2022北京中考数学一模分类汇编——新定义（教师版）

1．（2022•海淀区一模）在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 P（x_1，y_1），给出如下定义：当点 Q（x_2，y_2）满足 $x_1+x_2=y_1+y_2$ 时，称点 Q 是点 P 的等和点．

已知点 P（2，0）．

（1）在 Q_1（0，2），Q_2（－2，－1），Q_3（1，3）中，点 P 的等和点有 $\underline{\quad Q_1，Q_3\quad}$；

（2）点 A 在直线 $y=-x+4$ 上，若点 P 的等和点也是点 A 的等和点，求点 A 的坐标；

（3）已知点 B（b，0）和线段 MN，对于所有满足 $BC=1$ 的点 C，线段 MN 上总存在线段 PC 上每个点的等和点．若 MN 的最小值为5，直接写出 b 的取值范围．

【分析】（1）根据定义判断即可；

（2）设点 P（2，0）的等和点为（m，n），则 $2+m=n$，设 A（t，$-t+4$），则 A 点的等和点为（m，n），则 $t+m=-t+4+n$，即可求 A（3，1）；

（3）由题意可得 P 点的等和点在直线 $y=x+2$ 上，B 点的等和点在直线 $y=x+b$ 上，设直线 $y=x+b$ 与 y 轴的交点为 B'（0，b），再由 $BC=1$，可得 C 点在以 B 为圆心，半径为1的圆上，则点 C 的等和点是两条直线之间的区域，以 B'为圆心，1为半径作圆，过点 B'作 $y=x+2$ 的垂线交圆与 N 点，交直线于 M 点，由 MN 的最小值为5，可得 $B'M$ 最小值为4，在Rt△$B'MP'$中，$B'P=PB=4\sqrt{2}$，可求 $OB=4\sqrt{2}+2$，同理当 B 点在 y 轴左侧时 $OB=2-4\sqrt{2}$，

【解答】解：（1）Q_1（0，2），则 $2+0=0+2$，

∴Q_1（0，2）是点 P 的等和点；

Q_2（－2，－1），则 $2+(-2)\neq 0+(-1)$，

∴Q_2（－2，－1）不是点 P 的等和点；

Q_3（1，3），则 $2+1=0+3$，

∴Q_3（1，3）是点 P 的等和点；

故答案为：Q_1，Q_3；

（2）设点 P（2，0）的等和点为（m，n），

∴$2+m=n$，

设 A（t，$-t+4$），则 A 点的等和点为（m，n），

∴$t+m=-t+4+n$，

∴$t=3$，

∴A（3，1）；

（3）∵P（2，0），

∴P 点的等和点在直线 $y=x+2$ 上，

∵B（b，0），

∴B 点的等和点在直线 $y=x+b$ 上，

设直线 $y=x+b$ 与 y 轴的交点为 B'（0，b），

∵$BC=1$，

∴C 点在以 B 为圆心，半径为 1 的圆上，

∴点 C 的等和点是两条直线之间的区域，

以 B'为圆心，1 为半径作圆，过点 B'作 $y=x+2$ 的垂线交圆与 N 点，交直线于 M 点，

∵MN 的最小值为 5，

∴$B'M$ 最小值为 4，

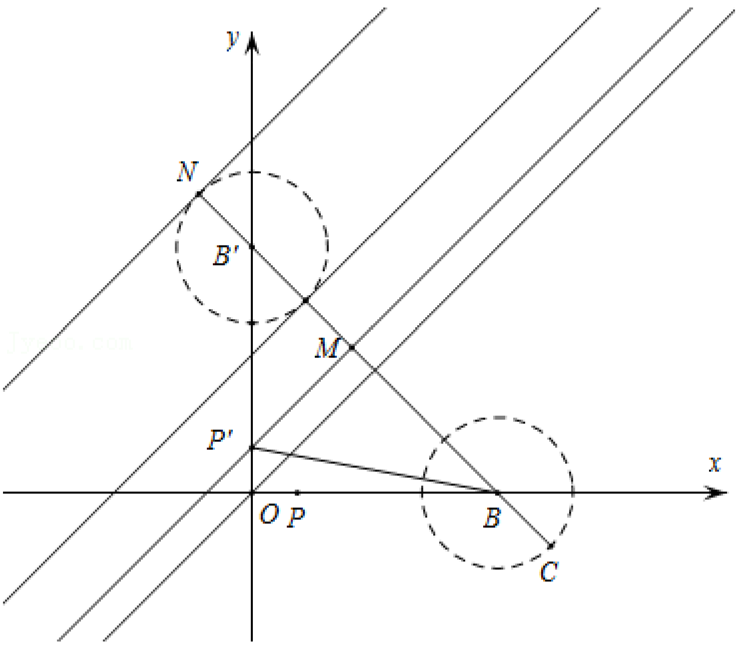
在 Rt△$B'MP'$中，$B'P=4\sqrt{2}$，

∴$PB=4\sqrt{2}$，

∴$OB=4\sqrt{2}+2$，

同理当 B 点在 y 轴左侧时 $OB=2-4\sqrt{2}$，

∴$b=2-4\sqrt{2}$或 $b=2+4\sqrt{2}$.



【点评】本题考查一次函数的综合应用，熟练掌握一次函数的图象及性质，理解新定义，将所求问题与圆相结合是解题的关键.

2．（2022•西城区一模）在平面直角坐标系 xOy 中，对于△ABC 与⊙O，给出如下定义：若△ABC 与⊙O 有且只有两个公共点，其中一个公共点为点 A，另一个公共点在边 BC 上（不与点 B，C 重合），则称△ABC 为⊙O 的"点 A 关联三角形".

