

高考仿真重难点训练 07 立体几何初步

一、选择题

1. 下列命题中正确的是 ()

- A. 三点确定一个平面
- B. 两两相交且不共点的三条直线确定一个平面
- C. 圆的一条直径与圆上一点可确定一个平面
- D. 四边形可确定一个平面

【答案】B

【分析】根据确定平面的依据，判断选项.

【解析】A. 由确定平面的依据可知，不共线的三点确定一个平面，故错误；

B. 两两相交且不共点的三条直线确定一个平面，故正确；

C. 根据确定平面的依据，直线和直线外一点确定一个平面，所以应改为圆的一条直径和圆上除直径端点外的一点，可确定一个平面，故错误；

D. 空间四边形，四点不在同一个平面，故错误；

故选：B

2. 已知 α, β, γ 是平面， a, b, c 是直线， $\alpha \cap \beta = a, \beta \cap \gamma = b, \gamma \cap \alpha = c$ ，若 $a \cap b = P$ ，则 ()

- A. $P \in c$
- B. $P \notin c$
- C. $c \cap a = \emptyset$
- D. $c \cap \beta = \emptyset$

【答案】A

【分析】根据空间中点线面之间的位置关系结合平面的基本性质逐一判断四个选项的正误，即可得正确选项.

【解析】因为 $\alpha \cap \beta = a, \beta \cap \gamma = b$ ，所以 $a \subset \alpha, b \subset \gamma$ ，

由 $a \cap b = P$ ，可得 $P \in a$ 且 $P \in b$ ，

所以 $P \in \alpha$ 且 $P \in \gamma$ ，

因为 $\gamma \cap \alpha = c$ ，所以 $P \in c$ ，故选项 A 正确，选项 B 不正确；

因为 $P \in c, P \in a$ ，所以 c, a 有公共点 P ，故选项 C 不正确；

因为 $P \in b, b \subset \beta$ ，所以 $P \in \beta$ ，因为 $P \in c$ ，所以 c 与 β 有公共点 P ，故选项 D 不正确；

故选：A.



【分析】根据直观图与斜二测画法的定义求解.

且 $AC \perp BC, AC = A'C' = 3, BC = 2B'C' = 4,$

A graph of a linear function on a Cartesian coordinate system. The line passes through point B on the y-axis and point A on the x-axis. The origin is labeled C.

故选：C.

4. 已知底面边长为 2 的正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 16, 则直线 AC 与 A_1B 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【分析】如图，确定 $\angle ACD_1$ （或其补角）为直线 AC 与 A_1B 所成的角，求出 CC_1 ，进而求解.

【解析】如图，连接 AD_1, CD_1 ，则 $AB \parallel D_1C$ ，取 AC 的中点 O ，连接 OD_1 ，则 $OD_1 \perp AC$ ，

所以 $\angle ACD_1$ (或其补角) 为直线 AC 与 A_1B 所成的角,

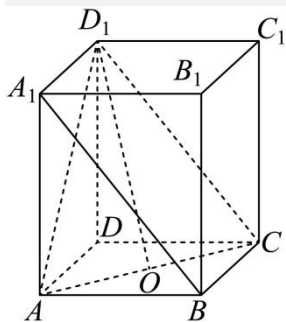
又正四棱柱的体积为 16，则该棱柱的高为 $CC_1 = \frac{16}{2 \times 2} = 4$ ，

又 $AC = 2\sqrt{2}$, $AD_1 = CD_1 = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ ，

所以 $\cos \angle ACD_1 = \frac{\frac{1}{2}AC}{CD_1} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，

即直线 AC 与 A_1B 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 。

故选：C



5. 已知 l 、 m 是不重合的两条直线， α 、 β 是不重合的两个平面，则下列结论正确的是（ ）

- A. 若 $\alpha \cap \beta = l$ ， $m \subset \alpha$ ， $l \parallel m$ ，则 $m \parallel \beta$
- B. 若 $l \subset \alpha$ ， $m \subset \beta$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，则 $l \parallel m$
- C. 若 $\alpha \cap \beta = l$ ， $m \subset \alpha$ ， $m \perp l$ ，则 $\alpha \perp \beta$
- D. 若 $l \perp m$ ， $m \parallel \alpha$ ，则 $l \perp \alpha$

