# 2023-2024学年福建省莆田市仙游县郊尾中学高三下学期第二次阶段性考试数学试题试卷

考生须知：
1．全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用2B铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2．请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

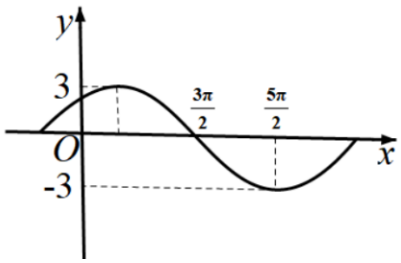
1．若复数$z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，其中i为虚数单位，则下列结论正确的是（　）

A．$z$的虚部为$-i$　　B．$|z|=2$　　C．$z$的共轭复数为$-1-i$　　D．$z^2$为纯虚数

2．在满足$0<x_i<y_i\le 4$，$x_i^{y_i}=y_i^{x_i}$的实数对$(x_i,y_i)\ (i=1,2,\cdots,n,\cdots)$中，使得$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}<3x_n$成立的正整数$n$的最大值为(　　)

A．5　　B．6　　C．7　　D．9

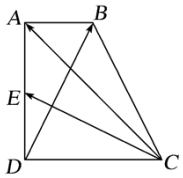
3．函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的图象如图，则此函数表达式为（　　）




A．$f(x)=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　B．$f(x)=3\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

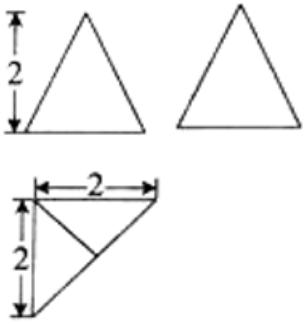
C．$f(x)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　D．$f(x)=3\sin\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

4．如图，在直角梯形*ABCD*中，*AB*∥*DC*，*AD*⊥*DC*，*AD*＝*DC*＝2*AB*，*E*为*AD*的中点，若$\overrightarrow{CA}=\lambda\overrightarrow{CE}+\mu\overrightarrow{DB}(\lambda,\mu\in R)$，则λ＋μ的值为（　　）




A．$\dfrac{6}{5}$　　B．$\dfrac{8}{5}$　　C．$2$　　D．$\dfrac{8}{3}$

5．已知底面是等腰直角三角形的三棱锥*P-ABC*的三视图如图所示，俯视图中的两个小三角形全等，则（　　）




A．*PA*，*PB*，*PC* 两两垂直　　B．三棱锥 *P-ABC* 的体积为 $\frac{8}{3}$

C．$|PA|=|PB|=|PC|=\sqrt{6}$　　D．三棱锥 *P-ABC* 的侧面积为 $3\sqrt{5}$

6．已知点 *P* 在椭圆 *τ*：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，点 *P* 在第一象限，点 *P* 关于原点 *O* 的对称点为 *A*，点 *P* 关于 *x* 轴的对称点为 *Q*，设 $\overrightarrow{PD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$，直线 *AD* 与椭圆 *τ* 的另一个交点为 *B*，若 *PA*⊥*PB*，则椭圆 *τ* 的离心率 *e*=（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

7．我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果，哥德巴赫猜想的内容是：每个大于 2 的偶数都可以表示为两个素数的和，例如：$4=2+2$，$6=3+3$，$8=3+5$，那么在不超过 18 的素数中随机选取两个不同的数，其和等于 16 的概率为（　　）

A．$\frac{1}{21}$　　B．$\frac{2}{21}$　　C．$\frac{1}{15}$　　D．$\frac{2}{15}$

8．函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 $A$，集合 $B=\left\{x\middle|\log_2(x+1)>1\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\left\{x\middle|1<x\le 2\right\}$　　B．$\left\{x\middle|-2\le x\le 2\right\}$　　C．$\left\{x\middle|-2<x<3\right\}$　　D．$\left\{x\middle|1<x<3\right\}$