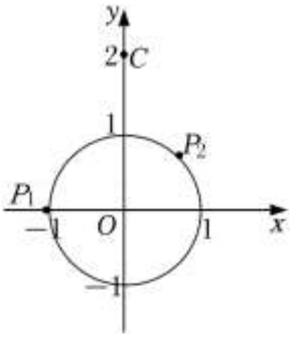
（1）如图，⊙O 的半径为 1，点 C（0，2）．△AOC 为⊙O 的"点 A 关联三角形"

①在 P_1（﹣1，0），P_2（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$）这两个点中，点 A 可以与点 <u>P_2</u> 重合；

②点 A 的横坐标的最小值为 <u>$-\frac{\sqrt{3}}{2}$</u>；

（2）⊙O 的半径为 1，点 A（1，0），点 B 是 y 轴负半轴上的一个动点，点 C 在 x 轴下方，△ABC 是等边三角形，且△ABC 为⊙O 的"点 A 关联三角形"．设点 C 的横坐标为 m，求 m 的取值范围；

（3）⊙O 的半径为 r，直线 $y=x$ 与⊙O 在第一象限的交点为 A，点 C（4，0）．若平面直角坐标系 xOy 中存在点 B，使得△ABC 是等腰直角三角形，且△ABC 为⊙O 的"点 A 关联三角形"，直接写出 r 的取值范围．



【分析】（1）当点 A 在 y 轴右侧时，过点 C 作⊙O 的切线 CA，交⊙O 于 A，连接 OA，利用面积求出 AH，得出 $0\leqslant x_A\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，当点 A 在 y 轴左侧时，由对称性得，$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant x_A<0$，即可求出点 A 的横坐标的范围，即可求出①②的答案；

（2）先求出 $B'C'=\sqrt{2}$，过点 C'作 $C'G\perp y$ 轴于 G，构造直角三角形，表示出 $GM=\sqrt{3}B'G$，$BM=2B'G$，进而用勾股定理求出 $B'G=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$，即可求出答案；

（3）当点 C 在圆内时，当∠BAC＝90°时，始终存在等腰 Rt△ABC 是⊙O 的"点 A 关联三角形"，即 $r\geqslant4$，当点 C 在圆外时，当∠BAC＝90°时，存在等腰 Rt△ABC 为⊙O 的"点 A 关联三角形"，过点 B 作 y 轴的平行线 BR，过点 A 作 $AR\perp BR$ 于 R，作 $AT\perp x$ 轴于 T，判断出四边形 $ORAT$ 是矩形，得出△ABR≌△ACT，进而判断出点 B 也在 y 轴负半轴上，利用点 B 在圆上，求出 r 的范围，即可求出答案．

【解答】解：（1）如图 1，

当点 A 在 y 轴右侧时，过点 C 作⊙O 的切线 CA，交⊙O 于 A，连接 OA，

则 $OA=1$，$OC=2$，

则 $AC=\sqrt{3}$，

过点 A 作 $AH\perp y$ 轴于 H，

则 $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}AC\cdot OA=\frac{1}{2}OC\cdot AH$，

$\therefore AH=\frac{AC\cdot OA}{OC}=\frac{\sqrt{3}\times 1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore 0\leqslant x_A\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当点 A 在 y 轴左侧时，由对称性得，$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant x_A<0$，

即，$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant x_A\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，

①∵点 P_1 的横坐标为 -1，

而 $-1<-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴点 A 不能与点 P_1 重合，

∵点 P_2 的横坐标为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

而$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴点 A 能与点 P_2 重合，

故答案为：P_2；

②点 A 的横坐标的最小值为$-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故答案为：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

（2）如图 2，

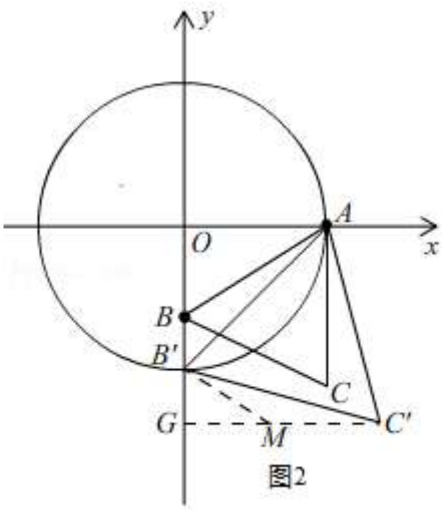


图2

∵△ABC 为⊙O 的“点 A 关联三角形”，

∴线段 AC 和 AB 除过点 A 为不能⊙O 有交点，

当线段 AC 除点 A 外不与⊙O 有交点，

当 AC 与⊙O 相切时，

∴$AC\perp x$ 轴，此时，点 A 的横坐标为 1，

当线段 AB 除点 A 外不与⊙O 有交点，

即点 B 在（﹣1，0）处，记作点 B'，

∴$OB'=1$，

∵A（1，0），

∴$OA=1$，

∴$OA=OB'$，

∴$\angle OB'A=45°$，

∵△ABC 为等边三角形，

∴$B'C'=AB'$，$\angle AB'C'=60°$，

在 Rt△$A'OB'$中，$AB'=\sqrt{2}$，

∴$B'C'=\sqrt{2}$，

过点 C'作 $C'G\perp y$ 轴于 G，

∴$\angle B'GC'=90°$，$\angle C'B'G=180°-45°-60°=75°$，

∴$\angle B'C'G=15°$，

在 $C'G$ 上取一点 M，连接 $B'M$，使 $B'M=C'M$，

∴$\angle B'MG=30°$，

在 Rt△$B'GM$ 中，则 $GM=\sqrt{3}B'G$，$BM=2B'G$，

∴$C'G=GM+C'M=(\sqrt{3}+2)B'G$，

在 Rt△$B'GC'$中，根据勾股定理得，$B'G^2+C'G^2=B'C'^2$，

$B'G^2+[(\sqrt{3}+2)B'G]^2=(\sqrt{2})^2$，

∴$B'G=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$，

∴$C'G=(\sqrt{3}+2)\cdot\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^2}{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，