【答案】A

【分析】对于 A，先判断 $m \not\subset \beta$ ，然后由线面平行判定定理可判断；对于 BCD，通过正方体模型举反例即可判断。

【解析】对于 A，因为 $\alpha \cap \beta = l$ ， $m \subset \alpha$ ，所以 $m \not\subset \beta$ ，

又 $l \parallel m$ ， $l \subset \beta$ ，所以 $m \parallel \beta$ ，A 正确；

对于 B，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

记平面 $ABCD$ 为 α ，平面 $A_1B_1C_1D_1$ 为 β ， AB 为 l ， A_1D_1 为 m ，

则 $l \subset \alpha$ ， $m \subset \beta$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，但 l 与 m 不平行，B 错误；

对于 C，记平面 ABC_1D_1 为 α ，平面 $ABCD$ 为 β ， AB 为 l ， AD_1 为 m ，

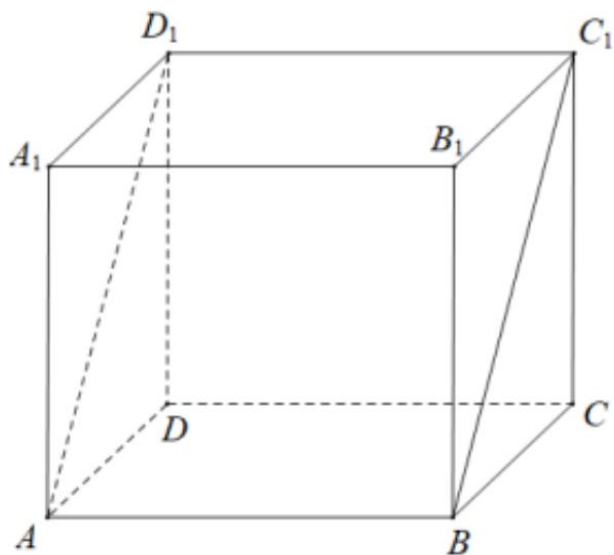
由正方体性质可知， $AB \perp$ 平面 ADD_1A_1 ， $AD_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1 ，所以 $AD_1 \perp AB$ ，

则 $\alpha \cap \beta = l$ ， $m \subset \alpha$ ， $m \perp l$ ，但 α, β 不垂直，C 错误；

对于 D，记 AD_1 为 l ， AB 为 m ，平面 $A_1B_1C_1D_1$ 为 α ，

则 $l \perp m$ ， $m \parallel \alpha$ ，但 l 与 α 不垂直，D 错误.

故选：A



6. 漏刻是中国古代的一种计时系统，“漏”是指计时器——漏壶，“刻”是指时间，《说文解字》中记载：“漏以铜壶盛水，刻节，昼夜百刻.”某展览馆根据史书记载，复原唐代四级漏壶计时器，如图，计时器由三个圆台形漏水壶和一个圆柱形受水壶组成，当最上层漏水壶盛满水时，漂浮在最底层受水壶中的浮箭刻度为 0，当最上层漏水壶中水全部漏完时，浮箭刻度为 100.已知最上层漏水壶口径与底径之比为 5:3，则当最上层漏水壶水面下降到其高度的一半时，浮箭刻度约为（ ）（四舍五入精确到个位）



A. 38

B. 60

C. 61

D. 62

【答案】D

【分析】根据题意结合台体体积公式运算求解.

