

湖南省岳阳市重点中学 2024 年高考冲刺模拟数学试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $0 < \varphi \leq \pi$) 是 R 上的奇函数，若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称，且

$f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{22}, \frac{\pi}{11}\right]$ 上是单调函数，则 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

2. 若复数 $z = (2+i)(1+i)$ (i 是虚数单位)，则复数 z 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

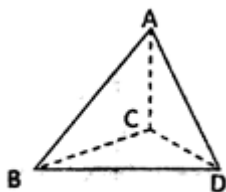
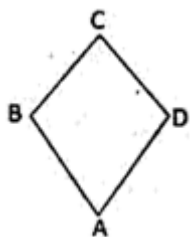
3. 函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$)，当 $x \in [0, \pi]$ 时， $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ ，则 ω 的范围为 ()

- A. $\left[\frac{5}{6}, \frac{3}{2}\right]$ B. $\left[\frac{5}{6}, \frac{5}{3}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$ D. $\left(0, \frac{5}{3}\right]$

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 $F(c, 0)$ ，若 F 到直线 $2bx - ay = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}c$ ，则 E 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

5. 等腰直角三角形 BCD 与等边三角形 ABD 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BD = 6$ ，现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起，则当直线 AD 与平面 BCD 所成角为 45° 时，直线 AC 与平面 ABD 所成角的正弦值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

6. 小王因上班繁忙，来不及做午饭，所以叫了外卖.假设小王和外卖小哥都在 12:00~12:10 之间随机到达小王所居住的楼下，则小王在楼下等候外卖小哥的时间不超过 5 分钟的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{4}$

7. 已知 $y = \log_2(x^2 - 2x + 17)$ 的值域为 $[m, +\infty)$ ，当正数 a, b 满足 $\frac{2}{3a+b} + \frac{1}{a+2b} = m$ 时，则 $7a + 4b$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{9}{4}$ B. 5 C. $\frac{5+2\sqrt{2}}{4}$ D. 9

8. 设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域都为 R ，且 $f(x)$ 是奇函数， $g(x)$ 是偶函数，则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数 B. $|f(x)| \cdot g(x)$ 是奇函数
C. $f(x) \cdot |g(x)|$ 是奇函数 D. $|f(x) \cdot g(x)|$ 是奇函数

9. 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x+4)$ ，且 $x \in (0, 1]$ 时，

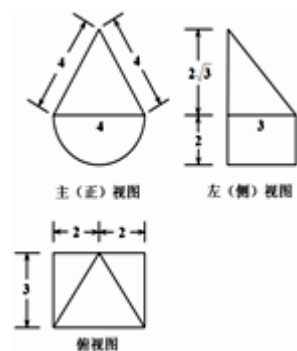
$f(x) = \log_2(x+1)$ ，则 $f(2018) + f(2019) =$ ()

- A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1, a_2 = 2$ ，且当 n 为奇数时， $a_{n+2} - a_n = 2$ ；当 n 为偶数时， $a_{n+2} + 1 = 3(a_n + 1)$ 。则此数列的前 20 项的和为 ()

- A. $\frac{3^{11}-3}{2} + 90$ B. $\frac{3^{11}-3}{2} + 100$ C. $\frac{3^{12}-3}{2} + 90$ D. $\frac{3^{12}-3}{2} + 100$

11. 一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积为 ()



- A. $\frac{32\sqrt{3}}{3} + 6\pi$ B. $8\sqrt{3} + 6\pi$

C. $\frac{32\sqrt{3}}{3} + \frac{16\pi}{3}$

D. $8\sqrt{3} + \frac{16\pi}{3}$

12. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)} (f(x) \neq 0)$, 且在区间 $(2017, 2018)$ 上单调递减, 已知 α, β

是锐角三角形的两个内角, 则 $f(\sin \beta), f(\cos \alpha)$ 的大小关系是 ()

A. $f(\sin \beta) < f(\cos \alpha)$

B. $f(\sin \beta) > f(\cos \alpha)$

C. $f(\sin \beta) = f(\cos \alpha)$

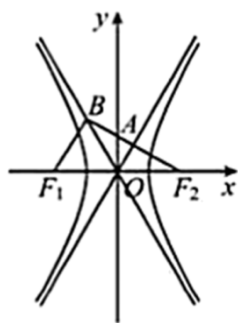
D. 以上情况均有可能

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 小李参加有关“学习强国”的答题活动, 要从 4 道题中随机抽取 2 道作答, 小李会其中的三道题, 则抽到的 2 道题小李都会的概率为_____.

