广西壮族自治区柳州市2025届高三第一次模拟考试数学试题

学校:_____姓名：_____班级：_____考号：_____

一、单选题

1．已知复数$z=1+\mathrm{i}$，则$\frac{1}{z}$的虚部为（　）.

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{\mathrm{i}}{2}$　　D．$\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$

2．对于非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，“$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的（　）.

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

二、未知

3．已知双曲线$C:\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{m}=1$的一条渐近线方程为$y=-\sqrt{2}x$，则$m=$（　）

A．1　　B．2　　C．8　　D．16

4．若过点$\left(2\sqrt{3},0\right)$与圆$x^2+y^2=4$相切的两条直线的夹角为α，则$\cos\alpha=$（　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

三、单选题

5．在平面直角坐标系中，点A,B的坐标分别是$(-5,0)$，$(5,0)$，直线AM，BM相交于点M，且它们的斜率之积是$\frac{4}{9}$，则点M的轨迹方程为（　）.

A．$\frac{x^2}{25}-\frac{9y^2}{100}=1\left(x\neq\pm5\right)$　　B．$\frac{x^2}{25}-\frac{3y^2}{100}=1\left(x\neq\pm5\right)$

C．$\frac{y^2}{25}-\frac{3x^2}{100}=1\left(x\neq\pm5\right)$　　D．$\frac{y^2}{25}-\frac{9x^2}{100}=1\left(x\neq\pm5\right)$

四、未知

6．设函数$f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)\left(\omega>0\right)$，已知$f\left(x_1\right)=-1$，$f\left(x_2\right)=1$，且$\left|x_1-x_2\right|$的最小值为$\frac{\pi}{4}$，则$\omega=$（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

五、单选题

7．已知正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{7\sqrt{6}}{3}$，$AB=2$，$A_1B_1=1$，则 AA_1 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．4

8．设函数 $f(x)=x\ln x-(a+b)\ln x$，若 $f(x)\geq 0$，则 5^a+5^b 的最小值为（　）

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{5}$

六、多选题

9．已知随机变量 X 服从正态分布，即 $X\sim N(3,9)$，则（　）.

A．$E(X)=27$　　B．$D(X)=9$

C．$P(X\geq 8)>P(X\leq -1)$　　D．$P(X\leq 1)+P(X\leq 5)=1$

10．过抛物线 E：$y^2=2px(p>0)$的焦点 F 作倾斜角为 θ 的直线交 E 于 A，B 两点，经过点 A 和原点 O 的直线交抛物线的准线于点 D，则下列说法正确的是（　）.

A．$BD//OF$　　B．$OA\perp OB$

C．以 AF 为直径的圆与 y 轴相切　　D．$|AF||BF|=\frac{p^2}{\sin^2\theta}$

11．我们知道，函数 $y=f(x)$ 的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x)$ 为奇函数，有同学发现可以将其推广为：函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数．已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数，其导函数为 $g(x)$，若函数 $y=f(x+1)-1$ 是奇函数，函数 $y=g(x+2)$ 为偶函数，则下列说法错误的是（　）

A．$f(1)=1$　　B．$g(1)=1$

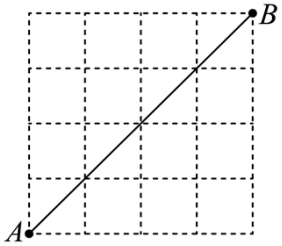
C．$y=f(x+2)-1$ 为奇函数　　D．$\sum_{i=1}^{2024}f(i)=1012$

七、填空题

12．已知$x^2+2x-1=0$，则$x^2+\dfrac{1}{x^2}=$_____.

13．在$\left(\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{x^3}{3}\right)^8$的展开式中，常数项为_____.

14．如图，在4×4的格子中，有一只蚂蚁从A点爬到B点，每次只能向右或向上移动一格，则从A点爬到B点的所有路径总数为_____，若蚂蚁只在下三角形（对角线AB及以下的部分所围成的三角形）行走，则从A点到B点的所有总路径数为_____.



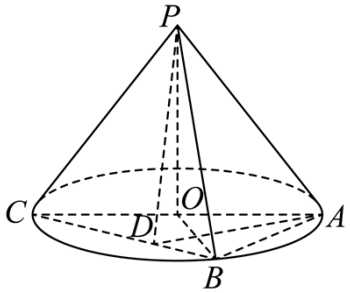
八、解答题

15．记$\triangle ABC$内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sqrt{3}\sin A-\cos A=2$.

(1)求A；

(2)若$a=2$，$\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求$\triangle ABC$的周长.

16．如图，在圆锥PO中，AC为圆锥底面的直径，B为底面圆周上一点，点D在线段BC上，$AC=2AB=4$，$CD=2DB$.



