

新疆石河子一中 2023-2024 学年高三上数学期末学业水平测试模拟试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. “中国剩余定理”又称“孙子定理”，最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第二十六题，叫做“物不知数”，原文如下：今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二.问物几何？现有这样一个相关的问题：将 1 到 2020 这 2020 个自然数中被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的数按照从小到大的顺序排成一列，构成一个数列，则该数列各项之和为（ ）

- A. 56383 B. 57171 C. 59189 D. 61242

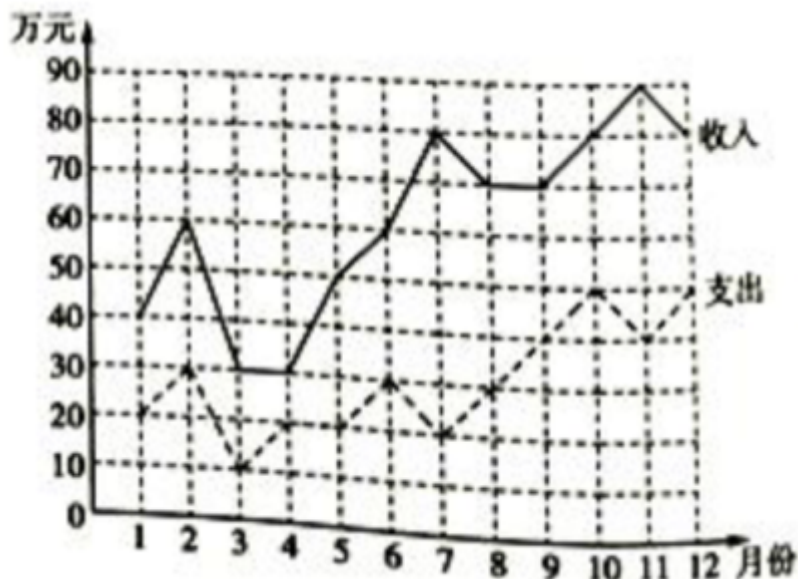
2. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点为 F ，点 A, B 是 C 的一条渐近线上关于原点对称的两点，以 AB 为直径的圆过 F 且交 C 的左支于 M, N 两点，若 $|MN|=2$ ， $\triangle ABF$ 的面积为 8，则 C 的渐近线方程为（ ）

- A. $y = \pm\sqrt{3}x$ B. $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$
C. $y = \pm 2x$ D. $y = \pm\frac{1}{2}x$

3. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $(2a-b)\cos C = c\cos B$ ，则内角 $C =$ （ ）

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

4. 已知某超市 2018 年 12 个月的收入与支出数据的折线图如图所示：



根据该折线图可知，下列说法错误的是（ ）

- A. 该超市 2018 年的 12 个月中的 7 月份的收益最高
- B. 该超市 2018 年的 12 个月中的 4 月份的收益最低
- C. 该超市 2018 年 1-6 月份的总收益低于 2018 年 7-12 月份的总收益
- D. 该超市 2018 年 7-12 月份的总收益比 2018 年 1-6 月份的总收益增长了 90 万元

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E , F , G 分别为棱 A_1D_1 , D_1D , A_1B_1 的中点, 给出下列命题 ① $AC_1 \perp EG$;

② $GC \parallel ED$; ③ $B_1F \perp$ 平面 BGC_1 ; ④ EF 和 BB_1 成角为 $\frac{\pi}{4}$. 正确命题的个数是（ ）

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

6. 已知向量 $\vec{AB} = (3, 2)$, $\vec{AC} = (5, -1)$, 则向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{BC}$ 的夹角为（ ）

- A. 45°
- B. 60°
- C. 90°
- D. 120°

7. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则“ $a_1 + a_3 < 2a_2$ ”是“ $S_{2n-1} < 0$ ”的（ ）

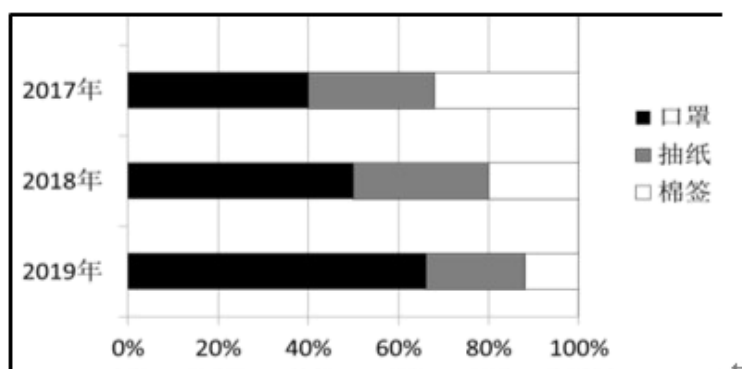
- A. 充分不必要
- B. 必要不充分
- C. 充要
- D. 既不充分也不必要