14. 如图, F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 过 F_2 的直线与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 A, B

两点, 若 $\overrightarrow{F_2A} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_1B} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 0$, 则双曲线 C 的离心率是_____.



15. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y \leq 4 \\ y \leq x \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = \frac{y+1}{x+2}$ 的最大值为_____.

16. 函数 $f(x) = \cos^2 x$ 的最小正周期是_____, 单调递增区间是_____.

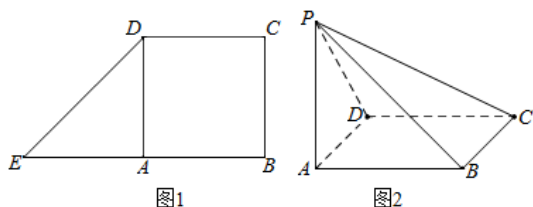
三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} - a$, $g(x) = \frac{a-1}{x} + \frac{a+|a|}{2} \cdot \frac{x}{e^{x-1}}$, ($a \in R$)

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 在定义域内有且仅有一个零点, 且此时 $f(x) \geq g(x) + m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

18. (12 分) 如图 1, 已知四边形 $BCDE$ 为直角梯形, $\angle B = 90^\circ$, $BE \parallel CD$, 且 $BE = 2CD = 2BC = 2$, A 为 BE 的中点. 将 $VEDA$ 沿 AD 折到 $VPDA$ 位置 (如图 2), 连结 PC, PB 构成一个四棱锥 $P-ABCD$.



(I) 求证 $AD \perp PB$;

(II) 若 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

①求二面角 $B-PC-D$ 的大小;

②在棱 PC 上存在点 M , 满足 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PC}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 使得直线 AM 与平面 PBC 所成的角为 45° , 求 λ 的值.

19. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 以原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{4}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程以及曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若直线 $l: y = kx$ 与曲线 C_1 、曲线 C_2 在第一象限交于 P, Q 两点, 且 $|OP| = 2|OQ|$, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$, 求 $\triangle MPQ$ 的面积.

20. (12 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 若矩阵 $M = BA$, 求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1} .

21. (12 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设函数 $\varphi(x) = |x - a|$, $a < 0$.

(1) 证明: $\varphi(x) + \varphi(-\frac{1}{x}) \geq 2$;

(2) 若不等式 $\varphi(x) + \varphi(2x) < \frac{1}{2}$ 的解集非空, 求 a 的取值范围.

22. (10 分) 山东省 2020 年高考将实施新的高考改革方案. 考生的高考总成绩将由 3 门统一高考科目成绩和自主选择的 3 门普通高中学业水平等级考试科目成绩组成, 总分为 750 分. 其中, 统一高考科目为语文、数学、外语, 自主选择的 3 门普通高中学业水平等级考试科目是从物理、化学、生物、历史、政治、地理 6 科中选择 3 门作为选考科目, 语、数、外三科各占 150 分, 选考科目成绩采用“赋分制”, 即原始分数不直接用, 而是按照学生分数在本科目考试的排名来划分等级并以此打分得到最后得分. 根据高考综合改革方案, 将每门等级考试科目中考生的原始成绩从高到低分为 φ_1 、 φ_2 、 φ_3 、 φ_4 、 φ_5 、 φ_6 共 6 个等级. 参照正态分布原则, 确定各等级人数所占比例分别为 3%、7%、16%、34%、34%、16%.

φ_1 、 φ_2 、 φ_3 、 φ_4 、 φ_5 、 φ_6 共 6 个等级. 参照正态分布原则, 确定各等级人数所占比例分别为 3%、7%、16%、34%、34%、16%.