∴m 的取值范围为 $1\leqslant m<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$；

（3）当点 C 在圆内时，当∠$BAC=90°$ 时，始终存在等腰 Rt△ABC 是⊙O 的"点 A 关联三角形"，即 $r>4$，

∵直线 $y=x$ 与⊙O 在第一象限的交点为 A，

∴A（$\frac{\sqrt{2}}{2}r$，$\frac{\sqrt{2}}{2}r$），

如图 3，

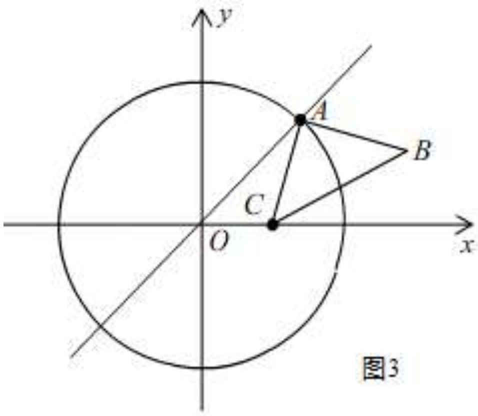


图3

当点 C 在圆外时，当∠$BAC=90°$ 时，存在等腰 Rt△ABC 为⊙O 的"点 A 关联三角形"，如图 4，

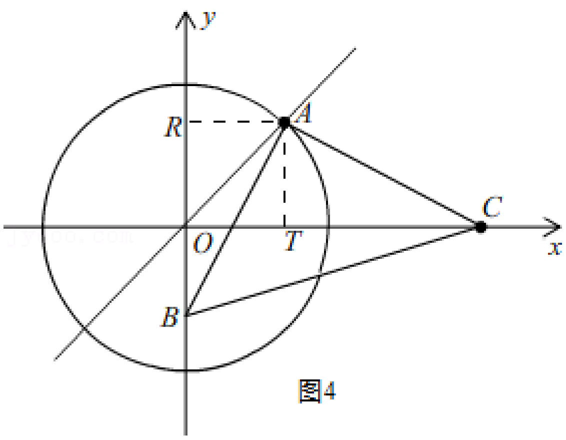


图4

过点 B 作 y 轴的平行线 BR，过点 A 作 $AR\perp BR$ 于 R，作 $AT\perp x$ 轴于 T，

∵ $\angle ORA=\angle OTA=90^\circ=\angle ROT$，

∴四边形 $ORAT$ 是矩形，

∵$AB=AC$，

∴$\triangle ABR\cong\triangle ACT$（$AAS$），

∴$AR=AT$，$BR=CT$，

∵点 A 在直线 $y=x$ 上，

∴点 A 到 x，y 轴的距离相等是 AT，

∴R 在 y 轴上，即点 B 也在 y 轴负半轴上，

∴$OT=OR=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$，

当点 B 在⊙O 上时，$RB=r+\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$，$CT=4-\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$，

∴$r+\dfrac{\sqrt{2}}{2}r=4-\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$，

∴$r=4(\sqrt{2}-1)$，

当 AC 与⊙O 相切时，则$\angle OAC=90^\circ$，

∵ $\angle BAC=90^\circ$，

∴点 B 与点 O 重合，此时，$r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}OC=2\sqrt{2}$，

∴$4(\sqrt{2}-1)<r\leqslant 2\sqrt{2}$，

即 $4(\sqrt{2}-1)<r\leqslant 2\sqrt{2}$或 $r>4$.

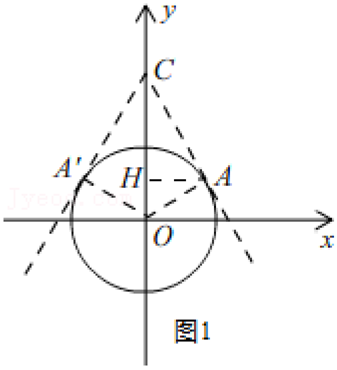


图1

【点评】此题是圆的综合题，主要考查了新定义，圆的切线的性质，勾股定理，等腰直角三角形的性质，全等三角形的判定和性质，找出分界点是解本题的关键．

3．（2022•东城区一模）对于平面直角坐标系 xOy 中的点 C 及图形 G，有如下定义：若图形 G 上存在 A，B 两点，使得△ABC 为等腰直角三角形，且∠ABC＝90°，则称点 C 为图形 G 的“友好点”．

（1）已知点 O（0，0），M（4，0），在点 C_1（0，4），C_2（1，4），C_3（2，﹣1）中，线段 OM 的“友好点”是 __C_1、C_3__；

（2）直线 y＝﹣x+b 分别交 x 轴、y 轴于 P，Q 两点，若点 C（2，1）为线段 PQ 的“友好点”，求 b 的取值范围；

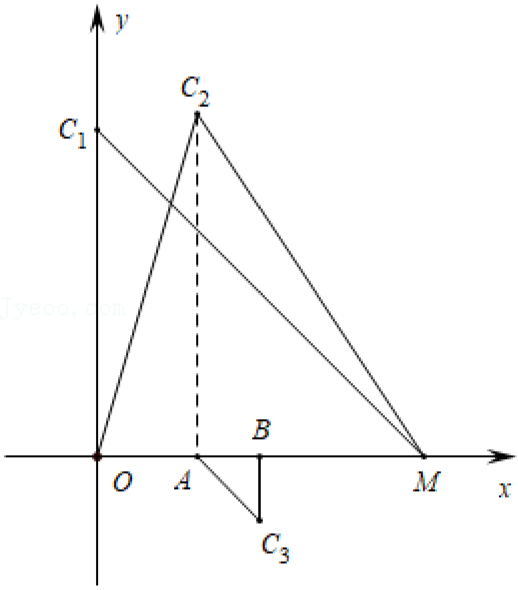
（3）已知直线 y＝x+d（d＞0）分别交 x 轴、y 轴于 E，F 两点，若线段 EF 上的所有点都是半径为 2 的⊙O“友好点”，直接写出 d 的取值范围．

【分析】（1）根据“友好点”的定义逐一进行判断即可；

（2）分点 C 在线段 PQ 的下方、上方分别画出图形，过 C 作 CB⊥PQ 于 B，延长 BC 交 x 轴于 H，则 BQ 或 BP 的长度要大于等于 BC 的长度即可；

