第2章　导数与微分

BACK

2.1 导 数 的 概 念

2.1.1 引例

引例1(变速直线运动的速度)设一物体做变速直线运动，运动方程为$s=s(t)$，现求其在某一时刻t_0的瞬时速度v_0.

设时间t由t_0变化到$t_0+\Delta t$，则时间t的增量为Δt. 相应地，路程增量为$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$. 于是，这段时间内的平均速度为 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$. 显然，当时间增量$\Delta t$很小时，平均速递就可以近似地表示物体在$t_0$时刻的瞬时速度，并且$\Delta t$越小，近似的精确度越高. 因此，当$\Delta t\to 0$时，如果极限 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 存在，则这个极限就表示了物体在t_0时刻的瞬时速度，即

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

例1 已知物体做自由落体运动，运动方程为

$$s=(1/2)gt^2$$

求任意时刻t_0的瞬时速度v_0.

解 给时间t在t_0时刻以增量Δt，则相应的路程增量为

$$\Delta s=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0{}^2 \;=gt_0\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$

于是，这段时间内的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t$$

令$\Delta t\to 0$，则t_0时刻的瞬时速度为

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt_0$$

引例2(平面曲线的切线斜率) 设曲线$y=f(x)$上有一定点M_0 (x_0, y_0)，求曲线在该点的切线斜率.

如图2-1所示，在曲线$y=f(x)$上任取一动点$M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，作割线$M_0M$，当动点$M$沿着曲线无限趋近于定点$M_0$时，割线$M_0M$的极限位置$M_0T$就定义为曲线在点$M_0$处的切线，过$M_0$且与切线垂直的直线称为曲线在点$M_0$处的法线. 由于割线$M_0M$的斜率为

