专题 3-5 二次函数压轴：焦点与准线，动点面积，含参二次函数

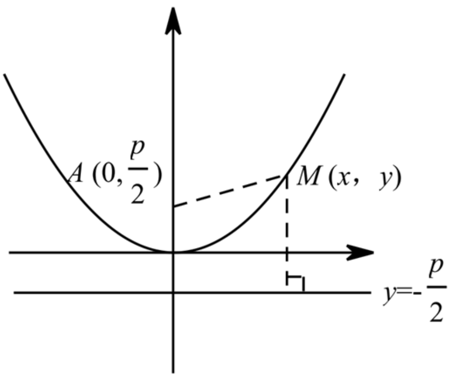
01 题型·解读

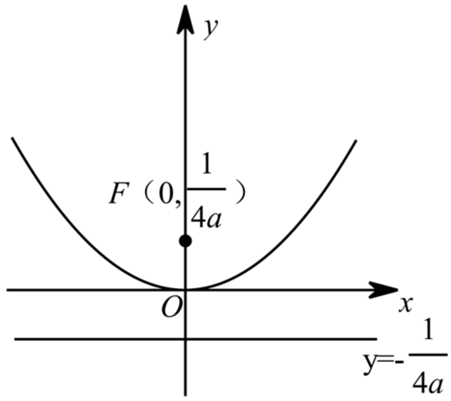
02 满分·技巧

二次函数的焦点与准线

我们已经知道二次函数的图像是抛物线，一种特别的曲线，其本身还具有这样的性质：抛物线上的任意一点到平面中某个定点和某条定直线的距离始终相等．这个点称为抛物线的焦点，这条直线称为抛物线的准线，本文将讨论一些与抛物线的焦点和准线相关的问题．焦点和准线属于高中内容，高中内容下放也是中考中所常见的．

我们知道，二次函数的图像是抛物线，它也可以这样定义：若一个动点 $M(x，y)$到定点 $A(0,\frac{p}{2})$ 的距离与它到定直线 $y=-\frac{p}{2}$ 的距离相等，则动点 M 形成的图形就叫抛物线 $x^2=2py(p>0)$.



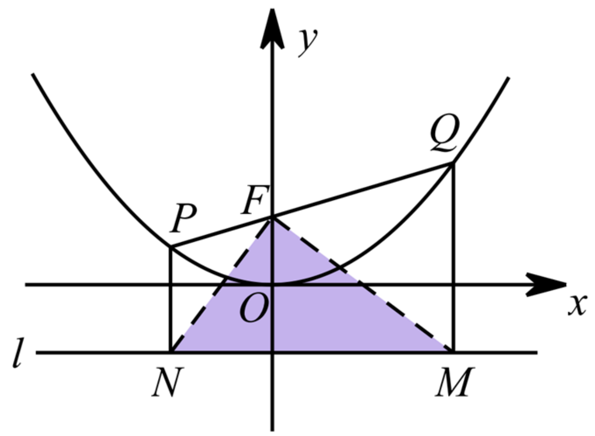


结论 1：对于抛物线 $y=ax^2$，焦点坐标为$\left(0,\frac{1}{4a}\right)$，准线为直线 $y=-\frac{1}{4a}$.

焦点一般用字母 F 表示．而且实际题目中二次项系数很多时候是$\frac{1}{4}$，只是为了焦点坐标便于计算．

至于形如 $y=ax^2+bx+c$ 的抛物线可化为顶点式 $y=a(x-h)^2+k$，然后通过由 $y=ax^2$ 平移来确定焦点和准线．

结论 2：如下图，$FM\perp FN$.

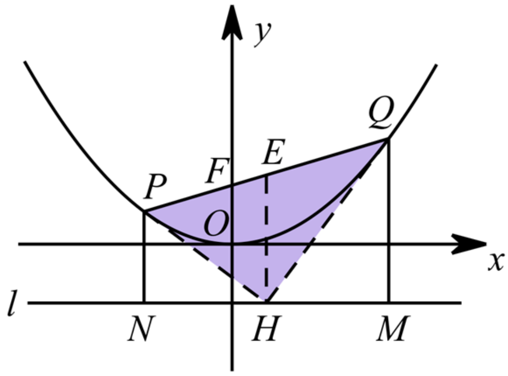


证明：设 $\angle NPF=\alpha$，$\angle MQF=\beta$，则 $\alpha+\beta=180°$，

$\therefore \angle PFN+\angle QFM=90^{\circ}-\frac{1}{2}\alpha+90^{\circ}-\frac{1}{2}\beta=90^{\circ}$，