（3）首先分析得到点 E 的运动范围，可知 OE≥2，当 EH 平分∠FEO 时，H（0，2），是最大临界值，利用勾股定理求出答案即可．

【解答】解：（1）如图所示，



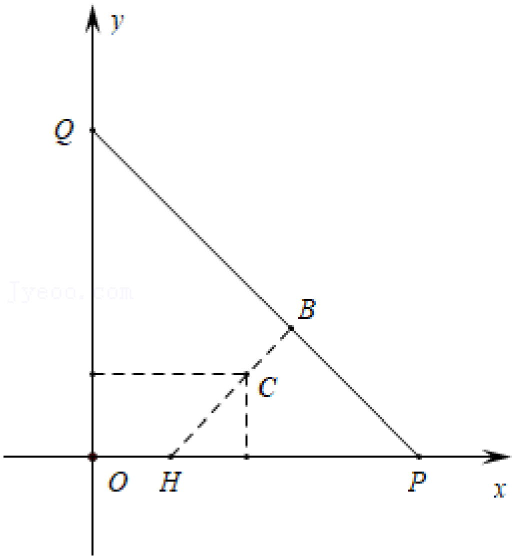
由题意知△OC_1M 为等腰直角三角形，C_1 符合题意，

过点 C_2 作 $C_2A \perp OM$ 于 A，则 $AM=3$，$C_2A=4$，△AMC_2 不是等腰三角形，C_2 不符合题意，

过 C_3 作 $C_3B \perp OM$ 于 B，则 $C_3B=AB=1$，△ABC_3 是等腰直角三角形，符合题意，

故答案为：C_1；C_3；

（2）分两种情况讨论，如图，当直线 PQ 在 C 点上方时，过 C 作 $CB \perp PQ$ 于 B，延长 BC 交 x 轴于 H，



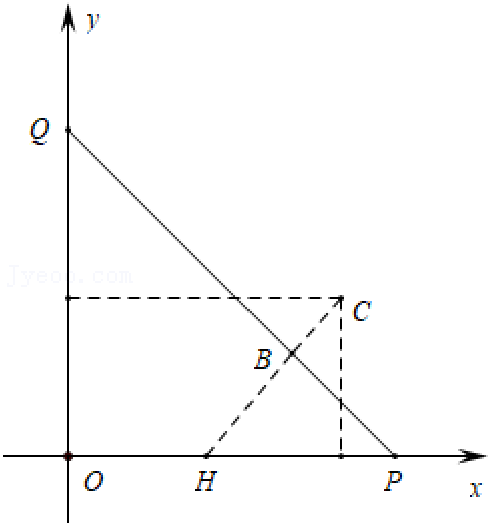
则△BPH 为等腰直角三角形，$BP=BH>BC$，

故在线段 PQ 上必存在 A 点，使得$\angle ABC=90°$，$AB=BC$，

将 $x=2$，$y=1$ 代入 $y=-x+b$ 得：$b=3$，

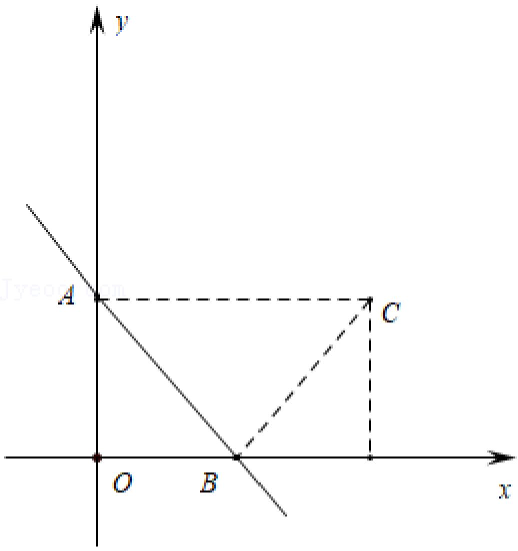
即 $b>3$，

当直线 PQ 在 C 点下方时，过 C 作 $CB\perp PQ$ 于 B，CB 延长线交 x 轴于 H，



则 $BQ\geqslant BC$ 时，符合题意，

当直线 PQ 过点 H 时，$BQ=BC$，如图，



此时，$-1+b=0$，

即 $b=1$，

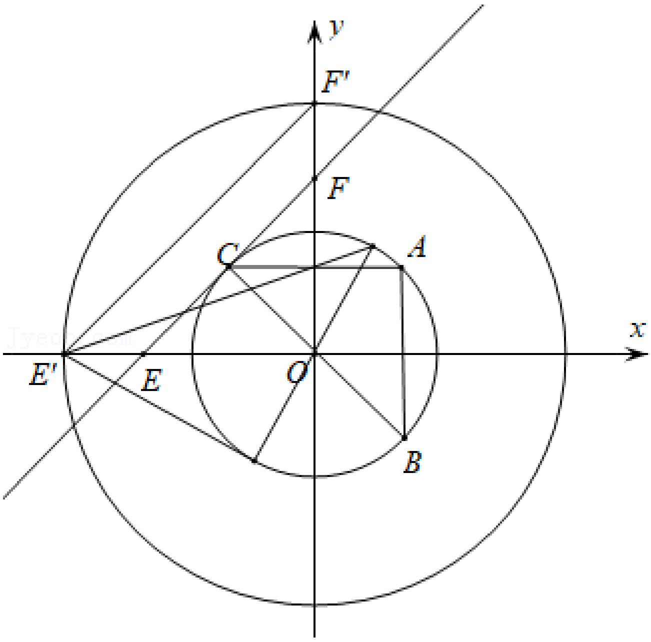
即 $1\leqslant b<3$，

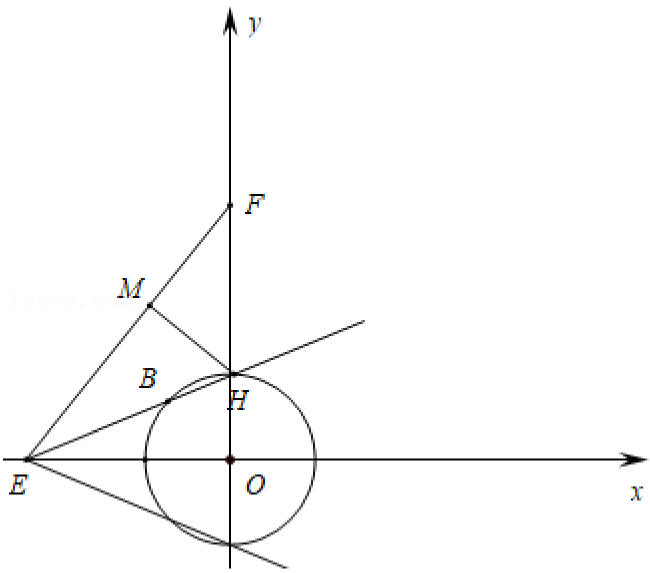
综上，$1\leqslant b<3$ 或 $b>3$；

（3）通过分析可知，由题意知，$\angle ACB=45°$，

当 AB 最小时，点 C 在圆上，此时 $OE=\sqrt{2}OC=2\sqrt{2}$，即 $d=4-2\sqrt{2}$，

当 AB 为直径时，AB 最大为 4，





此时，$\angle HEO=22.5°$ ，即 EH 为$\angle EHF$ 的平分线，

过 H 作 $HM\perp EF$ 于 M，则 $HM=OH=2$，

$\therefore FM=2$，

由勾股定理得：$FH=2\sqrt{2}$，

即 $OE=OF=2\sqrt{2}+2$，

即 $d=2\sqrt{2}+2$，

$\therefore 4-2\sqrt{2}\leqslant d\leqslant 2\sqrt{2}+2$.