$$k_{M_0M}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

故令$\Delta x\to 0$，则过点M_0的切线斜率为

$$k_{M_0T}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

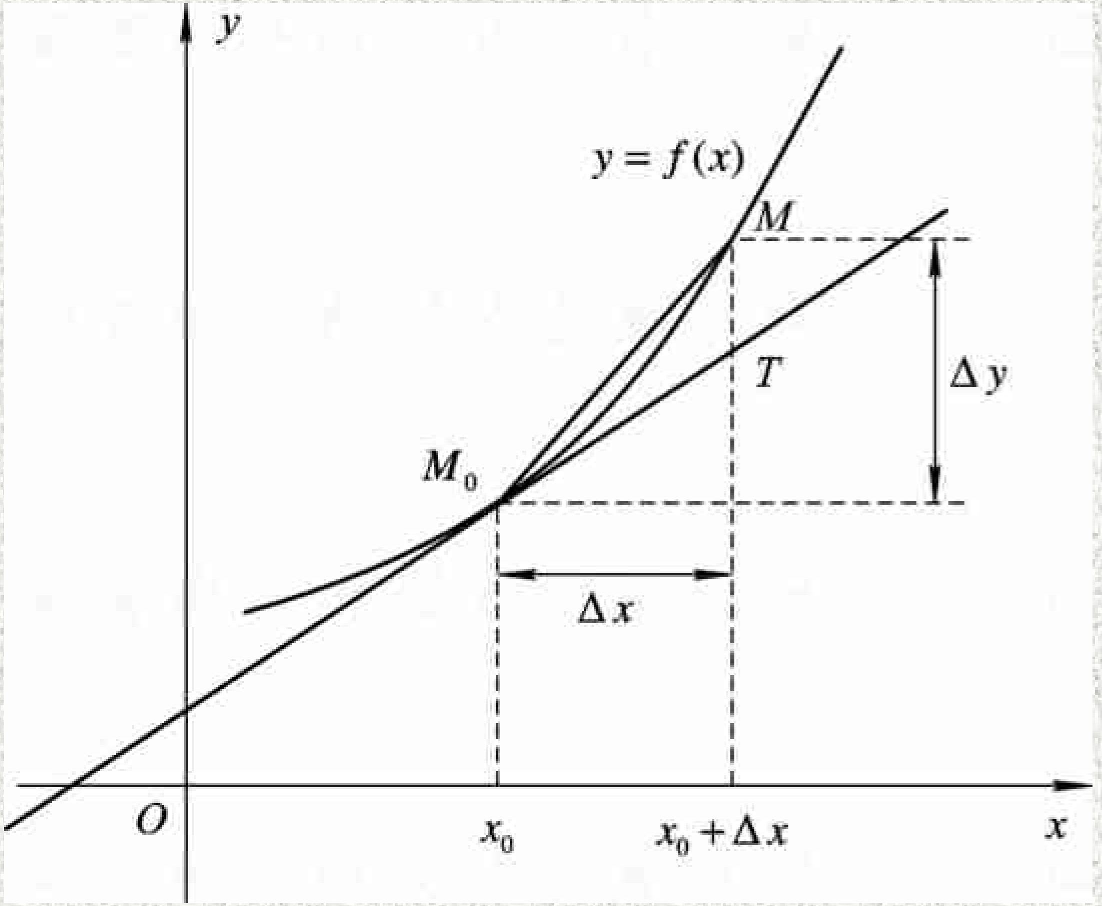

图2-1

引例3(边际成本问题) 设某产品的总成本C是产量Q的函数：$C=C(Q)$，求产量为Q_0时，总成本的变化率.

当产量Q由Q_0变化到$Q_0+\Delta Q$时，总成本的改变量为$\Delta C=C(Q_0+\Delta Q)-C(Q_0)$于是总成本的平均变化率为

$$\frac{\Delta C}{\Delta Q}=\frac{C(Q_0+\Delta Q)-C(Q_0)}{\Delta Q}$$

当ΔQ很小时，上式可近似表示总成本在Q_0的变化率，并且ΔQ越小，近似程度越高，故令$\Delta Q\to 0$，可得总成本的变化率为

$$\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta Q}=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{C(Q_0+\Delta Q)-C(Q_0)}{\Delta Q}$$

在经济学中，总成本的变化率也称为边际成本.

2.1.2 导数的概念

1. 导数的定义

定义2.1 设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，当自变量x在点x_0处取得增量$\Delta x(\neq 0)$时，函数$f(x)$有相应的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果当$\Delta x\to 0$时，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称$f(x)$在点x_0处可导，并将此极限称为函数$y=f(x)$在点x_0处的导数，记作$f'(x_0)$或$y'(x_0)$或$(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)|_x=x_0$或$(\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x)|_x=x_0$.

如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$不存在，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处不可导.

例2 求函数$y=3x^2-x+1$在$x^0=2$处的导数.

解 给自变量x在$x^0=2$处以增量Δx，则函数相应的增量为

$$\Delta y=3(2+\Delta x)^2-(2+\Delta x)+1-11$$
$$=3(\Delta x)^2+11\Delta x$$

于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3\Delta x+11$$

故有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3\Delta x+11\right)=11$$

即

$$f'(2)=11$$

定义2.2 如果函数$y=f(x)$在区间$(a，b)$内的每一点都可导，则称函数$f(x)$在区间$(a，b)$内可导.

如果函数$f(x)$在区间$(a，b)$内可导，则对于任意$x\in(a，b)$，都有一个确定的导数值$f'(x)$与之对应，这样就确定了一个新函数. 我们称这个新函数为函数$y=f(x)$在区间$(a，b)$内的导函数，简称导数，记作y'或$f'(x)$或$(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)$或$(\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x)$.

注 函数在点x_0处的导数等于其导函数在该点的函数值.

有了导数的概念后，2.1.1节中所讲的三个引例就可以用导数来表示，它们分别表示了导数在物理、几何、经济方面的意义：

导数的物理意义——瞬时速度，即$v(t)=s'(t)$；

导数的几何意义——切线斜率，即$k_{切}=f'(x)$；

导数的经济意义——边际成本，即$MC=C'(Q)$.

根据导数的定义，求函数$f(x)$的导数的一般步骤如下：

(1) 求函数$f(x)$的增量：$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

(2) 求比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

(3) 取极限：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

例3 求函数$y=c$(c为常数)的导数.

解 (1) 求增量:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0$$

(2) 求比值:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

(3) 取极限:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

故有

$$c'=0$$

例4 求函数$y=x^2$的导数.

解 (1) 求增量:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

(2) 求比值:

$$(\Delta y/\Delta x)=2x+\Delta x$$

(3) 取极限:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x + \Delta x\right) = 2x$$

故有

$$(x^2)'=2x$$

一般地，对于幂函数$y=x^a$的导数，有如下公式:

$$(x^a)'=ax^{a-1} \quad (\text{其中}a\text{为任意常数})$$

例5 求函数$y=\sin x$的导数.

