

一元二次不等式的解法

一元二次不等式的解法

(一) “三个一次”的关系

复习一元一次方程和一元一次不等式的解法

$$2x-7=0$$

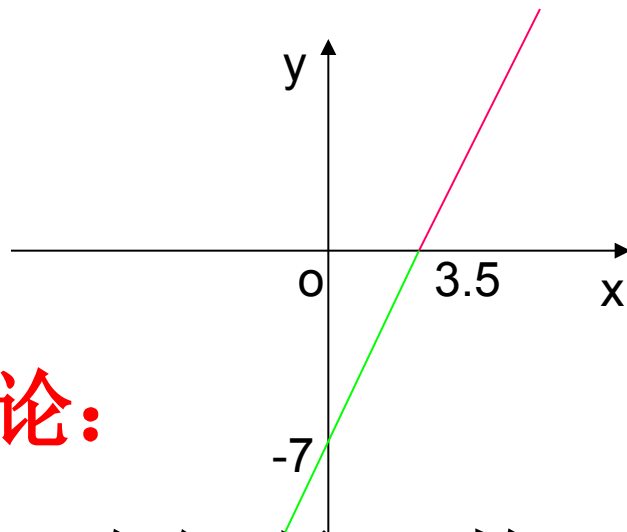
$$x=3.5$$

$$2x-7>0$$

$$x>3.5$$

$$2x-7<0$$

$$x<3.5$$



观察得出结论:

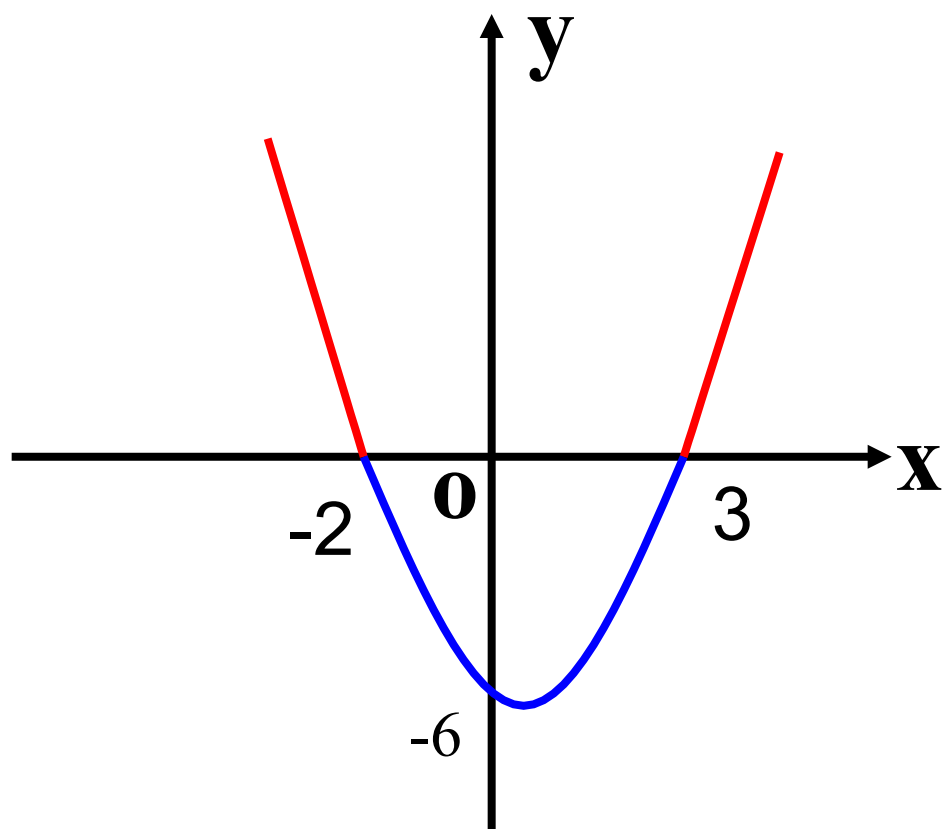
- ① $2x-7=0$ 的解是函数 $y=2x-7$ 的图象与x轴交点的横坐标
- ② $2x-7>0$ 的解集是函数 $y=2x-7$ 的图象在x轴的上方的点的横坐标的集合
- ③ $2x-7<0$ 的解集是函数 $y=2x-7$ 的图象在x轴的下方的点的横坐标的集合