【点评】本题是圆的综合题，主要考查了新定义问题，涉及到一次函数与圆的性质的综合应用，等腰直角三角形的性质等知识，解题的关键是读懂题意，借助定义作出符合题意的图形，同时要注意数形结合、分类讨论思想的运用．

4.（2022•朝阳区一模）在平面直角坐标系 xOy 中，对于直线 l：$y=kx+b$，给出如下定义：若直线 l 与某个圆相交，则两个交点之间的距离称为直线 l 关于该圆的“圆截距”.

（1）如图 1，⊙O 的半径为 1，当 $k=1$，$b=1$ 时，直接写出直线 l 关于⊙O 的“圆截距”；

（2）点 M 的坐标为（1，0），

①如图 2，若⊙M 的半径为 1，当 $b=1$ 时，直线 l 关于⊙M 的“圆截距”小于$\frac{4}{5}\sqrt{5}$，求 k 的取值范围；

②如图 3，若⊙M 的半径为 2，当 k 的取值在实数范围内变化时，直线 l 关于⊙M 的“圆截距”的最小值 2，直接写出 b 的值.

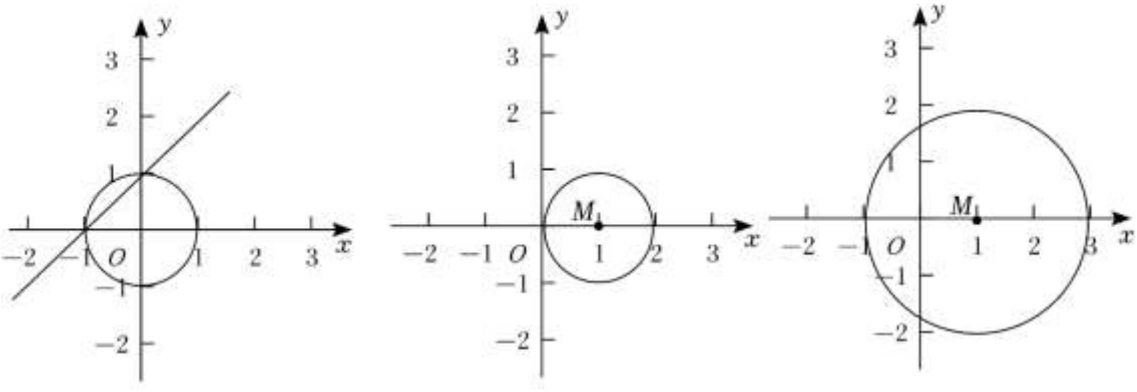


图1　　图2　　图3

【分析】（1）根据 k 和 b 的值直接写出直线的解析式，设直线与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，根据勾股定理求出“圆截距”即可；

（2）①根据圆的垂径定理，确定弦长为$\frac{4}{5}\sqrt{5}$时，弦的位置，注意分类，确定直线的解析式，根据直线的增减性确定 k 的取值范围即可；

②当最短弦长为 2 时，分弦在 x 轴上方和 x 轴下方两种情况讨论求解.

【解答】解：（1）∵$k=1$，$b=1$，

∴直线 l 的解析式为 $y=x+1$，

设直线与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，

则 A（﹣1，0），B（0，1），

∴$AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

即直线 l 关于⊙O 的“圆截距”为$\sqrt{2}$；

（2）

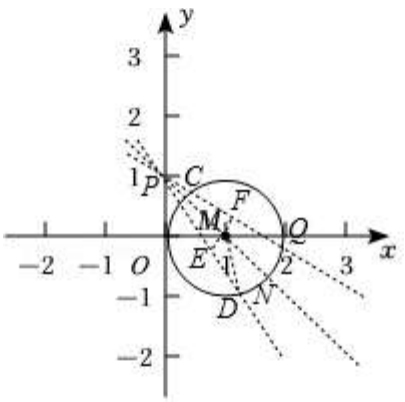


图2

①如图2，设直线与 y 正半轴交点为 P，且 P（0，1），

∵点 M 的坐标为（1，0），⊙M 的半径为1，

∴圆与 x 轴正半轴交点为 Q（2，0），

当 $b=1$ 时，直线 l 的解析式为 $y=kx+1$，

当直线经过点 Q 时，$2k+1=0$，

解得 $k=-\dfrac{1}{2}$；

过点 M 作 $MF\perp PQ$，垂足为 F，

∵$OP=1$，$OQ=2$，

∴$PQ=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

∴$\sin\angle PQO=\dfrac{OP}{PQ}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

∵$MQ=1$，$\sin\angle PQO=\dfrac{MF}{MQ}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

∴$MF=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$QF=\sqrt{1^2-(\dfrac{\sqrt{5}}{5})^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

设直线 PQ 与圆 M 的另一个交点为 C，

则 $QC=2QF=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，

∵关于⊙M 的“圆截距”小于$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，

∴k 的取值范围是 $-\dfrac{1}{2}<k<0$；

设直线 PM 与圆的交点为 N，

∵点 P（0，1），点 M 的坐标为（1，0），

∴$OP=OM$，

∴$\angle PMO=45°$，

∴$\angle QMN=45°$，

根据圆的对称性，直线 PQ 和直线 PD 关于直线 PN 对称，此时 $ED=CB$，

∴$\angle DMN=45°$，

∴$\angle DMQ=90°$，

∴D 的坐标为（1，﹣1），

∴$k+1=-1$，

解得 $k=-2$，

∴直线 PD 的解析式为 $y=-2x+1$，

关于⊙M 的“圆截距”小于$\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

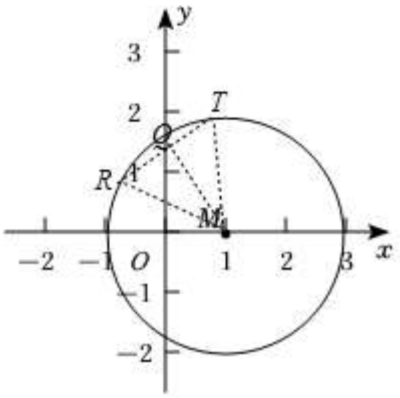
k 的取值范围是 $k<-2$；

综上，k 的取值范围是 $k<-2$ 或 $-\frac{1}{2}<k<0$.