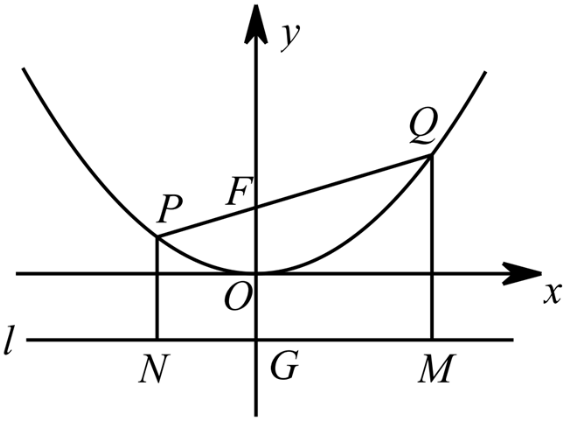
$\therefore FM\perp FN$.

结论 3：取 PQ 中点 E，作 $EH\perp x$ 轴交 x 轴于 H 点，则 $PH\perp QH$.



证明：倍长中线证两次全等.

结论 4：记 MN 与 y 轴交于点 G，$\frac{1}{PN}+\frac{1}{OM}=\frac{1}{PF}+\frac{1}{QF}=\frac{2}{FG}$.



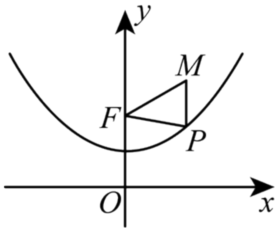
03 核心·题型

【题型 1】 焦点与准线

例题 12－1

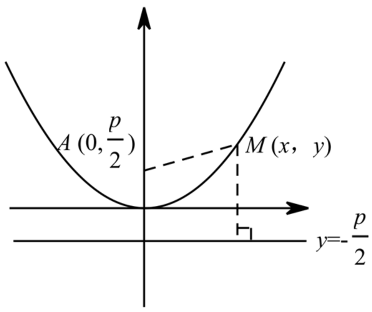
1．已知抛物线 $y=\frac{1}{4}x^{2}+1$ 具有如下性质：抛物线上任意一点到定点 $F\left(0,2\right)$ 的距离与到 x

轴的距离相等．如图，点 M 的坐标为 $\left(\sqrt{3},3\right)$，P 是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^{2}+1$ 上的一个动点，求△PMF 周长的最小值．



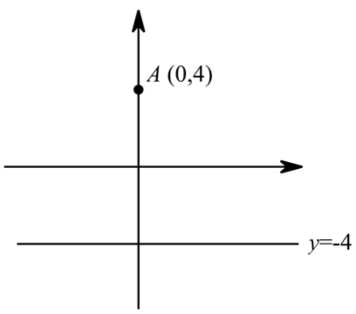
例题 12—2

2．我们知道，二次函数的图像是抛物线，它也可以这样定义：若一个动点 $M(x，y)$到定点 $A(0,\frac{p}{2})$ 的距离与它到定直线 $y=-\frac{p}{2}$ 的距离相等，则动点 M 形成的图形就叫抛物线 $x^{2}=2py(p>0)$.



(1)已知动点 $M(x，y)$到定点 $A(0，4)$的距离与到定直线 $y=-4$ 的距离相等，请写出动点 M 形成的抛物线的解析式．

(2)若点 D 的坐标是(1，8)，在(1)中求得的抛物线上是否存在点 P，使得 $PA+PD$ 最短?若存在，求出点 P 的坐标，若不存在，请说明理由．



湘潭市•中考真题

3．如图，点 P 为抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 上一动点

(1)若抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 是由抛物线 $y=\frac{1}{4}(x+2)^2-1$ 通过图像平移得到的，请写出平移的过程；

(2)若直线 l 经过 y 轴上一点 N，且平行于 x 轴，点 N 的坐标为(0，－1)，过点 P 作 $PM\perp l$ 于 M.

