

北京市西城区 2023-2024 学年高一上学期期末考试数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

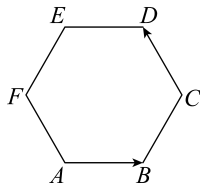
1. 已知集合 $M = \{x | x + 2 \geq 0\}$, $N = \{x | x - 1 < 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | -2 \leq x < 1\}$ B. $\{x | -2 < x \leq 1\}$
C. $\{x | x \geq -2\}$ D. $\{x | x < 1\}$

2. 已知命题 $p: \exists x < 1, x^2 \leq 1$, 则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\forall x \geq 1, x^2 \leq 1$ B. $\exists x < 1, x^2 > 1$ C. $\forall x < 1, x^2 > 1$ D. $\exists x \geq 1, x^2 > 1$

3. 如图, 在正六边形 $ABCDEF$ 中, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} =$ ()



- A. $\overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{BF}$ C. $\overrightarrow{EC}$ D. $\overrightarrow{BE}$

4. 若 $a > b$, 则 ()

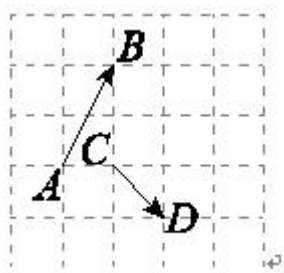
- A. $a^3 < b^3$ B. $|a| > |b|$ C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $2^{a-b} > 1$

5. 已知 $x > 0$, 则 $x - 4 + \frac{4}{x}$ 的最小值为 ()

- A. -2 B. 0 C. 1 D. $2\sqrt{2}$

6. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示, 若网格中每个小正方形的边长均为 1,

则 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| =$ ()



- A. $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. 3 D. $\sqrt{10}$

7. 已知 $3^a = 4$, $b = \log_3 \frac{9}{4}$, 则 $a + b =$ ()

- A. 9 B. 2 C. $\frac{16}{9}$ D. -2

8. 已知集合 $A = \{x | |x - 1| < 3\}$, $B = \{x | x^2 - 3x - 10 < 0\}$, 若 $a \notin A$, 且 $a \in B$, 则 a 的取

值范围是 ()

- A. $(-2, 4)$ B. $(4, 5)$ C. $[4, 5]$ D. $[4, 5)$

9. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 为非零向量, 且 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$, 则“ $|\vec{a}+\vec{b}| \geq 3$ ”是“存在实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ ”成立的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 一种细胞的分裂速度 v (单位: 个/秒) 与其年龄 t (单位: 岁) 的关系可以用下面

的分段函数来表示: $v(t) = \begin{cases} 0.5t, & 0 \leq t \leq 10, \\ \frac{2a}{b + \log_2 \frac{t}{a}}, & t > 10, \end{cases}$ 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, 而且这种细胞从诞生到死

亡, 它的分裂速度变化是连续的. 若这种细胞 5 岁和 60 岁的分裂速度相等, 则 $a \approx$ ()

(参考数据: $\log_2 3 \approx 1.585$)

- A. 6.402 B. 6.462 C. 6.502 D. 6.522

二、填空题

11. 函数 $f(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x-1}$ 的定义域为_____.

12. 下面茎叶图记录的是甲、乙两位篮球运动员在最近 5 场比赛中的得分,

甲			乙			
9	7	0	8			
2	1	1	0	1	1	5
	5	2				

则甲得分的中位数是_____, 乙得分的方差为_____.

13. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 为一组不共线的向量, 且向量 $\vec{a} = x\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, 能使得 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的一组实数 x, y 的值可以为 $x =$ _____, $y =$ _____.

14. 函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x - a, & x > 1 \\ x - a, & x \leq 1 \end{cases}$. 若 $a = 0$, 则 $f(f(2))$ 的值为____; 若 $f(x)$ 有两个零点, 则 a 的取值范围是_____.

15. 记函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在非负实数 k , 对任意的 $x \in D$, 总有

$|f(x) - f(-x)| \leq k$, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $P(k)$.

