$ | 则$x-2=0$或$2-x-2=0$ |
| （　） | $\therefore x_1=2,x_2=0$ |
| | （　） |

你认为他们的解法是否正确？若正确请在括号内打“√”，若错误打“×”，并写出你的解答过程.

【答案】×；×，见解析

【分析】本题考查因式分解法解一元二次方程，掌握因式分解的技巧准确计算是解题关键.

根据因式分解法解一元二次方程.

【详解】解：根据题意得：

| | |
|---|---|
| 甲：$2(x-2)=(x-2)^2$<br>两边同除以$(x-2)$得：<br>$2=x-2$<br>则$x=4$<br>（×） | 乙：<br>移项得$2(x-2)-(x-2)^2=0$<br>提公因式$(x-2)(2-x-2)=0$<br>则$x-2=0$或$2-x-2=0$<br>$\therefore x_1=2,x_2=0$<br>（×） |

解：$2(x-2)-(x-2)^2=0$

$(x-2)(2-x+2)=0$

$x_1=2$或$x_2=4$.

**【变式 3-3】**（23-24 八年级下·广西百色·期中）小涵与小彤两位同学解方程$3x(x-6)=(x-6)^2$的过程如下：

| |
|---|
| 小涵的解题过程：<br>第 1 步：两边同时除以$(x-6)$得$3x=x-6$，<br>第 2 步：移项，得$3x=x-6$，<br>第 3 步：解得$x=-2$. |
| 小彤的解题过程：<br>第 1 步：移项，得$3x(x-6)-(x-6)^2=0$，<br>第 2 步：提取公因式，得$(x-6)(3x-x-6)=0$.<br>第 3 步：则$x-6=0$或$3x-x-6=0$，<br>第 4 步：解得$x_1=6$，$x_2=2$. |

(1)小涵和小彤的解法都不正确，小涵第一次出错在第_____步，小彤第一次出错在第_____步；

(2)请你给出正确的解法，并结合你的经验提出一条解题注意事项.

【答案】(1)1，2

(2)正确的解法见解析，$x_1=6$，$x_2=-3$．注意事项：移项时要注意改变符号，或(除数不能为 0)

【分析】本题考查了解一元二次方程，能把一元二次方程转化成一元一次方程是解此题的关键.

（1）根据等式的性质和因式分解法则即可得出答案；

（2）利用因式分解法解答即可.

【详解】（1）解：小涵的解法中，因为$(x-6)$可能为 0，

所以不能两边同时除以$(x-6)$，即第一次出错错在第 1 步；

小彤的解法中，第 1 步移项没错，

第 2 步提取公因式后有一项忘记变号，即第一次出错错在第 2 步；

故答案为：1；2；

（2）解：正确的解法是：$3x(x-6)=(x-6)^2$，

移项，得$3x(x-6)-(x-6)^2=0$，

提取公因式，得$(x-6)(3x-x+6)=0$，

则$x-6=0$或$3x-x+6=0$，

解得$x_1=6$，$x_2=-3$，

注意事项：在利用因式分解法解一元二次方程时，注意把方程一边的多项式正确因式分解.

## 考点四：用因式分解法解一元二次方程与几何的结合的问题

例 4.（2024·山东济宁·一模）三角形两边长分别为 3 和 6，第三边长是方程$x^2-6x+8=0$的解，则这个三角形的周长是（　）

A．1　　B．11 和 13　　C．11 或 8　　D．13

【答案】D

【分析】本题考查一元二次方程的解法，三角形三边的关系，先解方程求出方程的解，然后利用三角形的三边关系判断解得情况，并计算三角形的周长即可.

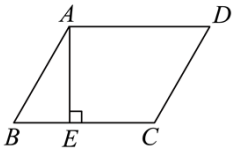
【详解】解方程$x^2-6x+8=0$得$x=2$或$x=4$，

当$x=2$时，$2+3<6$，不能构成三角形；

当$x=4$时，这个三角形的周长是$3+4+6=13$，

故选 D.

**【变式 4-1】**（23-24 八年级下·安徽阜阳·阶段练习）如图，在▱$ABCD$中，$AE\perp BC$于点$E$，$BE=a$，$AE=CE=2a$，且$a$是一元二次方程$x^2+3x-4=0$的根，则▱$ABCD$的周长为（　）




A．$6+2\sqrt{5}$　　B．$8+\sqrt{5}$　　C．10　　D．$4+4\sqrt{5}$

【答案】A

【分析】本题考查了平行四边形的性质，勾股定理，以及用因式分解法解一元二次方程，是基础知识要熟练掌握．先解方程求得$a$，再根据勾股定理求得$AB$，从而计算出▱$ABCD$的周长即可.

【详解】解：∵$a$是一元二次方程$x^2+3x-4=0$的根，

$\therefore a^2+3a-4=0$，

即$(a-1)(a+4)=0$，

解得，$a=1$或$a=-4$（不合题意，舍去）．

$\therefore BE=1$，$AE=CE=2$，

在Rt△$ABE$中，$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore BC=EB+EC=3$，

$\therefore$Y$ABCD$的周长$=2(AB+BC)=2(\sqrt{5}+3)=6+2\sqrt{5}$．

故选：A．

**【变式 4-2】**（23-24 八年级下·安徽安庆·期中）直角三角形两边长为方程$x^2-16x+60=0$的解，第三边是方程$x^2-15x+56=0$的解，则这个直角三角形的周长是（　　）

A．23或24　　B．23　　C．24　　D．24或25

【答案】C

【分析】本题考查了解一元二次方程，勾股定理的逆定理，先解方程，勾股定理的逆定理得出第三边为8，即可求解．

【详解】解：$x^2-16x+60=0$

$\therefore(x-6)(x-10)=0$

解得：$x_1=6,x_2=10$

由$x^2-15x+56=0$

$\therefore(x-7)(x-8)=0$，

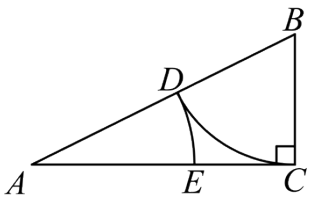
解得：$x=7$或$x=8$

依题意，这个直角三角形的三边分别为$6,10,8$，

∴这个直角三角形的周长为$6+10+8=24$，

故选：C．

**【变式 4-3】**（23-24 八年级下·浙江杭州·阶段练习）如图，在V$ABC$中，$\angle ACB=90°$，以点$B$为圆心，$BC$的长为半径画弧，交线段$AB$于点$D$，以点$A$为圆心，$AD$长为半径画弧，交线段$AC$于点$E$，连接$CD$．设$BC=3$，$AC=4$，则方程$x^2+6x-16=0$的一个根是线段（　）的长度




A．$AD$或$AE$或$CE$　　B．$BD$或$BC$　　C．$CE$　　D．$AC$

【答案】A

【分析】本题考查的是一元二次方程的解法，勾股定理的应用，先求解$AD=AE=2=CE$，再解方程$x^2+6x-16=0$，从而可得答案．

【详解】解：$\because BC=3$，$AC=4$，$\angle ACB=90°$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/676133200024010201