9．在$\triangle ABC$ 中，内角 *A*，*B*，*C* 所对的边分别为 *a*，*b*，*c*，且 $a\cos B+b\sin A=c$.若 $a=2$，$\triangle ABC$ 的面积为 $3(\sqrt{2}-1)$，则 $b+c=$（　　）

A．5　　B．$2\sqrt{2}$　　C．4　　D．16

10．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 *n* 项和为 $S_n$，$a_2=2,S_6=21$，则 $a_5=$

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

11．设正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，且满足 $S_6-2S_3=2$，则 $\frac{3a_8^{\,2}}{a_2}$ 的最小值为

A．8　　B．16　　C．24　　D．36

12．已知 $\overrightarrow{AB}=(2,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,\lambda)$，若 $\cos\angle BAC=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则实数 $\lambda$ 的值是（　　）

A．-1　　B．7　　C．1　　D．1 或 7

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．高三（1）班共有 56 人，学号依次为 1，2，3，…，56，现用系统抽样的办法抽取一个容量为 4 的样本，已知学号为 6，34，48 的同学在样本中，那么还有一个同学的学号应为_____.

14．已知一组数据 1.6，1.8，2，2.2，2.4，则该组数据的方差是_____.

15．根据如图所示的伪代码，若输出的 $y$ 的值为 $\frac{1}{2}$，则输入的 $x$ 的值为_____.

```
Read x
If x≤ 0 Then
  y←x^2-1
Else
  y←2^x
End If
Print y
```

16．若 $(x^2-2x-3)^n$ 的展开式中所有项的系数之和为 $256$，则 $n=$_____，含 $x^2$ 项的系数是_____（用数字作答）.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=5$，$a_{n+1}+2=2a_n$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=n(2a_n-4)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$.

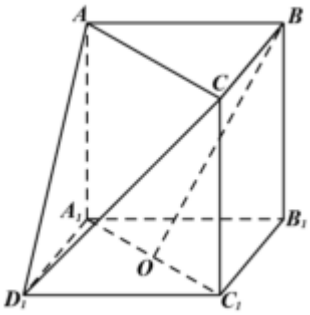
18．（12 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}m(x^2-1)-\ln x(m\in\mathbf{R})$.

（1）若 $m=1$，求证：$f(x)\geq 0$.

（2）讨论函数 $f(x)$ 的极值；

（3）是否存在实数 $m$，使得不等式 $f(x)>\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x-1}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立？若存在，求出 $m$ 的最小值；若不存在，请说明理由.

19．（12 分）将棱长为 $2$ 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $D_1-ACD$ 后得到如图所示几何体，$O$ 为 $A_1C_1$ 的中点.




（1）求证：$OB//$平面$ACD_1$；

（2）求二面角$C-AD_1-C_1$的正弦值.

20.（12分）2018年反映社会现实的电影《我不是药神》引起了很大的轰动，治疗特种病的创新药研发成了当务之急．为此，某药企加大了研发投入，市场上治疗一类慢性病的特效药品$A$的研发费用$x$（百万元）和销量$y$（万盒）的统计数据如下：

| 研发费用$x$（百万元） | 2 | 3 | 6 | 10 | 13 | 15 | 18 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 销量$y$（万盒） | 1 | 1 | 2 | 2.5 | 3.5 | 3.5 | 4.5 | 6 |

（1）求$y$与$x$的相关系数$r$精确到0.01，并判断$y$与$x$的关系是否可用线性回归方程模型拟合？（规定：$|r|\geq 0.75$时，可用线性回归方程模型拟合）；

（2）该药企准备生产药品$A$的三类不同的剂型$A_1$，$A_2$，$A_3$，并对其进行两次检测，当第一次检测合格后，才能进行第二次检测．第一次检测时，三类剂型$A_1$，$A_2$，$A_3$合格的概率分别为$\frac{1}{2}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{3}{5}$，第二次检测时，三类剂型$A_1$，$A_2$，$A_3$合格的概率分别为$\frac{4}{5}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$．两次检测过程相互独立，设经过两次检测后$A_1$，$A_2$，$A_3$三类剂型合格的种类数为$X$，求$X$的数学期望.