24%、24%、16%、7%、3%等级考试科目成绩计入考生总成绩时，将 $\square$ 至 $\square$ 等级内的考生原始成绩，依照等比例转换法则，分别转换到91-100、81-90、71-80、61-70、51-60、41-50、31-40、21-30八个分数区间，得到考生的等级成绩。举例说明。

某同学化学学科原始分为65分，该学科 $\square$ 等级的原始分分布区间为58~69，则该同学化学学科的原始成绩属 $\square$ 等级。而 $\square$ 等级的转换分区间为61~70，那么该同学化学学科转换分为：

设该同学化学学科转换等级分为 $\square$ ， $\frac{69-65}{65-58} = \frac{70-\square}{\square-61}$ ，求得 $\square \approx 66.73$ 。

四舍五入后该同学化学学科赋分成绩为67。

(1) 某校高一年级共2000人，为给高一学生合理选科提供依据，对六个选考科目进行测试，其中物理考试原始成绩基本服从正态分布 $\square \sim \square(60, 12^2)$ 。

(i) 若小明同学在这次考试中物理原始分为84分，等级为 $\square$ ，其所在原始分分布区间为82~93，求小明转换后的物理成绩；

(ii) 求物理原始分在区间 $(72, 84)$ 的人数；

(2) 按高考改革方案，若从全省考生中随机抽取4人，记 $\square$ 表示这4人中等级成绩在区间 $[61, 80]$ 的人数，求 $\square$ 的分布列和数学期望。

(附：若随机变量 $\square \sim \square(\square, \square^2)$ ，则 $\square(\square - \square < \square < \square + \square) = 0.682$ ， $\square(\square - 2\square < \square < \square + 2\square) = 0.954$ ，

$\square(\square - 3\square < \square < \square + 3\square) = 0.997$)

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

根据函数 $f(x)$ 为 R 上的奇函数可得 φ ，由函数 $f(x)$ 的对称轴及单调性即可确定 ω 的值，进而确定函数 $f(x)$

的解析式，即可求得 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 的值.

【详解】

函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $0 < \varphi \leq \pi$) 是 R 上的奇函数,

则 $\varphi = \pi$, 所以 $f(x) = -\sin \omega x$.

又 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称可得 $\frac{\pi\omega}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, 即 $\omega = 2 + 4k$, $k \in Z$,

由函数的单调区间知, $\frac{\pi}{11} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$,

即 $\omega \leq 5.5$,

综上 $\omega = 2$, 则 $f(x) = -\sin 2x$,

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}.$$

故选: D

【点睛】

本题考查了三角函数的图象与性质的综合应用, 由对称轴、奇偶性及单调性确定参数, 属于中档题.

2、A

【解析】

将 z 整理成 $a + bi$ 的形式, 得到复数所对应的点, 从而可选出所在象限.

【详解】

解: $z = (2 + i)(1 + i) = 2 + i^2 + 3i = 1 + 3i$, 所以 z 所对应的点为 $(1, 3)$ 在第一象限.

故选:A.

【点睛】

本题考查了复数的乘法运算, 考查了复数对应的坐标. 易错点是误把 i^2 当成 1 进行计算.

3、B

【解析】

首先由 $x \in [0, \pi]$, 可得 $\omega x - \frac{\pi}{3}$ 的范围, 结合函数 $f(x)$ 的值域和正弦函数的图像, 可求的关于实数 ω 的不等式, 解不等式即可求得范围.

【详解】

因为 $x \in [0, \pi]$, 所以 $\omega x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \omega\pi - \frac{\pi}{3}\right]$, 若值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,

所以只需 $\frac{\pi}{2} \leq \omega\pi - \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$, $\therefore \frac{5}{6} \leq \omega \leq \frac{5}{3}$.

故选: B

【点睛】

本题主要考查三角函数的值域, 熟悉正弦函数的单调性和特殊角的三角函数值是解题的关键, 侧重考查数学抽象和数学运算的核心素养.

4、A

【解析】

由已知可得到直线 $2bx - ay = 0$ 的倾斜角为 45° , 有 $\frac{2b}{a} = 1$, 再利用 $a^2 = b^2 + c^2$ 即可解决.

【详解】

由 F 到直线 $2bx - ay = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}c$, 得直线 $2bx - ay = 0$ 的倾斜角为 45° , 所以 $\frac{2b}{a} = 1$,

即 $4(a^2 - c^2) = a^2$, 解得 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选: A.

【点睛】

本题考查椭圆离心率的问题, 一般求椭圆离心率的问题时, 通常是构造关于 a, b, c 的方程或不等式, 本题是一道容易题.