②当 k 的取值在实数范围内变化时，直线 l 关于⊙M 的“圆截距”的最小值 2，

设直线与 y 轴交点为 Q（0，m），则过 Q 点的“圆截距”的最小值 2，

如下图，即 $RT=2$，$MQ\perp RT$，



由题知，△RMT 为等边三角形，

∴$\angle MRQ=60°$，

∴$QM=2\times\sin60°=\sqrt{3}$，

由勾股定理得，$OQ=\sqrt{\sqrt{3}^2-1^2}=\sqrt{2}$，

根据图形的对称性可知，b 的值为 $\pm\sqrt{2}$.

【点评】本题考查了垂径定理，一次函数的解析式和性质，特殊角的三角函数值，勾股定理，熟练掌握圆的性质，灵活运用特殊角的三角函数值是解题的关键.

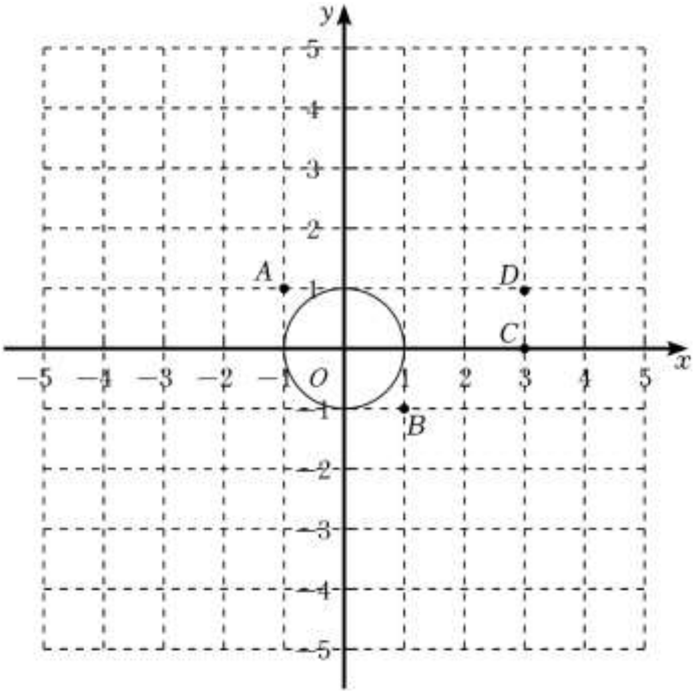
5.（2022•丰台区一模）在平面直角坐标系 xOy 中，⊙O 的半径为 1，T（0，t）为 y 轴上一点，P 为平面上一点．给出如下定义：若在⊙O 上存在一点 Q，使得△TQP 是等腰直角三角形，且∠TQP＝90°，则称点 P 为⊙O 的“等直点”，△TQP 为⊙O 的“等直三角形”．

（1）如图，点 A，B，C，D 的横、纵坐标都是整数．

①当 t＝2 时，在点 A，B，C，D 中，⊙O 的“等直点”是 <u>A，B，D</u>；

②当 t＝3 时，若△TQP 是⊙O“等直三角形”，且点 P，Q 都在第一象限，求$\frac{CP}{OQ}$的值．

（2）若直线 y＝x+3 上存在⊙O 的“等直点”，直接写出 t 的取值范围．



【分析】（1）①根据“等直点”的定义，利用图象法判断即可；

②如图 2 中，连接 CT，PT．证明△CTP∽△OTQ，可得结论；

（2）分两种情形：如图 3 中，当点 T 在 y 轴的负半轴上，点 P 在 PQ 的左侧时，在 x 轴的负半轴上取一点 F，使得 OT＝OF，连接 FT，PF．如图 4 中，当点 T 在 y 轴的正半轴上，点 P 在 PQ 的左侧时，在 y 轴的负半轴上取一点 F，使得 OT＝OF，连接 FT，PF．判断出点 P 的运动轨迹，再根据直线与圆的位置关系，利用图象法，可得结论．

【解答】解：（1）①如图 1 中，观察图象可知点 A，B 是，⊙O 的“等直点”，

故答案为：A，B，D；

②如图 2 中，连接 CT，PT.

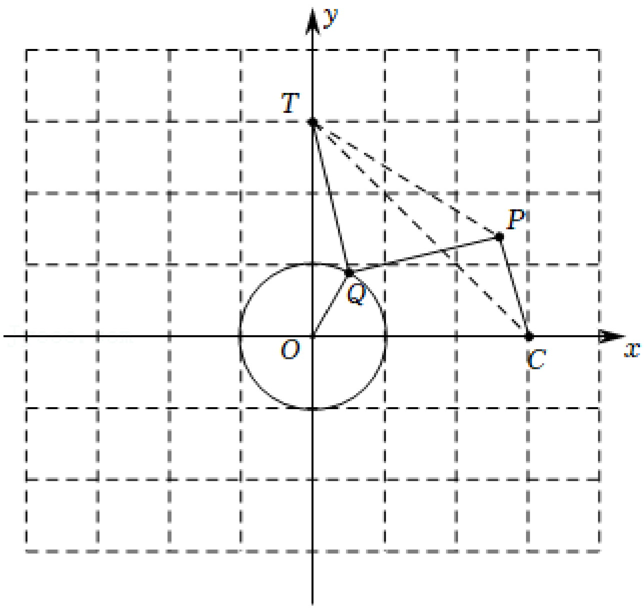


图2

∵$OT=OC=3$，

∴△TOC 是等腰直角三角形，

∴$TC=\sqrt{2}TO$，$\angle OTC=45°$，

∵$QT=QP$，$\angle TQP=90°$，

∴△TQP 是等腰直角三角形，

∴$TP=\sqrt{2}TQ$，$\angle QTP=45°$，

∴$\angle OTC=\angle QTP$，

∴$\angle OTQ=\angle CTP$，

∵$\frac{CT}{OT}=\frac{TP}{TQ}=\sqrt{2}$，

∴△CTP∽△OTQ，

∴$\frac{CP}{CQ}=\frac{CT}{OT}=\sqrt{2}$；

（2）如图 3 中，当点 T 在 y 轴的负半轴上，点 P 在 PQ 的左侧时，在 x 轴的负半轴上取一点 F，使得 $OT=OF$，连接 FT，PF.