(1)证明：$AD\perp$平面BOP；

(2)若圆锥PO的侧面积为8π，求二面角$O-BP-A$的正弦值.

17．已知函数$f(x)=ax-\ln x-\dfrac{1}{a}$.

(1)当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程；

(2)若$f(x)$有极小值，且极小值小于0，求a的取值范围.

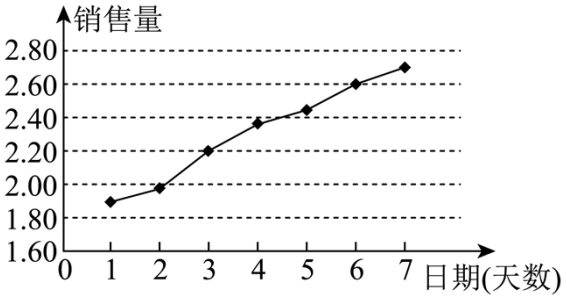
18．在平面直角坐标系xOy中，P为直线$y=2$上一动点，椭圆E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

的左右顶点分别为$M\left(-\sqrt{2},0\right)$，$N\left(\sqrt{2},0\right)$，上、下顶点分别为$T\left(0,1\right)$，$S\left(0,-1\right)$．若直线$PT$交$E$于另一点A，直线$PS$交$E$于另一点$B$．

(1)求证：直线AB过定点，并求出定点坐标；

(2)求四边形$ASBT$面积的最大值．

19．某购物平台为了吸引更多的顾客在线购物，推出了A和B两个套餐服务，并在购物平台上推出了优惠券活动，顾客可自由选择A和B两个套餐之一，下图是该购物平台7天销售优惠券的情况（单位：千张）的折线图：



(1)由折线图可看出，可用回归模型拟合y与t的关系，请用相关系数加以说明；

(2)假设每位顾客选择A套餐的概率为$\frac{1}{3}$，选择B套餐的概率为$\frac{2}{3}$，其中A包含一张优惠券，B套餐包含两张优惠券，截止某一时刻，该平台恰好销售了n张优惠券，设其概率为P_n，求P_n；

(3)记（2）中所得概率P_n的值构成数列$\left\{P_n\right\}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，求数列$\left\{P_n\right\}$的最值．

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7}y_i=16.17$，$\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i=68.35$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}=0.72$，$\sqrt{7}=2.646$

参考公式：相关系数$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)^2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$

参考答案：

题号	1	2	5	7	8	9	10	11		
答案	A	A	A	C	D	BD	ACD	BCD		

1．A

【分析】由复数的乘法和除法运算化简复数，即可得出答案.

【详解】因为$z=1+\mathrm{i}$，所以$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1-\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，

所以$\frac{1}{z}$的虚部为$-\frac{1}{2}$.

故选：A.

2．A

【分析】根据相反向量一定是共线向量，共线向量不一定是相反向量可求解.

【详解】对于非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，因为$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$，

所以$\vec{a}=-\vec{b}$，则$\vec{a}//\vec{b}$，

即“$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$”能推出$\vec{a}//\vec{b}$，

但当$\vec{a}//\vec{b}$时，$\vec{a}=\lambda\vec{b}(\lambda\neq 0)$，显然$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ 不一定成立，

所以“$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的充分不必要条件.

故选：A.

3．B

【分析】对于双曲线C，求出a、b，根据$\frac{a}{b}=\sqrt{2}$可求出m的值.

【详解】因为双曲线$C:\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{m}=1$的一条渐近线方程为$y=-\sqrt{2}x$，则$m>0$，

且$a=2$，$b=\sqrt{m}$，则$\frac{a}{b}=\frac{2}{\sqrt{m}}=\sqrt{2}$，解得$m=2$.

故选：B.

4．C

【分析】分析可知，切线的斜率存在，设切线的方程为$y=k\left(x-2\sqrt{3}\right)$，利用圆心到切线的距离等于半径求出$k$的值，再利用二倍角的余弦公式、弦化切可求得$\cos\alpha$的值.

【详解】圆$x^2+y^2=4$的圆心为原点，半径为2，

若切线的斜率不存在，则直线的方程为$x=2\sqrt{3}$，且该直线与圆$x^2+y^2=4$相离，不合乎题意，

所以，切线的斜率存在，设切线的方程为$y=k\left(x-2\sqrt{3}\right)$，即$kx-y-2\sqrt{3}k=0$，

则$\frac{\left|2\sqrt{3}k\right|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

不妨设直线$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-2\sqrt{3}\right)$的倾斜角为$\theta$，因为$\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，则$0<\theta<\frac{\pi}{4}$，则

$0<2\theta<\frac{\pi}{2}$，

所以，$\alpha=2\theta$，故$\cos\alpha=\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$.