【解析】由题意可知：最上层漏水壶所漏水的体积与浮箭刻度成正比，

设最上层漏水壶的口径与底径分别为 $5a$ ， $3a$ ，高为 h ，

则体积为 $V = \frac{1}{3} \left[\pi(5a)^2 + \pi(3a)^2 + \sqrt{\pi(5a)^2 \times \pi(3a)^2} \right] h = \frac{49}{3} \pi a^2 h$,

当最上层漏水壶水面下降到高度的一半时, 设此时浮箭刻度为 x ,

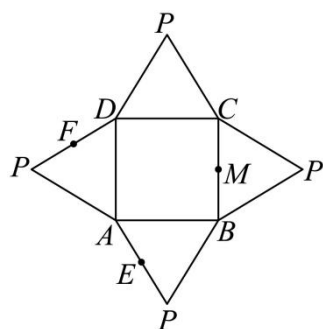
因为已漏水体积 $V_1 = \frac{1}{3} \left[\pi(5a)^2 + \pi(4a)^2 + \sqrt{\pi(5a)^2 \times \pi(4a)^2} \right] \times \frac{h}{2} = \frac{61}{6} \pi a^2 h$,

可得 $\frac{\frac{61}{6} \pi a^2 h}{\frac{49}{3} \pi a^2 h} = \frac{x}{100}$, 解得 $x = \frac{61}{98} \times 100 \approx 62$,

所以浮箭刻度约为 62.

故选: D.

7. 如图是一个四棱锥的平面展开图, 其中四边形 $ABCD$ 为正方形, 四个三角形为正三角形, E, F, M 分别是 PA, PD, BC 的中点, 在此四棱锥中, 则 ()



- A. BE 与 CF 是异面直线, 且 $BE \parallel$ 平面 PFM
- B. BE 与 CF 是相交直线, 且 $BE \parallel$ 平面 PFM
- C. BE 与 CF 是异面直线, 且 $BE \perp$ 平面 PFM
- D. BE 与 CF 是相交直线, 且 $BE \perp$ 平面 PFM

【答案】 B

【分析】 画出几何体 $P-ABCD$, 证得四边形 $BCFE$ 为梯形, 得到 BE 与 CF 为相交直线, 再由线面平行的判定定理, 证得 $BE \parallel$ 平面 PFM .

【解析】 根据题意, 画出几何体 $P-ABCD$, 如图所示,

因为 E, F 分别是 PA, PD 的中点, 可得 $EF \parallel AD$ 且 $EF = \frac{1}{2} AD$,

又因为 $AD \parallel BC$ 且 $AD = BC$, 所以 $EF \parallel BC$ 且 $EF = \frac{1}{2} BC$,

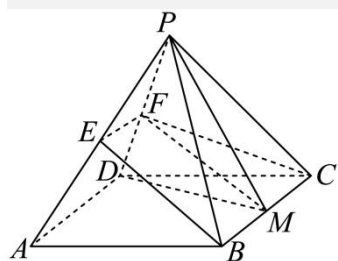
所以四边形 $BCFE$ 为梯形, 所以 BE 与 CF 为相交直线,

因为 M 为 BC 的中点, 可得 $EF \parallel BM$ 且 $EF = BM$,

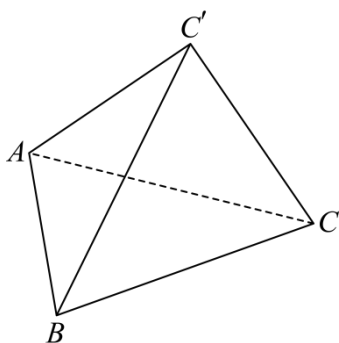
所以四边形 $BMFE$ 为平行四边形, 可得 $BE \parallel MF$,

又因为 $BE \not\subset$ 平面 PFM ， $MF \subset$ 平面 PFM ，所以 $BE \parallel$ 平面 PFM 。

故选：B。



8. 如图，将边长为 1 的正 $\triangle ABC$ 以边 AB 为轴逆时针翻转 θ 弧度得到 $\triangle ABC'$ ，其中 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，构成一个三棱锥 $C'-ABC$ 。若该三棱锥的外接球半径不超过 $\frac{\sqrt{13}}{6}$ ，则 θ 的取值范围为（ ）