8. 《周易》是我国古代典籍, 用“卦”描述了天地世间万象变化. 如图是一个八卦图, 包含乾、坤、震、巽、坎、离、艮、兑八卦 (每一卦由三个爻组成, 其中“——”表示一个阳爻, “- - -”表示一个阴爻). 若从含有两个及以上阳爻的卦中任取两卦, 这两卦的六个爻中都恰有两个阳爻的概率为（ ）



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

9. 某工厂只生产口罩、抽纸和棉签，如图是该工厂2017年至2019年各产量的百分比堆积图（例如：2017年该工厂口罩、抽纸、棉签产量分别占40%、27%、33%），根据该图，以下结论一定正确的是（ ）



- A. 2019年该工厂的棉签产量最少
 B. 这三年中每年抽纸的产量相差不明显
 C. 三年累计下来产量最多的是口罩
 D. 口罩的产量逐年增加

10. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数和偶函数，且 $f(x) + g(x) = (x+1)^2 - 2^{x+1}$ ，则 $f(1) - g(1) =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 3

11. 已知直线 $y = x - 2a^2$ 是曲线 $y = \ln x - a$ 的切线，则 $a =$ ()

- A. -2 或 1 B. -1 或 2 C. -1 或 $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$ 或 1

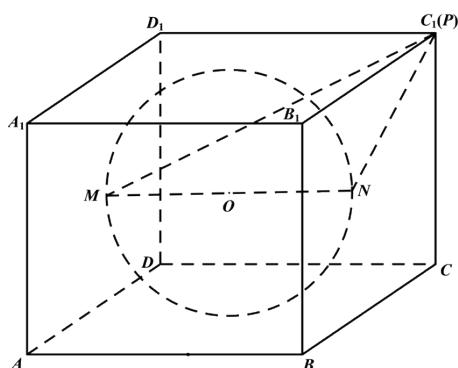
12. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，则目标函数 $z = 2x + y$ 的最大值是 ()

- A. 7 B. 5 C. 3 D. 2

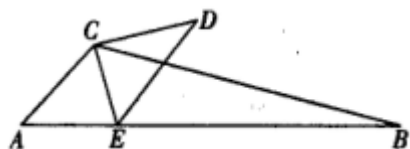
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2， MN 是它的内切球的一条弦(我们把球面上任意两点之间的线段称为球的弦)，

P 为正方体表面上的动点, 当弦 MN 的长度最大时, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的取值范围是_____.



14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 2$, $AB = \sqrt{6}$, $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, 点 E 在边 AB 上, 且 $\angle ACE = \angle BCE$, 将射线 CB 绕着 C 逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$, 并在所得射线上取一点 D , 使得 $CD = \sqrt{3} - 1$, 连接 DE , 则 $\triangle CDE$ 的面积为_____.

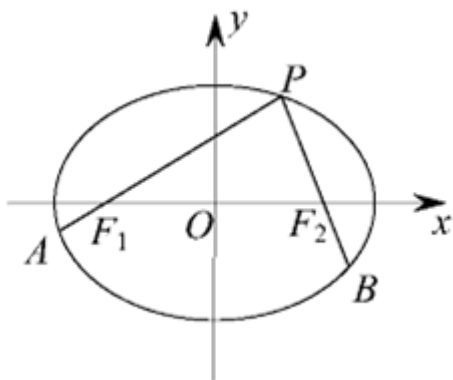


15. 已知 $t > 0$, 记 $f(t) = \int_0^t (1 - C_8^1 2x + C_8^2 4x^2 - C_8^3 8x^3 + \dots - C_8^7 128x^7 + C_8^8 256x^8) dx$, 则 $f(t)$ 的展开式中各项系数和为_____.

16. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (-1, k)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率是 e , 动点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 C 上运动, 当 $PF_2 \perp x$ 轴时, $x_0 = 1, y_0 = e$.