5、A

【解析】

设 E 为 BD 中点, 连接 AE 、 CE , 过 A 作 $AO \perp CE$ 于点 O , 连接 DO , 得到 $\angle ADO$ 即为直线 AD 与平面 BCD 所成角的平面角, 根据题中条件求得相应的量, 分析得到 $\angle CAE$ 即为直线 AC 与平面 ABD 所成角, 进而求得其正弦值, 得到结果.

【详解】

设 E 为 BD 中点, 连接 AE 、 CE ,

由题可知 $AE \perp BD$, $CE \perp BD$, 所以 $BD \perp$ 平面 AEC ,

过 A 作 $AO \perp CE$ 于点 O , 连接 DO , 则 $AO \perp$ 平面 BDC ,

所以 $\angle ADO$ 即为直线 AD 与平面 BCD 所成角的平面角,

所以 $\sin \angle ADO = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AO}{AD}$, 可得 $AO = 3\sqrt{2}$,

在 $\triangle AOE$ 中可得 $OE = 3$,

又 $OC = \frac{1}{2}BD = 3$, 即点 O 与点 C 重合, 此时有 $AC \perp$ 平面 BCD ,

过 C 作 $CF \perp AE$ 与点 F ,

又 $BD \perp$ 平面 AEC , 所以 $BD \perp CF$, 所以 $CF \perp$ 平面 ABD ,

从而角 $\angle CAE$ 即为直线 AC 与平面 ABD 所成角, $\sin \angle CAE = \frac{CE}{AE} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

故选: A.

【点睛】

该题考查的是有关平面图形翻折问题, 涉及到的知识点有线面角的正弦值的求解, 在解题的过程中, 注意空间角的平面角的定义, 属于中档题目.