引例：

解一元二次方程： $x^2 - x - 6 = 0$

解之得： $x_1 = -2, x_2 = 3$

观察二次函数 $y = x^2 - x - 6$ 的图像



看一看：函数图象与x轴的位置关系

说一说

方程 $x^2 - x - 6 = 0$ 的解是

$$x = -2 \text{ 或 } x = 3$$

不等式 $x^2 - x - 6 > 0$ 的解集是

$$\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$$

不等式 $x^2 - x - 6 < 0$ 的解集是

$$\{x \mid -2 < x < 3\}$$

问：

方程 $ax^2+bx+c=0$ 、

不等式 $ax^2+bx+c < 0$ 、

或 $ax^2+bx+c > 0$

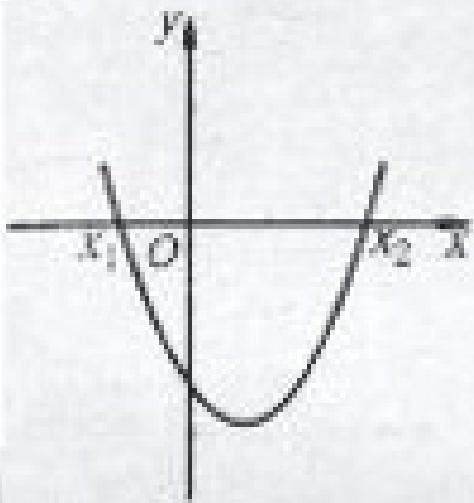
与函数 $y= ax^2+bx+c$ 的图象有什么关系？

方程的解即函数图象与x轴交点的横标，
不等式的解集即函数图象在x轴下方或上方
图象所相应x的范围。

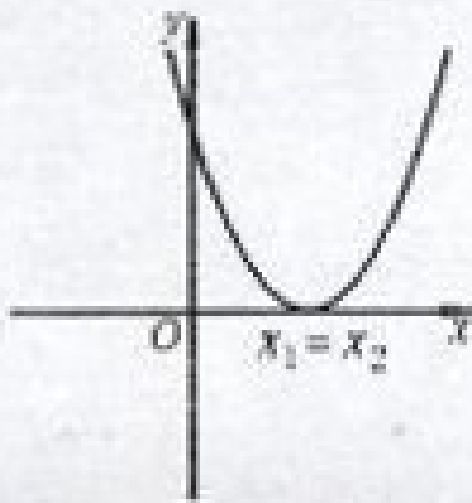
**利用二次函数图象能解一元
二次不等式！**

问： $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 与 x 轴的交点情况有哪几种？

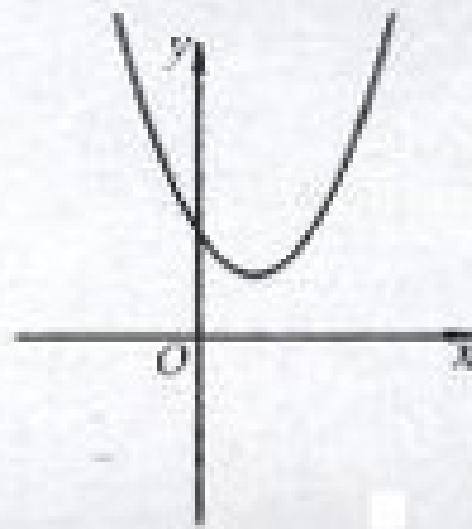
$y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 与 x 轴的相关位置，分三种情况：



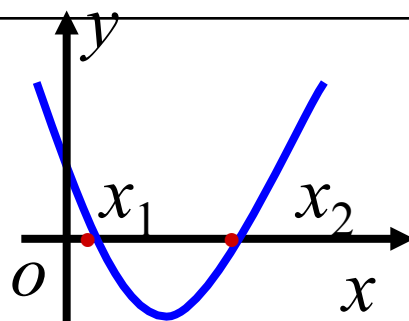
$$\Delta > 0$$



$$\Delta = 0$$



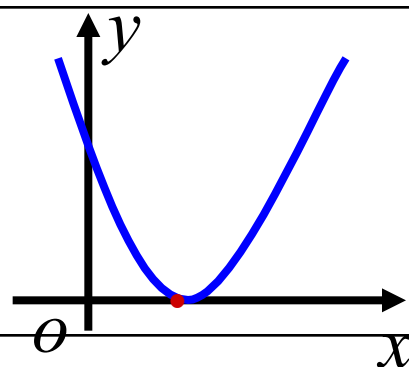
$$\Delta < 0$$



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

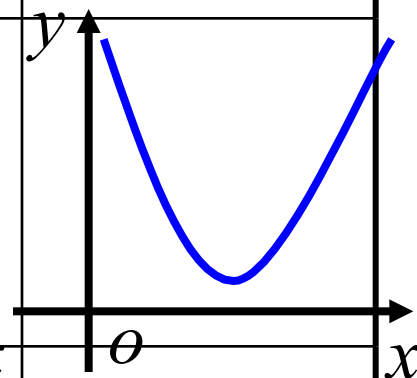
$$\{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$$

$$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$$



$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$$\{x \mid x \in R, x \neq -\frac{b}{2a}\}$$