故选：C.

5．A

【分析】设点$M(x,y)$,由题意列出方程，化简整理即得点M的轨迹方程.

【详解】依题意，设点$M(x,y)$，由$k_{AM}\cdot k_{BM}=\frac{y}{x+5}\cdot\frac{y}{x-5}=\frac{y^2}{x^2-25}=\frac{4}{9},(x\neq\pm5)$，

可得$4x^2-9y^2=100,(x\neq\pm5)$，即得点$M$的轨迹方程为$\frac{x^2}{25}-\frac{9y^2}{100}=1\left(x\neq\pm5\right)$.

故选：A.

6．D

【分析】根据题意求出函数$f\left(x\right)$的最小正周期，再利用余弦型函数的周期公式可求得ω的值.

【详解】设函数$f\left(x\right)$的最小正周期为T，

因为函数$f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)\left(\omega>0\right)$，已知$f\left(x_1\right)=-1$，$f\left(x_2\right)=1$，且$\left|x_1-x_2\right|$的最小值为$\frac{\pi}{4}$，

则$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{4}$，可得$T=\frac{\pi}{2}$，故$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

故选：D.

7．C

【分析】根据体积求出正四棱台的高h，分别取AC,A_1C_1的中点O,O_1，过A_1作$A_1E\parallel OO_1$交AC于E，则$\angle A_1AE$为AA_1与底面$ABCD$所成的角，求解即可.

【详解】$\because A_1B_1=1$，$AB=2$，$\therefore$上，下底面的面积分别为$S_1=1^2=1,S_2=2^2=4$，

设正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的高为h，

则其体积为$V=\frac{1}{3}\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)h=\frac{1}{3}\left(1+4+\sqrt{1\times4}\right)h=\frac{7\sqrt{6}}{3}$，解得$h=\sqrt{6}$，

连接AC,A_1C_1，分别取AC,A_1C_1的中点O,O_1，

$\because OO_1\perp$面$ABCD$，$AC\subset$面$ABCD$，$\therefore OO_1\perp AC$，

过A_1作$A_1E\parallel OO_1$交AC于E，则$A_1E\perp AC$，$A_1E\perp$面$ABCD$，

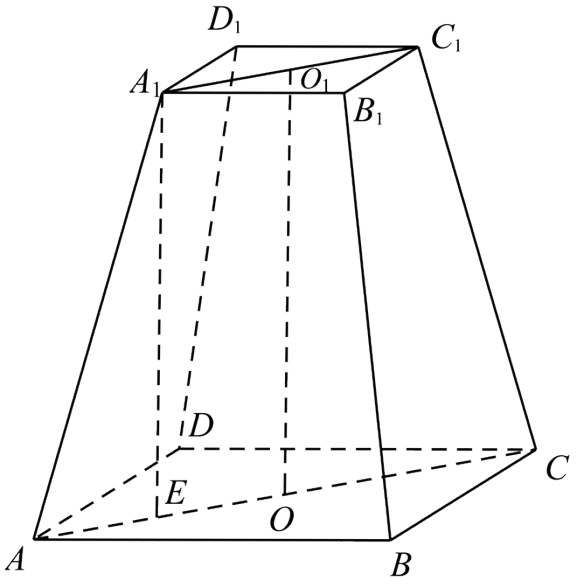
$\therefore\angle A_1AE$为AA_1与底面$ABCD$所成的角，

$\because AE=AO-A_1O_1=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$A_1E=OO_1=h=\sqrt{6}$，

$\therefore\tan\angle A_1AE=\frac{A_1E}{AE}=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{3}$，

即AA_1与底面$ABCD$所成角的正切值为$2\sqrt{3}$.

故选：C.



8．D

【分析】分类讨论求出$a+b$的值，然后利用基本不等式可求得5^a+5^b的最小值.

【详解】因为$f\left(x\right)=x\ln x-\left(a+b\right)\ln x=\left(x-a-b\right)\ln x$，

若$a+b\le0$，则对任意的$x>0$，$x-a-b>0$，

则当$0<x<1$时，$f(x)=(x-a-b)\ln x<0$，不合乎题意；

若$0<a+b<1$时，当$a+b<x<1$时，$x-a-b>0$，$\ln x<0$，此时，

$f(x)=(x-a-b)\ln x<0$，不合乎题意；

若$a+b>1$，则当$1<x<a+b$时，$x-a-b<0$，$\ln x>0$，此时，$f(x)=(x-a-b)\ln x<0$，

不合乎题意.