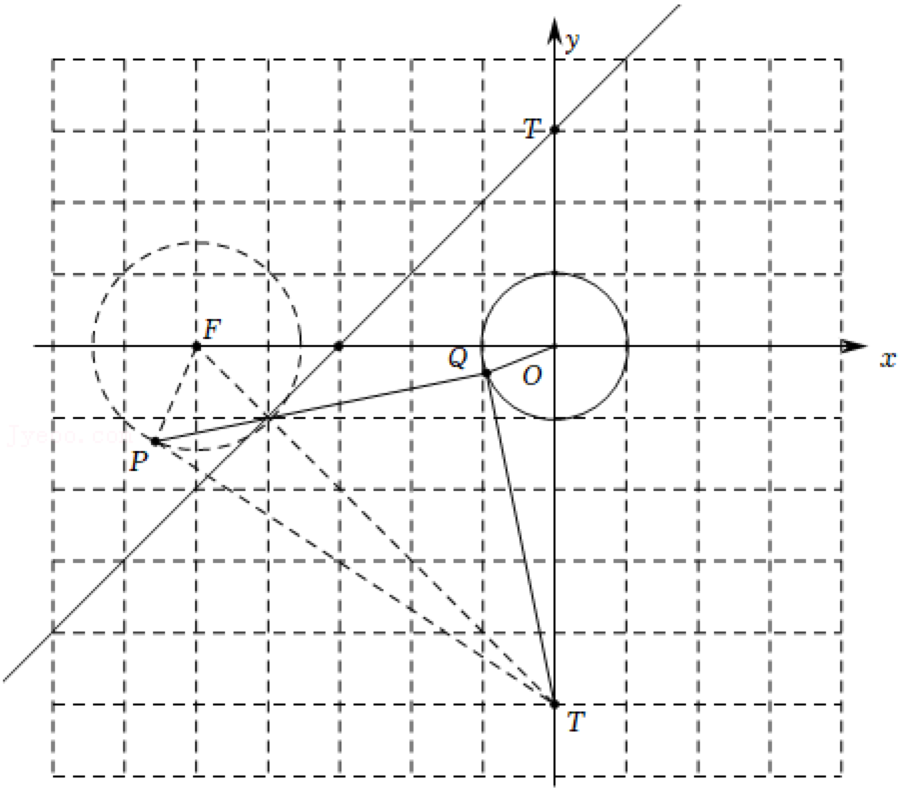


图3

同法可证△TFP∽△TOQ，

∴$\frac{FP}{OQ}=\frac{TF}{OF}=\sqrt{2}$，

∵$OQ=1$，

∴$PF=\sqrt{2}$，

∴点 P 的运动轨迹是以 F 为圆心，$\sqrt{2}$为半圆的圆，

∴当 F（﹣1，0）或（﹣5，0）时，⊙F 与直线 $y=x+3$ 相切，

此时 T（0，﹣1）或（0，﹣5），

观察图形可知，当﹣5≤t≤﹣1 时，直线 $y=x+3$ 上存在⊙O 的“等直点”.

如图 4 中，当点 T 在 y 轴的正半轴上，点 P 在 PQ 的左侧时，在 x 轴的负半轴上取一点 F，使得 $OT=OF$，连接 FT，PF.

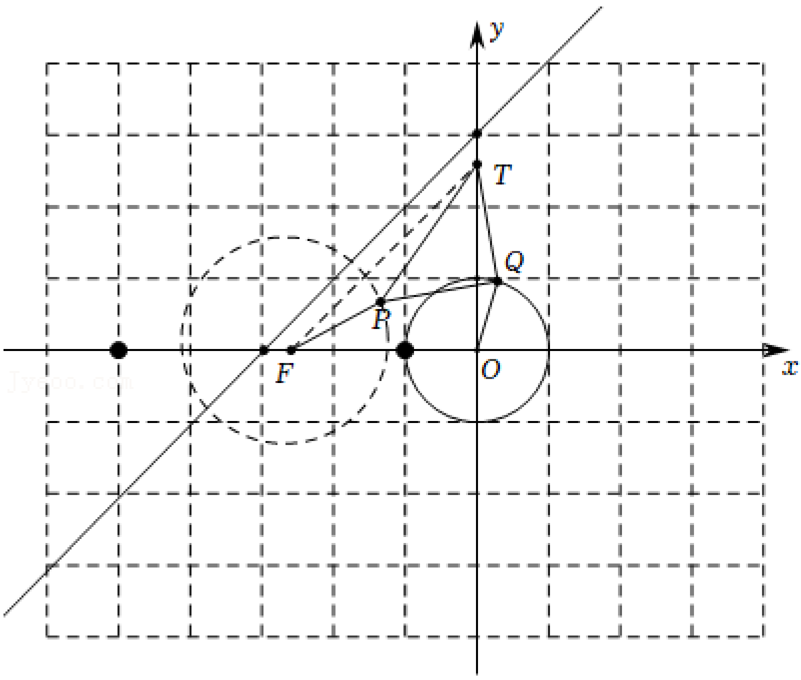


图4

同法可证△TFP∽△TOQ，

∴$\frac{FP}{OQ}=\frac{TF}{OF}=\sqrt{2}$，

∵$OQ=1$，

∴$PF=\sqrt{2}$，

∴点 P 的运动轨迹是以 F 为圆心，$\sqrt{2}$为半圆的圆，

∴当 F（﹣1，0）或（﹣5，0）时，⊙F 与直线 $y=x+3$ 相切，

此时 T（0，1）或（0，5），

观察图形可知，当 $1\leqslant t\leqslant 5$ 时，直线 $y=x+3$ 上存在⊙O 的“等直点”.

综上所述，满足条件的 t 的值为：$-5\leqslant t\leqslant -1$ 或 $1\leqslant t\leqslant 5$.