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 延长 PF_1, PF_2 分别交椭圆于点 A, B (A, B 不重合). 设 $\overrightarrow{AF_1} = \lambda \overrightarrow{F_1P}, \overrightarrow{BF_2} = \mu \overrightarrow{F_2P}$, 求 $\lambda + \mu$ 的最小值.

18. (12分) 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \cos^2 \theta = 4 \sin \theta$.

系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \cos^2 \theta = 4 \sin \theta$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 过原点且倾斜角为 α ($\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{3}$) 的射线 l 与曲线 C_1 , C_2 分别交于 A, B 两点 (异于原点), 求 $|OA| \cdot |OB|$ 的取值范围.

19. (12分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2 , 右顶点为 A , 且 $|AF_1| = 3$, 短轴长为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

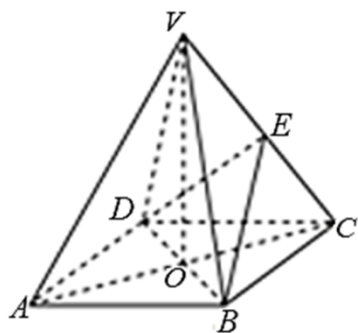
(2) 若过点 A 作垂直 x 轴的直线 l , 点 T 为直线 l 上纵坐标不为零的任意一点, 过 F_2 作 TF_2 的垂线交椭圆 E 于点 P 和 Q , 当 $\frac{|TF_2|}{|PQ|} = \frac{7\sqrt{2}}{24}$ 时, 求此时四边形 TPF_1Q 的面积.

20. (12分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 已知 $a \cos B = (4c - b) \cos A$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 若 $b = 4$, 点 M 是线段 BC 的中点, $|\vec{AM}| = \sqrt{10}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

21. (12分) 如图, 四棱锥 $V-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , $VO \perp$ 平面 $ABCD$, E 是棱 VC 的中点.



(1) 求证: $VO \parallel$ 平面 BDE ;

(2) 求证: 平面 $VAC \perp$ 平面 BDE .

22. (10分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sin \theta - 3 \cos \theta - 2 \\ y = \cos \theta + 3 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 坐标原点为极点, x

轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -2$.

(1) 求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2) 若曲线 C_1 、 C_2 交于 A 、 B 两点， D 是曲线 C_1 上的动点，求 $\triangle ABD$ 面积的最大值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

根据“被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的正整数”，可得这些数构成等差数列，然后根据等差数列的前 n 项和公式，可得结果.

【详解】

被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的正整数构成首项为 23，

公差为 $5 \times 7 = 35$ 的等差数列，记数列 $\{a_n\}$

则 $a_n = 23 + 35(n-1) = 35n - 12$

令 $a_n = 35n - 12 \leq 2020$ ，解得 $n \leq 58\frac{2}{35}$.

故该数列各项之和为 $58 \times 23 + \frac{58 \times 57}{2} \times 35 = 59189$.

故选：C.

【点睛】

本题考查等差数列的应用，属基础题。

2、B

【解析】

由双曲线的对称性可得 $S_{\triangle ABF} = S_{\triangle AFF'}$ ，即 $bc = 8$ ，又 $|MN| = \frac{2b^2}{c} = 2$ ，从而可得 C 的渐近线方程.

【详解】

设双曲线的另一个焦点为 F' ，由双曲线的对称性，四边形 $AFBF'$ 是矩形，所以 $S_{\triangle ABF} = S_{\triangle AFF'}$ ，即 $bc = 8$ ，由

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 得: } y = \pm \frac{b^2}{c}, \text{ 所以 } |MN| = \frac{2b^2}{c} = 2, \text{ 所以 } b^2 = c, \text{ 所以 } b = 2, c = 4, \text{ 所以 } a = 2\sqrt{3}, C \text{ 的渐近}$$

$$\text{线方程为 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

故选 B

【点睛】

本题考查双曲线的简单几何性质，考查直线与圆的位置关系，考查数形结合思想与计算能力，属于中档题.

3、C

【解析】

由正弦定理化边为角，由三角函数恒等变换可得.