附：（1）相关系数$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2\right)}}$

（2）$\sum_{i=1}^{8}x_iy_i=347$，$\sum_{i=1}^{8}x_i^2=1308$，$\sum_{i=1}^{8}y_i^2=93$，$\sqrt{1785}\approx 42.25$.

21.（12分）已知$f(x)=x^2+2|x-1|$.

（1）解关于$x$的不等式：$f(x)>\dfrac{|2x|}{x}$；

（2）若 $f(x)$ 的最小值为 $M$，且 $a+b+c=M\left(a,b,c\in R^{+}\right)$，求证：$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{a^2+c^2}{b}+\frac{c^2+b^2}{a}\geq 2$.

22.（10 分）2019 年底，北京 2022 年冬奥组委会启动志愿者全球招募，仅一个月内报名人数便突破 60 万，其中青年学生约有 50 万人.现从这 50 万青年学生志愿者中，按男女分层抽样随机选取 20 人进行英语水平测试，所得成绩(单位:分)统计结果用茎叶图记录如下:

| 男 | | | | 女 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 | 4 | 7 | | | | |
| | | 3 | 5 | 7 | 9 | | | |
| 0 | 3 | 8 | 6 | 5 | 6 | | | |
| | 1 | 4 | 7 | 1 | 3 | 5 | 6 | 8 |
| | | 5 | 8 | 1 | 8 | | | |

(Ⅰ)试估计在这 50 万青年学生志愿者中，英语测试成绩在 80 分以上的女生人数;

(Ⅱ)从选出的 8 名男生中随机抽取 2 人，记其中测试成绩在 70 分以上的人数为 X，求 $X$ 的分布列和数学期望;

(Ⅲ)为便于联络，现将所有的青年学生志愿者随机分成若干组(每组人数不少于 5000)，并在每组中随机选取 $m$ 个人作为联络员，要求每组的联络员中至少有 1 人的英语测试成绩在 70 分以上的概率大于 90%.根据图表中数据，以频率作为概率，给出 $m$ 的最小值.(结论不要求证明)

# 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

将复数 $z$ 整理为 $1-i$ 的形式，分别判断四个选项即可得到结果.

【详解】

$$z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$$

$z$ 的虚部为 $-1$，$A$ 错误；$|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，$B$ 错误；$\overline{z}=1+i$，$C$ 错误；

$z^2=(1-i)^2=-2i$，为纯虚数，$D$ 正确

本题正确选项：$D$

【点睛】

本题考查复数的模长、实部与虚部、共轭复数、复数的分类的知识，属于基础题.

2、A

【解析】

由题可知：$0<x_i<y_i\le 4$，且 $x_i^{y_i}=y_i^{x_i}$ 可得 $\frac{\ln x_i}{x_i}=\frac{\ln y_i}{y_i}$，构造函数 $h(t)=\frac{\ln t}{t}(0<t\le 4)$ 求导，通过导函数求出 $h(t)$

的单调性，结合图像得出 $t_{\min}=2$，即 $2\le x_i<e$ 得出 $3x_n<3e$，

从而得出 $n$ 的最大值.

【详解】

因为 $0<x_i<y_i\le 4$，$x_i^{y_i}=y_i^{x_i}$

则 $\ln x_i^{yi}=\ln y_i^{xi}$，即 $y_i\ln x_i=x_i\ln y_i$

整理得 $\frac{\ln x_i}{x_i}=\frac{\ln y_i}{y_i}$，令 $t=x_i=y_i$，

设 $h(t)=\frac{\ln t}{t}(0<t\le 4)$，

则 $h'(t)=\frac{\frac{1}{t}\cdot t-1\cdot\ln t}{t^2}=\frac{1-\ln t}{t^2}$，

令 $h'(t)>0$,则 $0<t<e$，令 $h'(t)<0$，则 $e<t\le 4$，

故 $h(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,4)$ 上单调递减，则 $h(e)=\frac{1}{e}$，