①问题探究：如图一，在对称轴．上是否存在一定点 F，使得 $PM=PF$ 恒成立?若存在，求出点 F 的坐标：若不存在，请说明理由．

②问题解决：如图二，若点 Q 的坐标为(1，5)，求 $QP+PF$ 的最小值．

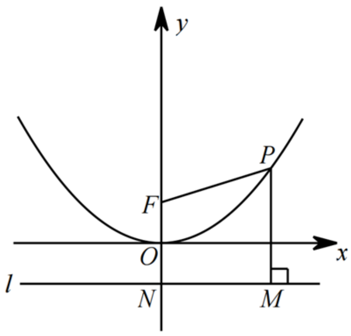


图1

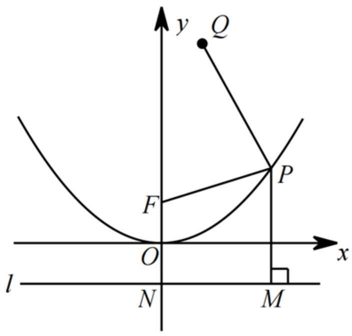


图2

广东深圳·中考真题

4．如图 1，抛物线 $y=ax^2+bx+3$（$a\neq 0$）与 x 轴交于 A（-3，0）和 B（1，0），与 y 轴交于点 C，顶点为 D.

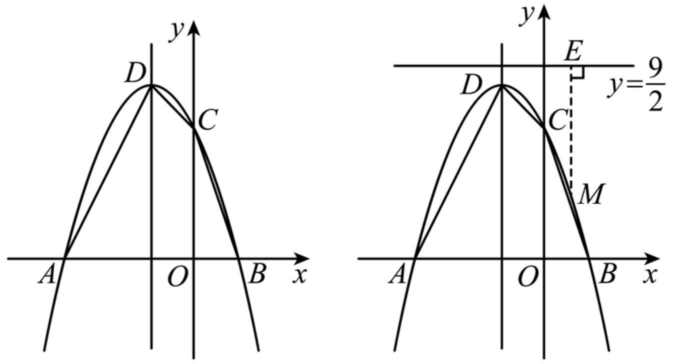


图1　　　　图2

（1）求解抛物线解析式；

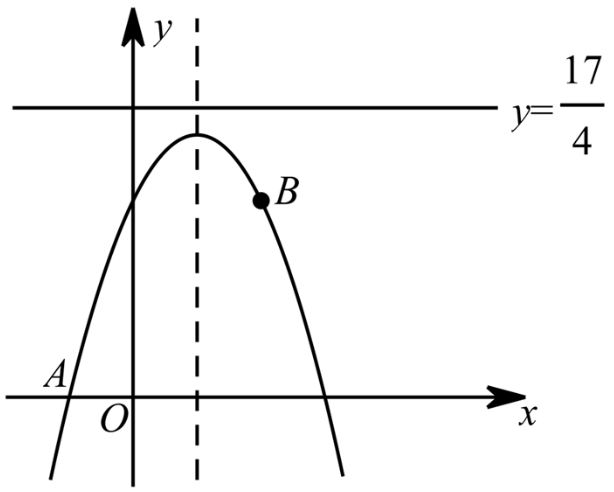
（2）如图 2，过抛物线上**任意**一点 M（m，n）向直线 l：$y=\frac{9}{2}$ 作垂线，垂足为 E，试问在该抛物线的对称轴上是否存在一点 F，使得 ME-MF=$\frac{1}{4}$？若存在，请求 F 点的坐标；若不存在，请说明理由．

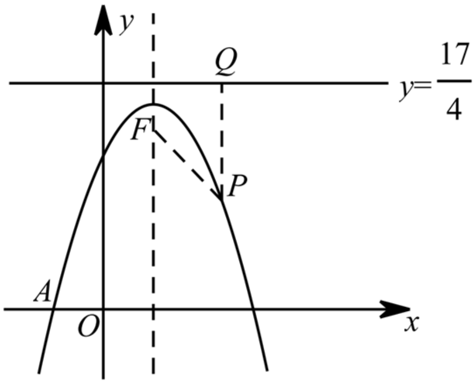
四川自贡·中考真题

5．如图，已知直线 AB 与抛物线 $C:y=ax^2+2x+c$ 相交于点 A(－1，0)和点 B(2，3)两点

(1)求抛物线 C 函数表达式；

(2)在抛物线 C 的对称轴上是否存在定点 F，使抛物线 C 上任意一点 P 到点 F 的距离等于到直线 $y=\frac{17}{4}$ 的距离?若存在，求出定点 F 的坐标；若不存在，请说明理由．