【详解】

$$\because (2a - b)\cos C = c\cos B, \text{ 由正弦定理可得 } (2\sin A - \sin B)\cos C = \sin C\cos B,$$

$$\therefore 2\sin A\cos C = \sin B\cos C + \sin C\cos B = \sin(B + C) = \sin A,$$

$$\text{三角形中 } \sin A \neq 0, \therefore \cos C = \frac{1}{2}, \therefore C = \frac{\pi}{3}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查正弦定理，考查两角和的正弦公式和诱导公式，掌握正弦定理的边角互化是解题关键.

4、D

【解析】

用收入减去支出，求得每月收益，然后对选项逐一分析，由此判断出说法错误的选项.

【详解】

用收入减去支出，求得每月收益（万元），如下表所示：

月 份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
收 益	20	30	20	10	30	30	60	40	30	30	50	30

所以7月收益最高，A选项说法正确 4月收益最低，B选项说法正确 1－6月总收益140万元，7－12月总收益240万元，所以前6个月收益低于后六个月收益，C选项说法正确，后6个月收益比前6个月收益增长240－140＝100

6、C

【解析】

求出 $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = (2, -3)$ ，进而可求 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 3 \times 2 + 2 \times (-3) = 0$ ，即能求出向量夹角。

【详解】

解：由题意知， $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = (2, -3)$ 。则 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 3 \times 2 + 2 \times (-3) = 0$

所以 $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ ，则向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{BC}$ 的夹角为 90° 。

故选：C。

【点睛】

本题考查了向量的坐标运算，考查了数量积的坐标表示。求向量夹角时，通常代入公式 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ 进行计算。

7、A

【解析】

首先根据等比数列分别求出满足 $a_1 + a_3 < 2a_2$ ， $S_{2n-1} < 0$ 的基本量，根据基本量的范围即可确定答案。

【详解】

$\{a_n\}$ 为等比数列，

若 $a_1 + a_3 < 2a_2$ 成立，有 $a_1(q^2 - 2q + 1) < 0$ ，

因为 $q^2 - 2q + 1 \geq 0$ 恒成立，

故可以推出 $a_1 < 0$ 且 $q \neq 1$ ，

若 $S_{2n-1} < 0$ 成立，

当 $q = 1$ 时，有 $a_1 < 0$ ，

当 $q \neq 1$ 时，有 $\frac{a_1(1 - q^{2n-1})}{1 - q} < 0$ ，因为 $\frac{1 - q^{2n-1}}{1 - q} > 0$ 恒成立，所以有 $a_1 < 0$ ，

故可以推出 $a_1 < 0$ ， $q \in \mathbf{R}$ ，

所以“ $a_1 + a_3 < 2a_2$ ”是“ $S_{2n-1} < 0$ ”的充分不必要条件。

故选：A。

【点睛】

本题主要考查了等比数列基本量的求解，充分必要条件的集合关系，属于基础题。

8、B

【解析】

基本事件总数为6个，都恰有两个阳爻包含的基本事件个数为3个，由此求出概率.

【详解】

解：由图可知，含有两个及以上阳爻的卦有巽、离、兑、乾四卦，

取出两卦的基本事件有（巽，离），（巽，兑），（巽，乾），（离，兑），（离，乾），（兑，乾）共6个，其中符合条件的基本事件有（巽，离），（巽，兑），（离，兑）共3个，

所以，所求的概率 $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

故选：B.

【点睛】

本题渗透传统文化，考查概率、计数原理等基本知识，考查抽象概括能力和应用意识，属于基础题.

9、C

【解析】

根据该厂每年产量未知可判断 A、B、D 选项的正误，根据每年口罩在该厂的产量中所占的比重最大可判断 C 选项的正误.综合可得出结论.

【详解】

由于该工厂 2017 年至 2019 年的产量未知，所以，从 2017 年至 2019 年棉签产量、抽纸产量以及口罩产量的变化无法比较，故 A、B、D 选项错误；

由堆积图可知，从 2017 年至 2019 年，该工厂生产的口罩占该工厂的总产量的比重是最大的，则三年累计下来产量最多的是口罩，C 选项正确.

故选：C.

【点睛】

本题考查堆积图的应用，考查数据处理能力，属于基础题.

10、C

【解析】

先根据奇偶性，求出 $f(x) - g(x)$ 的解析式，令 $x = 1$ ，即可求出.

【详解】

因为 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数和偶函数， $f(x) + g(x) = (x+1)^2 - 2^{x+1}$ ，用 $-x$ 替换 x ，得

$$f(-x) + g(-x) = (-x+1)^2 - 2^{-x+1} ,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/676134053011010105>