①所有偶函数都具有性质 $P(0)$;

② $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 具有性质 $P(1)$;

③若 $f(x) = x^2 + x + 1$, 则一定存在正实数 k , 使得 $f(x)$ 具有性质 $P(k)$;

④已知 $a > 0$, 若函数 $f(x) = \frac{a}{1+2^x}$ 具有性质 $P(k)$, 则 $a \in (0, k]$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x) = \frac{|x|+1}{x}$.

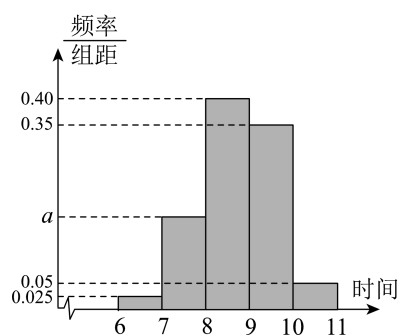
(1)判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;

(2)用函数单调性定义证明：函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数；

(3)写出函数 $f(x)$ 的值域（结论不要求证明）。

17. 每年的 3 月 21 日是世界睡眠日，充足的睡眠、均衡的饮食和适当的运动，是国际社会公认的三项健康标准.某校高一某班学生某天睡眠时间的频率分布直方图如图所示

（样本数据分组为 $[6,7), [7,8), [8,9), [9,10), [10,11]$ ，单位：小时）。



(1)求图中 a 的值，估计该校高一学生该天睡眠时间不小于 9 小时的频率；

(2)从该校高一学生中随机抽取 2 人，用频率估计概率，计算这两位学生至少有 1 人该天睡眠时间不小于 9 小时的概率。

18. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ，再从条件①、条件②、条件③中选择两个作为已知，

使 $f(x)$ 存在并且唯一，并完成下列问题.

(1) 求 a, b 的值；

(2) 已知函数 $g(x) = f(x) - (m-2)x$ 有两个不同的正数零点 x_1, x_2 .

(i) 求 m 的取值范围；

(ii) 若 $|x_1 - x_2| = 2$ ，求 m 的值.

条件①: $f(0) = 4$ ；条件②: $\forall x \in \mathbf{R}, f(1+x) = f(1-x)$ ；条件③: $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(1)$.

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

19. 2023 年 10 月 17 日至 18 日，第三届“一带一路”国际合作高峰论坛在北京举行，成为纪念“一带一路”倡议十周年最隆重的活动. 此次活动主题为“高质量共建‘一带一路’，携手实现共同发展繁荣”，而作为“一带一路”重要交通运输的中欧班列越来越繁忙. 下表是从 2018 年到 2022 年，每年中欧班列运行的列数（单位：万列）.

年份	2018	2019	2020	2021	2022
运行列数	0.63	0.82	1.24	1.5	1.6

(1) 计算中欧班列从 2018 到 2022 年的平均运行列数；

(2) 从 2018 年到 2022 年这 5 年中随机选取 2 年，求这两年运行列数和大于 2.4（单位：万列）的概率；

(3) 设 2018 年，2019 年，2020 年运行列数的方差为 s_1^2 ，2020 年，2021 年，2022 年运行

列数的方差为 s_2^2 ，从 2018 年到 2022 年这 5 年的运行列数的方差为 s_3^2 ，试判断 s_1^2 ， s_2^2 ， s_3^2 的大小关系. (结论不要求证明)

20. 已知函数 $f(x) = \log_2(4^x - 8)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的零点;

(2) 求函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x) = x + 1$ 的图象的交点坐标;

(3) 若函数 $f(x)$ 的图象恒在直线 $y = 4x + b$ 的下方，求 b 的取值范围.

21. 对于函数 $y = f(x)$ ，记所有满足 $\forall s > t > 0$ ，都有 $f(s) \geq f(t)$ 的函数构成集合 A ；所

有满足 $\forall s, t \in (0, +\infty)$ ，都有 $f(s+t) \geq f(s) + f(t)$ 的函数构成集合 B .

(1) 分别判断下列函数是否为集合 B 中的元素，并说明理由，

① $f(x) = 2x + 1$; ② $f(x) = x^2$;

(2) 若 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+a)$ ($a \geq 0$) 是集合 B 中的元素, 求 a 的最小值;

(3) 若 $g(x) = xf(x)$, 求证: $f(x) \in A$ 是 $g(x) \in B$ 的充分不必要条件.