所以，$a+b=1$，此时，$f(x)=(x-1)\ln x$，则$f(1)=0$，

当$0<x<1$时，$x-1<0$，$\ln x<0$，此时，$f(x)=(x-1)\ln x>0$；

当$x>1$时，$x-1>0$，$\ln x>0$，此时，$f(x)=(x-1)\ln x>0$.

所以，对任意的$x>0$，$f(x)=(x-1)\ln x\geq 0$，合乎题意，

由基本不等式可得$5^a+5^b\geq 2\sqrt{5^a\cdot 5^b}=2\sqrt{5^{a+b}}=2\sqrt{5}$，

当且仅当$\begin{cases}a=b\\a+b=1\end{cases}$时，即当$a=b=\dfrac{1}{2}$时，等号成立，

故5^a+5^b的最小值为$2\sqrt{5}$.

故选：D.

【点睛】易错点睛：利用基本不等式求最值时，要注意其必须满足的三个条件：

（1）“一正二定三相等”“一正”就是各项必须为正数；

（2）“二定”就是要求和的最小值，必须把构成和的二项之积转化成定值；要求积的最大值，则必须把构成积的因式的和转化成定值；

（3）“三相等”是利用基本不等式求最值时，必须验证等号成立的条件，若不能取等号则这个定值就不是所求的最值，这也是最容易发生错误的地方.

9．BD

【分析】由正态分布概念、组成的理解和正态分布曲线的对称性逐一判断即得.

【详解】由$X\sim N(3,9)$可得，$E(X)=3,D(X)=9$，故 A 错误；B 正确；

对于 C，因$E(X)=3$,则$P(X\geq 8)=P(X\leq -2)<P(X\leq -1)$，故 C 错误；

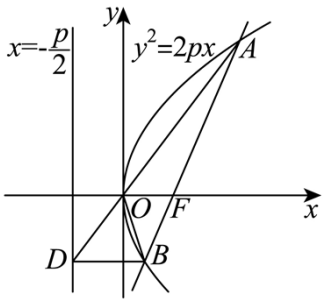
对于 D，因$E(X)=3$，则$P(X\leq 1)=P(X\geq 5)$,故$P(X\leq 1)+P(X\leq 5)=1$，即 D 正确.

故选：BD.

10．ACD

【分析】设直线 l 的方程为 $x=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}y+\dfrac{p}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将该直线的方程与抛物线的方程联立，结合韦达定理可判断 B；设 $D(x_3,y_3)$，由 $y_2-y_3=0$ 可判断 A；比较半径 $\dfrac{|AF|}{2}$ 与圆心到 y 轴的距离即可判断 C；由抛物线的定义表示出 $|AF||BF|$，将韦达定理代入化简可判断 D.

【详解】由题意可设过点 $F(\dfrac{p}{2},0)$ 的直线 l 的方程为 $x=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}y+\dfrac{p}{2}$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，



联立方程组 $\begin{cases} y^2=2px \\ x=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}y+\dfrac{p}{2} \end{cases}$，消去 y 整理得 $y^2-2p\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}y+\dfrac{p}{2}\right)=0$，

即 $y^2-2p\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}y-p^2=0$，所以 $y_1y_2=-p^2$，$y_1+y_2=2p\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$，

$$x_1+x_2=\frac{y_1^2}{2p}+\frac{y_2^2}{2p}=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{2p}=\frac{4p^2\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2+2p^2}{2p}=2p\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2+p,$$

所以 $x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot\dfrac{y_2^2}{2p}=\dfrac{p^2}{4}$，所以 $k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-4\neq-1$，故 B 错误；

设 $D(x_3,y_3)$，设直线 AO 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$，令 $x_3=-\dfrac{p}{2}$，所以 $y_3=-\dfrac{p}{2}\dfrac{y_1}{x_1}$，

$$y_2-y_3=y_2+\frac{p}{2}\frac{y_1}{x_1}=\frac{2x_1y_2+py_1}{2x_1}=\frac{2x_1\dfrac{-p^2}{y_1}+py_1}{2x_1}=\frac{-2p^2x_1+py_1^2}{2x_1y_1}=\frac{-2p^2x_1+p\cdot2px_1}{2x_1y_1}=0,$$

所以直线 BD 的斜率为 $k_{BD}=\dfrac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=0$，所以 $BD//OF$，故 A 正确.

因为 $|AF|=x_1+\dfrac{p}{2}$，所以以 AF 为直径的圆的圆心为 $\left(\dfrac{x_1+\dfrac{p}{2}}{2},\dfrac{y_1}{2}\right)$，半径为 $\dfrac{|AF|}{2}=\dfrac{x_1+\dfrac{p}{2}}{2}$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/678100041130007010