因为 $x_i<y_i$，$h(x_i)=h(y_i)$，

由题可知：$h(t)=\frac{1}{4}\ln 4$ 时，则 $t_{\min}=2$，所以 $2\le t<e$，

所以 $2\le x_i<e<y_i\le 4$，

当 $x_n$ 无限接近 $e$ 时，满足条件，所以 $2\le x_n<e$，

所以要使得 $x_1+x_2+\text{L}\ +x_{n-1}<3x_n<3e\approx 8.154$

故当 $x_1=x_2=x_3=x_4=2$ 时，可有 $x_1+x_2+x_3+x_4=8<8.154$，

故$n-1\le 4$，即$n\le 5$，

所以：$n$最大值为5.

故选：A.

【点睛】

本题主要考查利用导数求函数单调性、极值和最值，以及运用构造函数法和放缩法，同时考查转化思想和解题能力.

3、B

【解析】

由图象的顶点坐标求出$A$，由周期求出$\omega$，通过图象经过点$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$，求出$\varphi$，从而得出函数解析式.

【详解】

解：由图象知$A=3$，$T=4\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)=4\pi$，则$\omega=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$，

图中的点$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$应对应正弦曲线中的点$(\pi,0)$，

所以$\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{2}+\varphi=\pi$，解得$\varphi=\frac{\pi}{4}$，

故函数表达式为$f\left(x\right)=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查三角函数图象及性质，三角函数的解析式等基础知识；考查考生的化归与转化思想，数形结合思想，属于基础题.

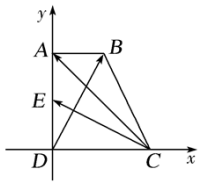
4、B

【解析】

建立平面直角坐标系，用坐标表示$\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE},\overrightarrow{DB}$，利用$\overrightarrow{CA}=\lambda\overrightarrow{CE}+\mu\overrightarrow{DB}(\lambda,\mu\in R)$，列出方程组求解即可.

【详解】

建立如图所示的平面直角坐标系，则 *D*(0，0).



不妨设 $AB=1$，则 $CD=AD=2$，所以 $C(2,0)$，$A(0,2)$，$B(1,2)$，$E(0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{CA}=(-2,2),\overrightarrow{CE}=(-2,1),\overrightarrow{DB}=(1,2)$

$\because \overrightarrow{CA}=\lambda\overrightarrow{CE}+\mu\overrightarrow{DB}$

$\therefore(-2,2)=\lambda(-2,1)+\mu(1,2)$，

$\therefore \begin{cases}-2\lambda+\mu=-2\\ \lambda+2\mu=2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{6}{5}\\ \mu=\dfrac{2}{5}\end{cases}$ 则 $\lambda+\mu=\dfrac{8}{5}$.

故选：B

【点睛】

本题主要考查了由平面向量线性运算的结果求参数，属于中档题.

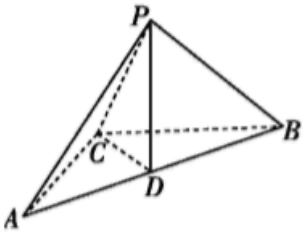
5、C

【解析】

根据三视图，可得三棱锥 $P$-$ABC$ 的直观图，然后再计算可得.

【详解】

解：根据三视图，可得三棱锥 $P$-$ABC$ 的直观图如图所示，




其中 $D$ 为 $AB$ 的中点，$PD\perp$ 底面 $ABC$.

所以三棱锥 $P$-$ABC$ 的体积为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times2=\dfrac{4}{3}$，

$\therefore|AC|=|BC|=|PD|=2$，$\therefore|AB|=\sqrt{|AC|^2+|BC|^2}=2\sqrt{2}$，$\therefore|DA|=|DB|=|DC|=\sqrt{2}$，

$\therefore|PA|=|PB|=|PC|=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6},$

$\because|PA|^2+|PB|^2\neq|AB|^2$，$\therefore PA$、$PB$ 不可能垂直，

即 $PA, PB, PC$ 不可能两两垂直，

$\because S_{\Delta PBA}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2=2\sqrt{2}$，$\because S_{\Delta PBC}=S_{\Delta PAC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-1^2}\times2=\sqrt{5}$.