参考答案:

1. A

【分析】先化简集合 M, N ，然后根据交集的定义计算.

【详解】由题意， $M = \{x \mid x + 2 \geq 0\} = \{x \mid x \geq -2\}$ ， $N = \{x \mid x - 1 < 0\} = \{x \mid x < 1\}$ ，

根据交集的运算可知， $M \cap N = \{x \mid -2 \leq x < 1\}$.

故选：A

2. C

【解析】特称命题否定为全称命题，改量词，否结论即可

【详解】命题 $p: \exists x < 1, x^2 \leq 1$ ，则 $\neg p: \forall x < 1, x^2 > 1$ ；

故选：C.

3. C

【分析】根据正六边形的性质转换相等向量即可.

【详解】 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC}$.

故选：C

4. D

【分析】分别构造函数 $y = x^3$ ， $y = |x|$ ， $y = \frac{1}{x}$ ， $y = 2^x$ 利用函数的单调性解逐一判断四个选项即可.

【详解】因为 $y = x^3$ 为增函数，所以 $a > b$ 时，有 $a^3 > b^3$ ，A 错误；

$y = |x|$ ，在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $a > b$ ，不一定有 $|a| > |b|$ ，B 错误；

$y = \frac{1}{x}$ ，在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递减， $a > b$ ，

若 a, b 同号，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ，若 a, b 异号，则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，所以 C 错误；

$y = 2^x$ 为增函数， $a > b$ ，

则 $a - b > 0$ ，所以 $2^{a-b} > 2^0$ ，所以 $2^{a-b} > 1$ ，D 正确.

故选：D

5. B

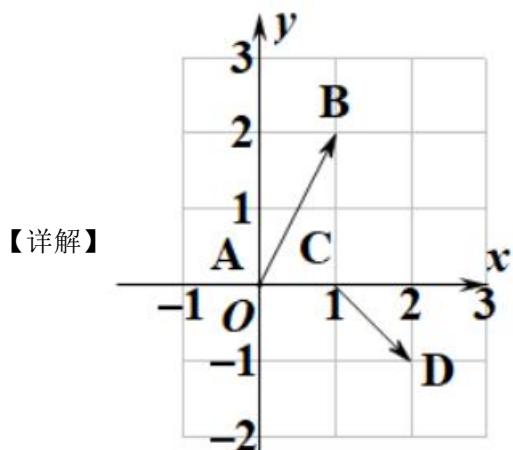
【分析】由基本不等式求得最小值.

【详解】 $\because x > 0$, $\therefore x + \frac{4}{x} - 4 \geq 2\sqrt{x \times \frac{4}{x}} - 4 = 0$, 当且仅当 $x = \frac{4}{x}$ 即 $x = 2$ 时等号成立.

故选: B.

6. B

【分析】建立平面直角坐标系, 求出 A, B, C, D 四点坐标, 利用坐标进行向量的坐标运算即可求解.



以点 A 为坐标原点, 水平方向为 x 轴, 竖直方向为 y 轴建立平面直角坐标系,

在平面直角坐标系下, $A(0, 0), B(1, 2), C(1, 0), D(2, -1)$,

所以 $\overrightarrow{AB} = (1, 2), \overrightarrow{CD} = (1, -1)$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (2, 1)$, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

故选: B

7. B

【分析】先将指数式化为对数式得到 a 的表示, 然后根据对数的运算性质求解出 $a + b$ 的值.

【详解】因为 $3^a = 4$, 所以 $\log_3 4 = a$,

因为 $b = \log_3 \frac{9}{4}$,

所以 $a + b = \log_3 4 + \log_3 \frac{9}{4} = \log_3 9 = 2$

故选: B.

8. D

【分析】根据已知条件求出 $A = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \{x | -2 < x < 5\}$, 因为 $a \notin A$, 且 $a \in B$,

所以 $a \in \complement_B A$, 计算补集即可.

【详解】由 $|x - 1| < 3$, 可得 $-3 < x - 1 < 3$, 即 $-2 < x < 4$, 所以 $A = \{x | -2 < x < 4\}$;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/678140030044006030>