$$\phi$$


$$\phi$$

$$R$$

$$\phi$$

这张表是我们今后求解一元二次不等式的主要工具，必须熟练掌握，其关键是抓住相应的二次函数的图像。

记忆口诀：

**不小于0取两边，不不小于0
取中间。**

首先，我们能够把任何一种一元二次不等式转化为下列四种形式中的一种：

$$(1) ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$$

$$(2) ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$$

$$(3) ax^2 + bx + c \geq 0 (a > 0)$$

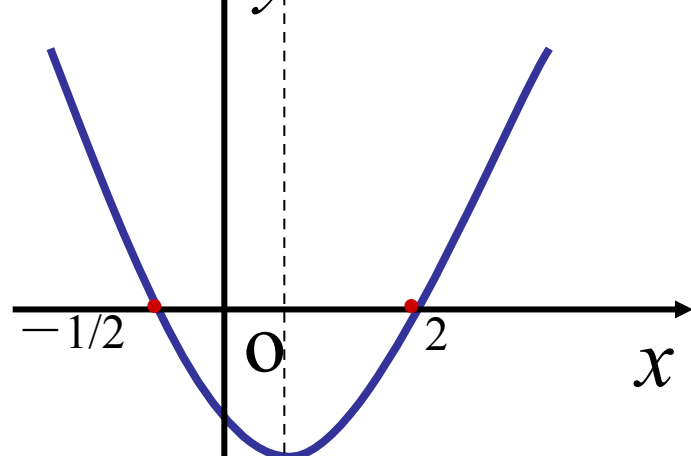
$$(4) ax^2 + bx + c \leq 0 (a > 0)$$

以上四个不等式中我们要求了 $a > 0$
假如题目中给出的不等式中二次项系数不大于0，哪怎么办呢？

对了，我们只要在不等式两边同乘-1，然后把不等式的方向变化一下，就可化为以上四种形式中的一种。

三、例题讲解

例1 解不等式 $2x^2 - 3x - 2 > 0$



解： 因为 $\Delta > 0$ ， 方程 $2x^2 - 3x - 2 = 0$ 的解是

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 3^2 - 4 \times 2 \times (-2)$$

$$= 25 > 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2)$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 2$$

所以不等式的解集是

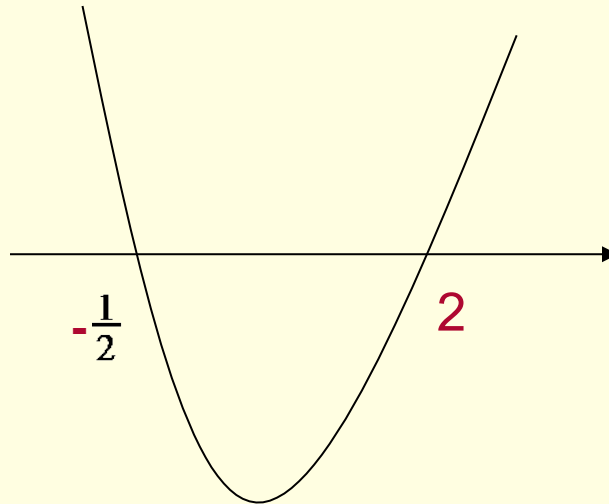
$$\left\{x \mid x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 2\right\}.$$

$$2x^2 - 3x - 2 > 0 \iff \{x \mid x < -\frac{1}{2}, \text{ 或 } x > 2\}$$

$$-2x^2 + 3x + 2 > 0 \iff 2x^2 - 3x - 2 < 0$$

$$\iff \{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2\}$$

$$2x^2 - 3x - 2 \leq 0 \iff \{x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$$



解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 、 $ax^2+bx+c<0$
($a>0$)的环节是:

(1) 化成原则形式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$

$$ax^2+bx+c<0 (a>0)$$

(2) 求 Δ ，并求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根

(3) 根据图象写出解集 (可记忆为: 不小于零
取

两边, 不不小于零取

中间)

解法环节总结：一化正→二算 Δ →
三求根→四写解集

例2.解不等式： $-3x^2+6x>2$

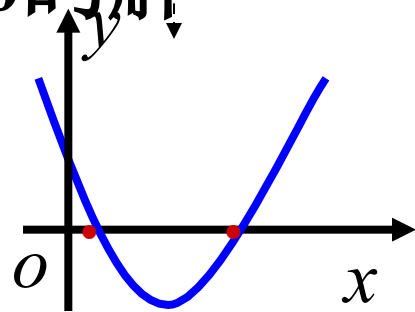
解： $\because -3x^2+6x>2$

$$\therefore 3x^2-6x+2<0$$

因为， $\Delta>0$ ，方程 $3x^2-6x+2=0$ 的解
是 $x_1=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $x_2=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

所以，原不等式的解集是

$$\left\{x \mid 1-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/677121065164006142>