第四章　随机变量的数字特征

- 数学期望
- 方差
- ＊ 协方差与有关系数
- 大数定律与中心极限定理

数学期望的引例

Mathematical Expectation

例如：某7人的高数成绩为90，85，85，80，80，75，60，则他们的平均成绩为

$$\frac{90+85\times 2+80\times 2+75+60}{7}$$

$$=90\times\frac{1}{7}+85\times\frac{2}{7}+80\times\frac{2}{7}+75\times\frac{1}{7}+60\times\frac{1}{7}$$

$$\approx 79.3$$

以频率为权重的加权平均

数学期望E(X)

Mathematical Expectation

- 离散型随机变量

定义　设离散型随机变量的概率分布为

$$P(X = x_k) = p_k \qquad k = 1, 2, \cdots$$

若级数 $\sum_k p_k x_k$ 绝对收敛，则称此级数为随机变量X的数学期望，记作E（X），即

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots p_k x_k + \cdots = \sum_k p_k x_k$$

数学期望的计算

例 已知随机变量X的分布律：

X	4	5	6
P	1/4	1/2	1/4

求数学期望E（X）

解 $$E(X)=4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{4}=5$$

$$E(X)=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3$$

连续型随机变量的数学期望E(X)

◆连续型随机变量

定义 设连续型随机变量**X**的概率密度为 **f (x),** 则

若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则称此积分为 X的数学期望

即 $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

数学期望的计算

例　已知随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & |x|<1\\ 0 & |x|\geq 1\end{cases}$$

求数学期望。

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{-1} x\cdot 0\cdot dx+\int_{-1}^{1} x\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{1}^{+\infty} x\cdot 0\cdot dx$$

$$=0$$

数学期望的意义

E(X)反应了随机变量X取值的"概率平均",是X的可能值以其相应概率的加权平均。

试验次数较大时，X的观察值的算术平均值$\overline{x}$在E(X)附近摆动

$$\overline{x} \approx E(X)$$

数学期望又能够称为期望值(Expected Value)，均值(Mean)

二维随机变量的数学期望及边沿分布的数学期望

$$E(X,Y)=(E(X),E(Y))$$

(X, Y)为二维离散型随机变量

$$E(X)=\sum_i x_i P\{X=x_i\}=\sum_i x_i p_{i\cdot}=\sum_i\sum_j x_i p_{ij}$$

$$E(Y)=\sum_j y_j P\{Y=y_j\}=\sum_j y_j p_{\cdot j}=\sum_j\sum_i y_j p_{ij}$$

(X, Y)为二维连续型随机变量

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)dxdy,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x,y)dxdy.$$

例 设(X, Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy & x\in[0,1],\ y\in[1,3] \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求k

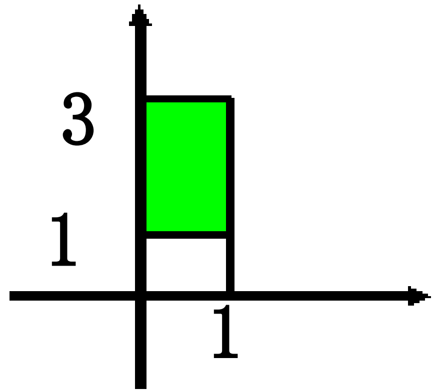
(2) 求X和Y的边沿密度

(3) 求E(X), E(Y).

解 (1)由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$

得 $k\int_1^3 ydy \cdot \int_0^1 xdx = k \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2k = 1$

所以 $k = \frac{1}{2}$



(2) $x \in [0,1]$ 时

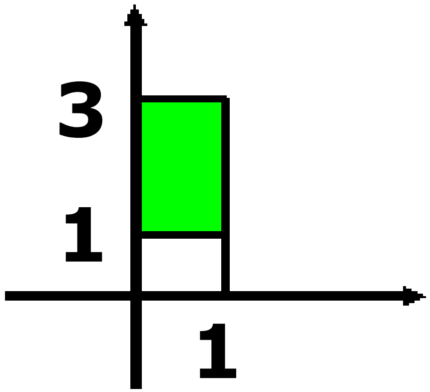
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{2}\int_1^3 xydy = 2x$$

所以 $f_X(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1] \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$y \in [1,3]$ 时

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 xydx = \frac{1}{4}y$$

$$f_y(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{4} & y \in [1,3] \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

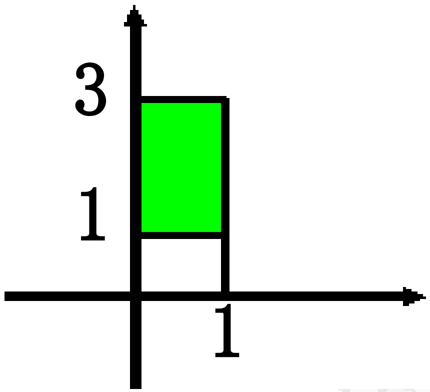


（3）

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \int_1^3 y \cdot \frac{y}{4} dy = \frac{13}{6}$$

（3）另解



$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_1^3 x\cdot\frac{1}{2}xydy$$

$$=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$$

无需求

边沿分布密度函数

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_1^3 dy\int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}xydx=\int_1^3 y\cdot\frac{y}{4}dy=\frac{13}{6}$$

随机变量的函数的数学期望

定理 1：一维情形

设 $Y=g(X)$ 是随机变量 X的函数,

- **离散型** $P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots$

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$$

- **连续型** 概率密度为$f(x)$

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

例 已知 X 服从 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布，求 $Y=\sin X$ 的数学期望。

解 $$E(Y)=E(\sin X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\, f(x)\,dx$$

因为 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\le x\le 2\pi;\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

所以 $$E(\sin X)=\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\sin x\,dx=0$$