解 (1) 求增量:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x \quad =2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

(2) 求比值:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

故有

$$(\sin x)'=\cos x$$

类似地，可以得到

$$(\cos x)'=-\sin x$$

例6 求对数函数$y=\log_a x(a>0，a\neq 1)$的导数.

解 (1) 求增量:

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})$$

(2) 求比值: $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

(3) 取极限:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

故有

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

一般地,

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

例7(边际利润) 在经济数学中，边际利润定义为产量增加一个单位时所增加的利润.

设某产品产量为Q个单位时总利润为$L=L(Q)$，当产量由Q变为$Q+\Delta Q$时，总利润函数的改变量为

$$\Delta L=L(Q+\Delta Q)-L(Q)$$

总利润函数的平均变化率为

$$\frac{\Delta L}{\Delta Q}=\frac{L(Q+\Delta Q)-L(Q)}{\Delta Q}$$

它表示产量由Q变到$Q+\Delta Q$时，在平均意义下的边际利润.

当总利润函数$L=L(Q)$可导时，其变化率

$$L'(Q)=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{\Delta L}{\Delta Q}=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{L(Q+\Delta Q)-L(Q)}{\Delta Q}$$

表示该产品产量为Q时的边际利润，即边际利润是总利润函数关于产量的导数.

类似地，在经济数学中，边际成本定义为多生产一个单位产品所增加的成本投入，即$C'(Q)$，这里$C(Q)$表示生产量为Q时的总成本投入.

2. 左、右导数

由于导数本身就是极限，而极限存在的充要条件是左、右极限存在且相等，因此，极限:

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

分别称为函数$y=f(x)$在点x_0处的左导数和右导数，分别记为$f'_-(x_0)$和$f'_+(x_0)$.

于是，有如下定理.

定理2.1 函数$f(x)$在点x_0处可导的充要条件是$f(x)$在点x_0处的左、右导数存在且相等.

例8 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<1\\ x^2, & x\geq 1\end{cases}$，试讨论$f(x)$在点$x=1$处是否可导.

解 由于

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1-1}{x-1}=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

故 $f'(1)=2$

2.1.3 导数的几何意义

由引例2可知，函数$y=f(x)$在点x_0处的导数就是它所表示的曲线在点$M_0(x_0，y_0)$处的切线MT的斜率，即$k=f'(x_0)$

于是，曲线$y=f(x)$在点$M_0(x_0，y_0)$处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

若$f'(x_0)\neq 0$，则曲线$y=f(x)$在点$M_0(x_0，y_0)$处的法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

例9 求抛物线$y=x^3$在点(1，1)处的切线和法线方程.

解 因为$y'=3x^2$，由导数的几何意义可知，曲线$y=x^3$在点(1，1)处的切线斜率为

$$k=y'|_{x=1}=3$$

故所求切线方程为

$$y-1=3(x-1)$$

法线方程为

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-1)$$

2.1.4 可导与连续的关系

设函数$y=f(x)$在点x_0处可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，由极限的运算法则得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$$

由函数连续性的定义可知，$f(x)$在点x_0处连续，故有如下结论.

定理2.2 如果函数$y=f(x)$在点x_0处可导，那么它在点x_0处一定连续. 反之，逆命题不一定成立.

例10 讨论函数 $y=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 在点$x=0$处的连续性与可导性.