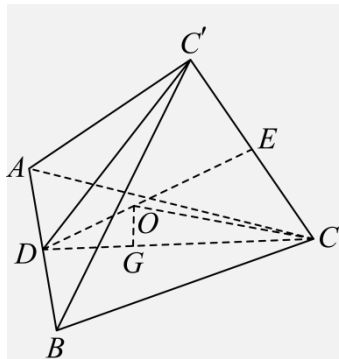
- A. $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$ B. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ C. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ D. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

【答案】 C

【分析】 作辅助线，则 O 即为三棱锥的外接球球心，翻折的角 θ 即为 $\angle CDC'$ 的大小，设 $OC = R$ ，结合题意

分析可知 $R^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12\cos^2 \frac{\theta}{2}}$ ，结合题意分析求解即可。

【解析】 取线段 AB 的中点 D ，线段 CD 上靠近点 D 的三等分点 G ， CC' 的中点 E ，连接 $CD, C'D, DE$ ，则 G 为正 $\triangle ABC$ 的外心， $CD = C'D$ ，可知 DE 为线段 CC' 的中垂线，在平面 $C'DC$ 内过 G 作 CD 的垂线交 ED 于 O ，连接 OC ，



则 O 即为三棱锥的外接球球心，翻折的角 θ 即为 $\angle CDC'$ 的大小.

设 $OC = R$ ，则 $DC = DC' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $DE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ ， $DG = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ， $CG = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $EC = EC' = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\theta}{2}$ ，

可得 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\theta}{2} = DE = DO + OE = \frac{DG}{\cos \frac{\theta}{2}} + \sqrt{OC^2 - EC^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\cos \frac{\theta}{2}} + \sqrt{R^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\theta}{2}\right)^2}$ ，

化简得 $R^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$ ，

又因为 $R \leq \frac{\sqrt{13}}{6}$ ，即 $R^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \leq \frac{13}{36}$ ，解得 $\cos^2 \frac{\theta}{2} \geq \frac{3}{4}$ ，

结合 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，可得 $\cos \frac{\theta}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 $0 < \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{6}$ ，所以 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$.

故选：C.

【点睛】方法点睛：多面体与球切、接问题的求解方法

1. 涉及球与棱柱、棱锥的切、接问题时，一般过球心及多面体的特殊点（一般为接、切点）或线作截面，把空间问题转化为平面问题求解；

2. 利用平面几何知识寻找几何体中元素间的关系，或只画内切、外接的几何体的直观图，确定球心的位置，弄清球的半径(直径)与该几何体已知量的关系，列方程(组)求解.

二、多选题

9. 已知空间两条异面直线 a, b 所成的角等于 60° ，过点 P 与 a, b 所成的角均为 θ 的直线有且只有一条，则 θ 的值可以等于 ()

A. 30°

B. 45°

C. 75°

D. 90°

【答案】 AD

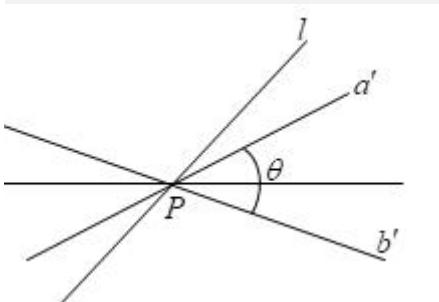
【分析】过点 P 作 $a' // a, b' // b$ ，求得直线 l 与 a', b' 所成角的范围为 $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 或 $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，结合选项，即可求解。

【解析】过点 P 作 $a' // a, b' // b$ ，

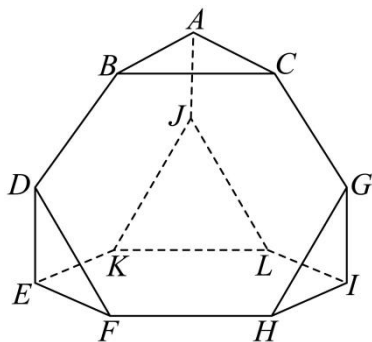
从两对角的角平分线开始，直线 l 与 a', b' 所成角的范围为 $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 或 $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，