$\therefore$ 三棱锥 $P$-$ABC$ 的侧面积为 $2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$.

故正确的为 C.

故选：C.

【点睛】

本题考查三视图还原直观图，以及三棱锥的表面积、体积的计算问题，属于中档题.

6、C

【解析】

设 $P(x_1,y_1)$，则 $A(-x_1,-y_1)$，$Q(x_1,-y_1)$，$D\left(x_1,-\frac{y_1}{2}\right)$，设 $B(x_2,y_2)$，根据 $PA\perp PB$ 化简得到 $3a^2=4c^2$，得到答案.

【详解】

设 $P(x_1,y_1)$，则 $A(-x_1,-y_1)$，$Q(x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{PD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$，则 $D\left(x_1,-\frac{y_1}{2}\right)$，设 $B(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，两式相减得到：$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}=-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}$，

$k_{PB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，$k_{AD}=k_{AB}$，即 $\frac{y_1}{4x_1}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$，$k_{PA}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{4(y_1+y_2)}{x_1+x_2}$，

$PA\perp PB$，故 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$，即 $-4\frac{b^2}{a^2}=-1$，故 $3a^2=4c^2$，故 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：$C$.

【点睛】

本题考查了椭圆的离心率，意在考查学生的计算能力和转化能力.

7、B

【解析】

先求出从不超过 18 的素数中随机选取两个不同的数的所有可能结果，然后再求出其和等于 16 的结果，根据等可能事件的概率公式可求.

【详解】

解：不超过 18 的素数有 2，3，5，7，11，13，17 共 7 个，从中随机选取两个不同的数共有 $C_7^2=21$，

其和等于 16 的结果 $(3,13)$，$(5,11)$ 共 2 种等可能的结果，

故概率 $P=\frac{2}{21}$.

故选：*B*.

【点睛】

古典概型要求能够列举出所有事件和发生事件的个数，本题不可以列举出所有事件但可以用分步计数得到，属于基础题.

8、A

【解析】

根据函数定义域得集合 $A$，解对数不等式得到集合 $B$，然后直接利用交集运算求解.

【详解】

解：由函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 得 $4-x^2\geq 0$，解得 $-2\leq x\leq 2$，即 $A=\{x|-2\leq x\leq 2\}$；

又 $\log_2(x+1)>1=\log_2 2$，解得 $x>1$，即 $B=\{x|x>1\}$，

则 $A\cap B=\{x|1<x\leq 2\}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查了交集及其运算，考查了函数定义域的求法，是基础题.

9、C

【解析】

根据正弦定理边化角以及三角函数公式可得 $A=\frac{\pi}{4}$,再根据面积公式可求得 $bc=6(2-\sqrt{2})$,再代入余弦定理求解即可.

【详解】

$\triangle ABC$ 中,$a\cos B+b\sin A=c$,由正弦定理得 $\sin A\cos B+\sin B\sin A=\sin C$,

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,

$\therefore \sin B\sin A=\cos A\sin B$,又 $\sin B\neq 0$,$\therefore \sin A=\cos A$,$\therefore \tan A=1$,又 $A\in(0,\pi)$,

$\therefore A=\frac{\pi}{4}$.$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{2}}{4}bc=3(\sqrt{2}-1)$,

$\therefore bc=6(2-\sqrt{2})$,$\because a=2$,$\therefore$由余弦定理可得 $a^2=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A$,

$\therefore (b+c)^2=4+(2+\sqrt{2})bc=4+(2+\sqrt{2})\times 6(2-\sqrt{2})=16$,可得 $b+c=4$.

故选：C

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/677035045155006141