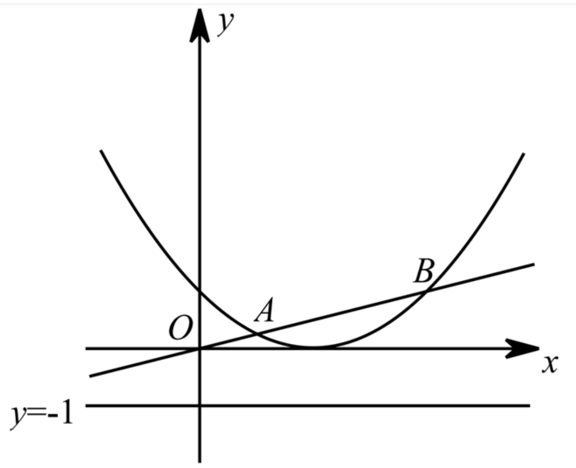


宜宾 • 中考真题

6．在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线的顶点坐标为(2，0)，且经过点(4，1)，如图，直线 $y=\frac{1}{4}x$ 与抛物线交于 A、B 两点，直线 l 为 $y=-1$．

(1)求抛物线的解析式；

(2)知 $F(x_0,y_0)$ 为平面内一定点，$M(m，n)$为抛物线上一动点，且点 M 到直线 l 的距离与点 M 到点 F 的距离总是相等，求定点 F 的坐标．

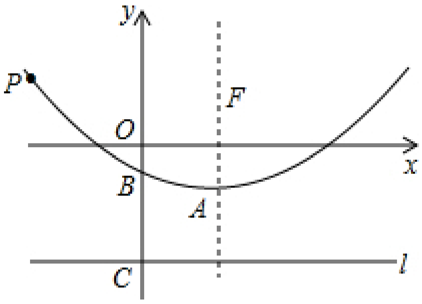


山东滨州·中考真题

7．如图，抛物线的顶点为 $A(h，-1)$，与 y 轴交于点 $B(0,-\frac{1}{2})$，点 $F(2，1)$为其对称轴上的一个定点．

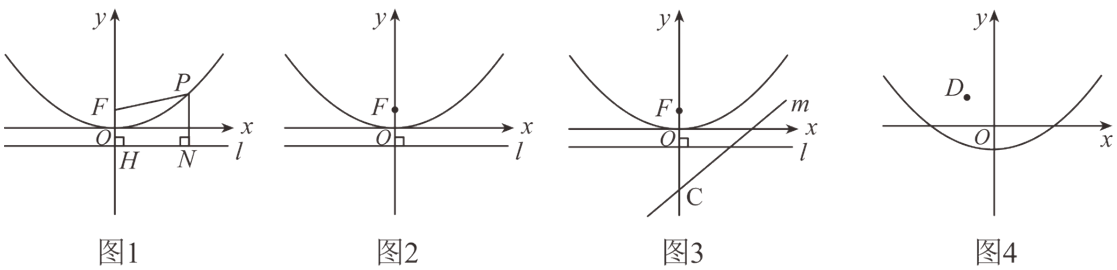
（1）求这条抛物线的函数解析式；

（2）已知坐标平面内的点 $D(4，3)$，请在抛物线上找一点 Q，使$\triangle DFQ$ 的周长最小，并求此时$\vee DFQ$ 周长的最小值及点 Q 的坐标．



2023·**湖北鄂州中考真题**

8．某数学兴趣小组运用《几何画板》软件探究 $y=ax^2\left(a>0\right)$ 型抛物线图象．发现：如图 1 所示，该类型图象上任意一点 P 到定点 $F\left(0,\frac{1}{4a}\right)$ 的距离 PF，始终等于它到定直线 l：$y=-\frac{1}{4a}$ 的距离 PN（该结论不需要证明）．他们称：定点 F 为图象的焦点，定直线 l 为图象的准线，$y=-\frac{1}{4a}$ 叫做抛物线的准线方程．准线 l 与 y 轴的交点为 H．其中原点 O 为 FH 的中点，$FH=2OF=\frac{1}{2a}$．例如，抛物线 $y=2x^2$，其焦点坐标为 $F\left(0,\frac{1}{8}\right)$，准线方程为 l：$y=-\frac{1}{8}$，其中 $PF=PN$，$FH=2OF=\frac{1}{4}$．