6、C

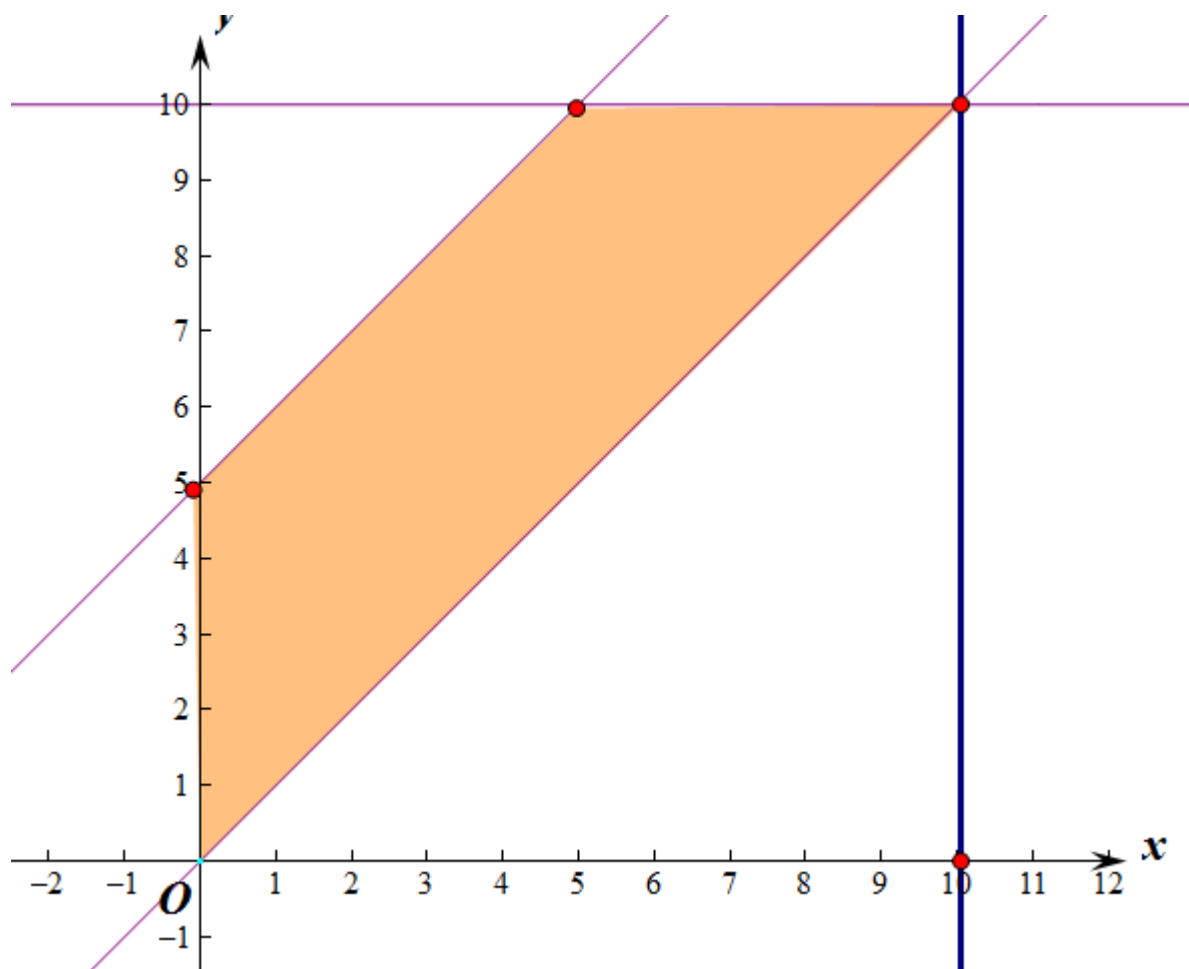
【解析】

设出两人到达小王的时间, 根据题意列出不等式组, 利用几何概型计算公式进行求解即可.

【详解】

设小王和外卖小哥到达小王所居住的楼下的时间分别为 x, y , 以 12:00 点为开始算起, 则有 $\begin{cases} x \leq y \\ y - x \leq 5 \end{cases}$, 在平面直角

坐标系内, 如图所示: 图中阴影部分表示该不等式组的所表示的平面区域,



所以小王在楼下等候外卖小哥的时间不超过 5 分钟的概率为：

$$P = \frac{10 \times 10 - \frac{1}{2} \times 10 \times 10 - \frac{1}{2} \times 5 \times 5}{10 \times 10} = \frac{3}{8}.$$

故选：C

【点睛】

本题考查了几何概型中的面积型公式，考查了不等式组表示的平面区域，考查了数学运算能力.

7、A

【解析】

利用 $y = \log_2(x^2 - 2x + 17)$ 的值域为 $[m, +\infty)$, 求出 m , 再变形, 利用 1 的代换, 即可求出 $7a + 4b$ 的最小值.

【详解】

解: $\because y = \log_2(x^2 - 2x + 17) = \log_2[(x-1)^2 + 16]$ 的值域为 $[m, +\infty)$,

$$\therefore m = 4,$$

$$\therefore \frac{4}{6a+2b} + \frac{1}{a+2b} = 4,$$

$$\therefore 7a + 4b = \frac{1}{4}[(6a+2b) + (a+2b)] \left(\frac{4}{6a+2b} + \frac{1}{a+2b} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left[5 + \frac{6a+2b}{a+2b} + \frac{4(a+2b)}{6a+2b} \right] \geq \frac{1}{4} \times (5+4) = \frac{9}{4},$$

当且仅当 $\frac{6a+2b}{a+2b} = \frac{4(a+2b)}{6a+2b}$ 时取等号,

$\therefore 7a+4b$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查了对数复合函数的值域运用,同时也考查了基本不等式中“1 的运用”,属于中档题.

8、C

【解析】

根据函数奇偶性的性质即可得到结论.

【详解】

解: Q $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = g(x),$$

$f(-x)g(-x) = -f(x)g(x)$, 故函数是奇函数, 故 A 错误,

$|f(-x)|g(-x) = |f(x)|g(x)$ 为偶函数, 故 B 错误,

$f(-x)g(-x) = -f(x)g(x)$ 是奇函数, 故 C 正确.

$|f(-x)g(-x)| = |f(x)g(x)|$ 为偶函数, 故 D 错误,

故选: C.

【点睛】

本题主要考查函数奇偶性的判断, 根据函数奇偶性的定义是解决本题的关键.

9、D

【解析】

$f(x) = f(x+4)$ 说明函数是周期函数, 由周期性把自变量的值变小, 再结合奇偶性计算函数值.

【详解】

由 $f(x) = f(x+4)$ 知函数 $f(x)$ 的周期为 4, 又 $f(x)$ 是奇函数,

$$f(2) = f(-2), \text{ 又 } f(-2) = -f(2), \therefore f(2) = 0,$$

$$\therefore f(2018) + f(2019) = f(2) + f(3) = 0 + f(-1) = 0 - f(1) = -1.$$

故选: D.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/678014045027006062>