解 如图2-2所示，因为

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|\Delta x|$$

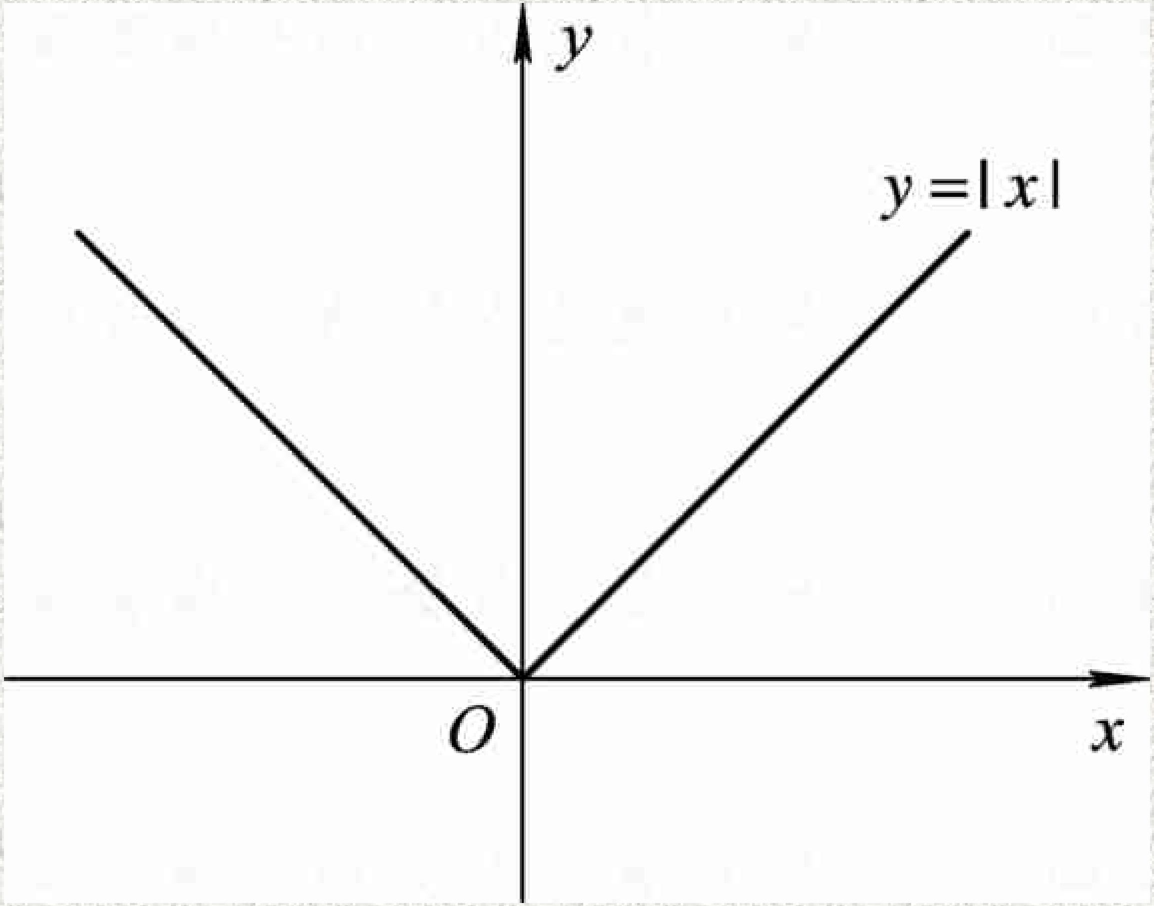

图2-2

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0$$

故 $y=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 处连续.

又因为

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$$

显然左、右导数存在但不相等，故函数在点x=0处不可导.

因此，函数连续是可导的必要而非充分条件.

2.2 导 数 的 运 算

2.2.1 导数的四则运算法则

定理2.3 如果函数$u=u(x)$、$v=v(x)$都在点x处可导，则函数$u(x)\pm v(x)$、$u(x)v(x)$、$[u(x)/v(x)](v(x)\neq 0)$也在点x处可导，且有

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$，其中$v(x)\neq 0$.

例1 求函数$y=x^2+(3/x)-\ln x+\sin a$的导数.

解 $$y'=(x^2)'+\left(\frac{3}{x}\right)'-(\ln x)'+(\sin a)=2x-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}$$

例2 求函数$y=(x^3+2x)\cos x$的导数.

解

$$y'=(x^3+2x)'\cos x+(x^3+2x)(\cos x)'$$

$$=(3x^2+2)\cos x-(x^3+2x)\sin x$$

$$=3x^2\cos x+2\cos x-x^3\sin x-2x\sin x$$

例3 求函数$y=\tan x$的导数.

解

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即 $$(\tan x)'=\sec^2 x$$

类似地，可得

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

例4 设$f(x)=(e^x \cos x/x^2)$，求$f'(x)$.

解

$$f'(x) = \frac{(e^x \cos x)' x^2 - (e^x \cos x)(x^2)'}{x^4}$$

$$= \frac{(e^x \cos x - e^x \sin x) x^2 - (e^x \cos x) 2x}{x^4}$$

$$= \frac{e^x (x \cos x - x \sin x - 2 \cos x)}{x^3}$$

2.2.2 反函数的求导法则

定理2.4 如果单调连续函数$x=g(y)$在点y处可导，且$g'(y)\neq 0$，则其反函数$y=f(x)$在对应点x处也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)} \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

例5 求$y=a^x(a>0，a\neq 1)$的导数.

解 因为$y=a^x$是$x=\log_a y$的反函数，且有

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y\ln a}$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=y\ln a=a^x\ln a$$