【基础训练】

(1)请分别直接写出抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点坐标和准线 l 的方程：__________，__________；

【技能训练】

(2)如图 2，已知抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 上一点 $P\left(x_0,y_0\right)\left(x_0>0\right)$ 到焦点 F 的距离是它到 x 轴距离的 3 倍，求点 P 的坐标；

【能力提升】

(3)如图 3，已知抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F，准线方程为 l．直线 m：$y=\frac{1}{2}x-3$ 交 y 轴于点 C

，抛物线上动点 P 到 x 轴的距离为 d_1，到直线 m 的距离为 d_2，请直接写出 d_1+d_2 的最小值；

【拓展延伸】

该兴趣小组继续探究还发现：若将抛物线 $y=ax^2\left(a>0\right)$ 平移至 $y=a\left(x-h\right)^2+k\left(a>0\right)$．抛物线 $y=a\left(x-h\right)^2+k\left(a>0\right)$ 内有一定点 $F\left(h,k+\dfrac{1}{4a}\right)$，直线 l 过点 $M\left(h,k-\dfrac{1}{4a}\right)$ 且与 x 轴平行．当动点 P 在该抛物线上运动时，点 P 到直线 l 的距离 PP_1 始终等于点 P 到点 F 的距离（该结论不需要证明）．例如：抛物线 $y=2\left(x-1\right)^2+3$ 上的动点 P 到点 $F\left(1,\dfrac{25}{8}\right)$ 的距离等于点 P 到直线 l：$y=\dfrac{23}{8}$ 的距离．

请阅读上面的材料，探究下题：

(4)如图 4，点 $D\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$ 是第二象限内一定点，点 P 是抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ 上一动点，当 $PO+PD$ 取最小值时，请求出 $\triangle POD$ 的面积．

2022·**湖北鄂州中考真题**

9．某数学兴趣小组运用《几何画板》软件探究 $y=ax^2$（$a>0$）型抛物线图象．发现：如图 1 所示，该类型图象上任意一点 M 到定点 F（0，$\dfrac{1}{4a}$）的距离 MF，始终等于它到定直线 l：$y=-\dfrac{1}{4a}$ 上的距离 MN（该结论不需要证明），他们称：定点 F 为图象的焦点，定直线 l 为图象的准线，$y=-\dfrac{1}{4a}$ 叫做抛物线的准线方程．其中原点 O 为 FH 的中点，$FH=2OF=\dfrac{1}{2a}$，例如，抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2$，其焦点坐标为 F（0，$\dfrac{1}{2}$），准线方程为 l：$y=-\dfrac{1}{2}$．其中 $MF=MN$，$FH=2OH=1$．

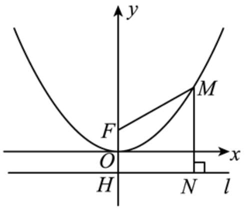


图1

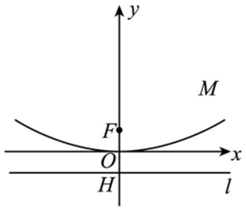


图2

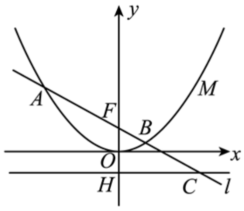


图3

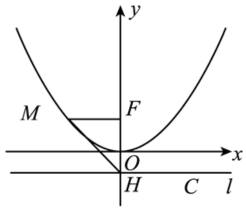


图4

(1)【基础训练】

请分别直接写出抛物线 $y=2x^2$ 的焦点坐标和准线 l 的方程：_____，_____．

(2)【技能训练】

如图 2 所示，已知抛物线 $y=\dfrac{1}{8}x^2$ 上一点 P 到准线 l 的距离为 6，求点 P 的坐标；

(3)【能力提升】

如图 3 所示，已知过抛物线 $y=ax^2$（$a>0$）的焦点 F 的直线依次交抛物线及准线 l 于点 A、B、C．若 $BC=2BF$，$AF=4$，求 a 的值；