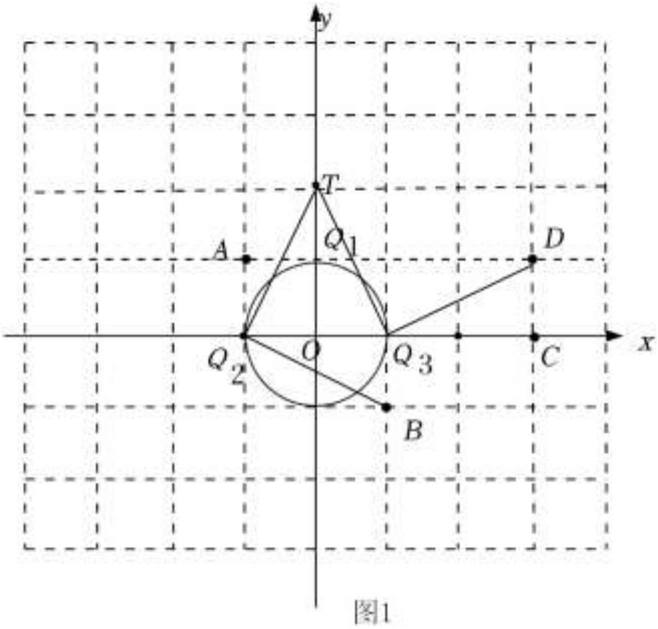


图1

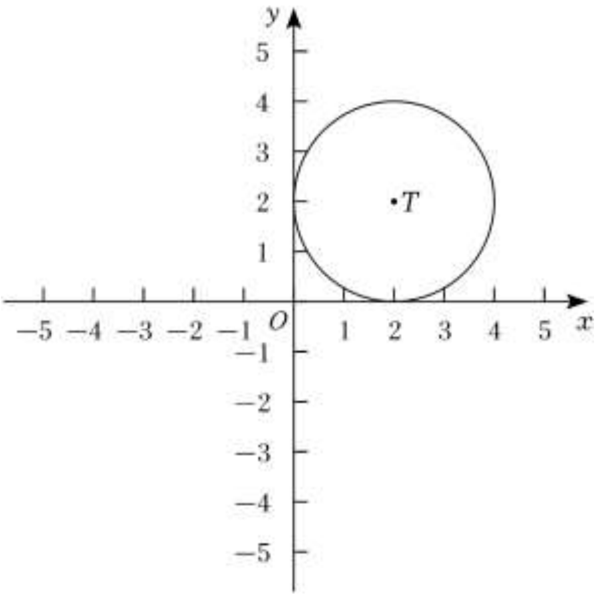
【点评】本题属于圆综合题，考查了直线与圆的位置关系，“等直点”和“等直三角形”的定义等知识，解题的关键是理解题意，学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考压轴题．

6．（2022•石景山区一模）在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 不在坐标轴上，点 P 关于 x 轴的对称点为 P_1，点 P 关于 y 轴的对称点为 P_2，称$\triangle P_1PP_2$ 为点 P 的“关联三角形”．

（1）已知点 A（1，2），求点 A 的“关联三角形”的面积；

（2）如图，已知点 B（m，m），$\odot T$ 的圆心为 T（2，2），半径为 2．若点 B 的“关联三角形”与$\odot T$ 有公共点，直接写出 m 的取值范围；

（3）已知$\odot O$ 的半径为 r，$OP=2r$，若点 P 的“关联三角形”与$\odot O$ 有四个公共点，直接写出$\angle PP_1P_2$ 的取值范围．



【分析】（1）根据 x 轴，y 轴对称，求出相应的对称点坐标，根据三角形面积公式求出面积即可；

（2）四边形 $OADC$ 是⊙T 的外接四边形，Q 求出点 D 的坐标，即可判断；

（3）分两种情形：当 PP_2 与⊙O 相切于点 E 时，如图 2 中，当 $PP1$ 与⊙O 相切于点 F 时，如图 3 中，分别求解即可.

【解答】解：（1）∵点 A（1，2）关于 x 轴对称的对称点（1，－2），点 A 关于 yz 轴对称的点 A_2（－1，2），

∴ $S_{\triangle AA_1A_2}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$；

（2）∵⊙T 的圆心为 T（2，2），半径为 2，

∴四边形 $OADC$ 是⊙T 的外接四边形（如图 1 中），

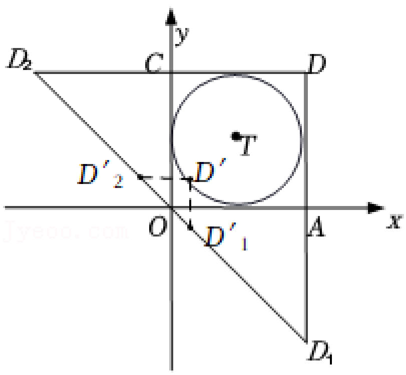


图1

∴D（4，4），

∵点 B 的“关联三角形”与⊙T 有公共点，且 B（m，m），

∴$2-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant 4$；

（3）当 PP_2 与⊙O 相切于点 E 时，如图 2 中，

∵$OE=r$，$OP=2r$，

∴$\angle OPE=30°$，

∴$\angle OPP_1=\angle OP_1P=60°$，

∴当 $60°<\angle OP_1P<90°$ 时，点 P 的“关联三角形”与⊙O 有四个公共点.

当 PP_1 与⊙O 相切于点 F 时，如图 3 中，

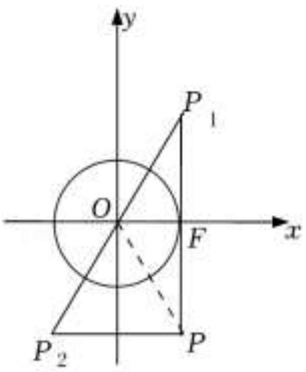


图3

∵$OF=r$，$OP=2r$，

∴$\angle OPF=\angle OP_1P=30°$，

∴当 $0°<\angle OP_1P<30°$ 时，点 P 的“关联三角形”与⊙O 有四个公共点，

综上所述，点 P 的“关联三角形”与⊙O 有四个公共点，$\angle PP_1P_2$ 的取值范围为：$0°<\angle OP_1P<30°$ 或 $60°<\angle OP_1P<90°$.

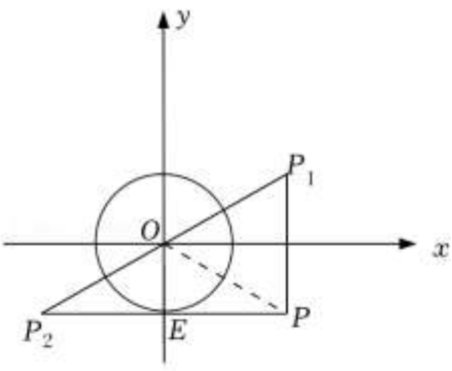


图 2

【点评】本题属于四边形综合题，考查了直线与圆的位置关系，三角形的面积，点 P 的