(4)【拓展升华】

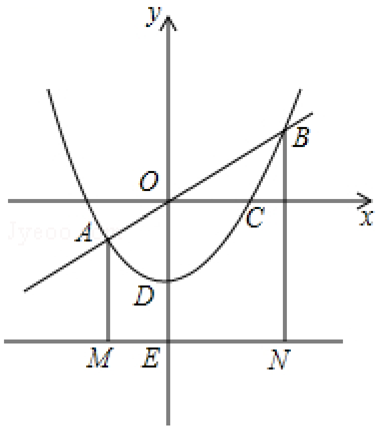
古希腊数学家欧多克索斯在深入研究比例理论时，提出了分线段的"中末比"问题. 点 C 将一条线段 AB 分为两段 AC 和 CB，使得其中较长一段 AC 是全线段 AB 与另一段 CB 的比例中项，即满足：$\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 后人把 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 这个数称为"黄金分割"把点 C 称为线段 AB 的黄金分割点.

如图 4 所示，抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点 F（0，1），准线 l 与 y 轴交于点 H（0，﹣1），E 为线段 HF 的黄金分割点，点 M 为 y 轴左侧的抛物线上一点．当 $\frac{MH}{MF}=\sqrt{2}$ 时，请直接写出△HME 的面积值.

【题型 2】焦半径倒数和为定值

广西南宁·中考真题

10．如图，抛物线 $y=ax^2+c$（$a\neq0$）经过 C（2，0），D（0，﹣1）两点，并与直线 $y=kx$ 交于 A、B 两点，直线 l 过点 E（0，﹣2）且平行于 x 轴，过 A、B 两点分别作直线 l 的垂线，垂足分别为点 M、N.



（1）求此抛物线的解析式；

（2）求证：$AO=AM$；

（3）探究：

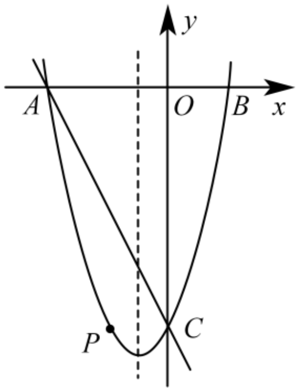
①当 $k=0$ 时，直线 $y=kx$ 与 x 轴重合，求出此时 $\frac{1}{AM}+\frac{1}{BN}$ 的值；

②试说明无论 k 取何值，$\frac{1}{AM}+\frac{1}{BN}$ 的值都等于同一个常数.

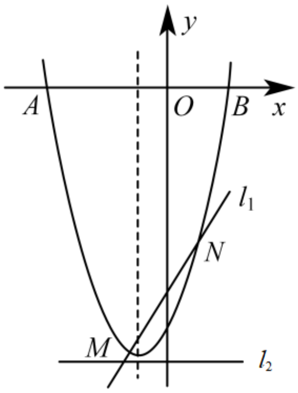
【题型 3】焦点弦为直径的圆与准线相切

2023·湖南怀化中考真题

11．如图一所示，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx-8$ 与 x 轴交于 $A(-4,0)$、$B(2,0)$ 两点，与 y 轴交于点 C．



图一



备用图

(1)求抛物线的函数表达式及顶点坐标；

(2)设直线 $l_1: y=kx+k-\frac{35}{4}$ 交抛物线于点 M 、N ，求证：无论 k 为何值，平行于 x 轴的直线 $l_2: y=-\frac{37}{4}$ 上总存在一点 E ，使得 $\angle MEN$ 为直角．

湖南张家界・中考真题

12．如图，已知二次函数 $y=ax^2+1(a\neq 0, a$ 为实数)的图像过点 A(－2，2)，一次函数 y＝kx＋b(k≠0，k、b 为实数)的图像 1 经过点 B(0，2)．

(1)求 a 值并写出二次函数表达式；

(2)求 b 值；

(3)设直线 1 与二次函数图像交于 M，N 两点，过 M 作 MC 垂直 x 轴于点 C，试证明：MB＝MC；

(4)在(3)的条件下，请判断以线段 MN 为直径的圆与 x 轴的位置关系，并说明理由．