而均为 θ 的直线有且仅有一条，根据对称性，可得 $\theta = 30^\circ$ 或 $\theta = 90^\circ$ 。

故选：AD。



10. 阿基米德多面体是由边数不全相同的正多边形为面围成的多面体，截角四面体是阿基米德多面体其中的一种。如图所示，将棱长为 $3a$ 的正四面体沿棱的三等分点作平行于底面的截面得到所有棱长均为 a 的截角四面体，则下列说法中正确的是（ ）



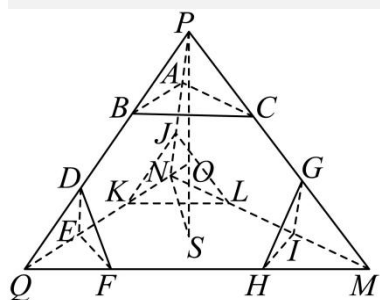
- A. 点 E 到平面 ABC 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}a$
- B. 直线 DE 与平面 ABC 所成角的正切值为 2
- C. 该截角四面体的表面积为 $7\sqrt{3}a^2$
- D. 该截角四面体存在内切球

【答案】AC

【分析】如图，将该截角四面体补成正四面体 $P-MNQ$. 对于 A: 由平面 $ABC //$ 平面 MNQ 可知点 E 到平面 ABC 的距离即为点 S 到平面 ABC 的距离，运算求解即可；对于 B: 由 $DE // PN$ ，可知直线 DE 与平面 ABC 所成角即为 PN 与平面 MNQ 所成角 $\angle PNS$ ，运算求解即可；对于 C: 根据正三角的面积结合比例关系运算求

解；对于 D：假设存在内切球根据对称性可知该球心为正四面体 $P-MNQ$ 的中心 O ，求点 O 到平面 ABC 的距离即可判断。

【解析】如图，将该截角四面体补成正四面体 $P-MNQ$ ，取底面 MNQ 的中心 S ，连接 PS, NS ，



可知 $PS \perp$ 平面 MNQ ，则 $NS = \frac{QM}{2 \sin 60^\circ} = \sqrt{3}a$ ，可得 $PS = \sqrt{PN^2 - NS^2} = \sqrt{6}a$ ，

对于选项 A：由题意可知：平面 $ABC \parallel$ 平面 MNQ ，

则点 E 到平面 ABC 的距离即为点 S 到平面 ABC 的距离 $d = \frac{2}{3}PS = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$ ，故 A 正确；

对于选项 B：由题意可知： $DE \parallel PN$ ，

则直线 DE 与平面 ABC 所成角即为 PN 与平面 MNQ 所成角 $\angle PNS$ ，

可得 $\tan \angle PNS = \frac{PS}{SN} = \sqrt{2}$ ，

所以直线 DE 与平面 ABC 所成角的正切值为 $\sqrt{2}$ ，故 B 错误；

对于选项 C：由题意可知： $S_{\triangle MNQ} = 9S_{\triangle QEF} = 9 \times \frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^2$ ，

则 $S_{EFHLK} = S_{\triangle MNQ} - 3S_{\triangle QEF} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ ，

所以该截角四面体的表面积为 $3S_{EFHLK} + 3S_{\triangle QEF} = 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 7\sqrt{3}a^2$ ，故 C 正确；

对于选项 D：若该截角四面体存在内切球，根据对称性可知该球心为正四面体 $P-MNQ$ 的中心 O ，

可知 $OP = ON = \sqrt{6}a - OS$ ，

因为 $ON^2 = NS^2 + OS^2$ ，即 $(\sqrt{6}a - OS)^2 = 3a^2 + OS^2$ ，解得 $OS = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ ，

由选项 A 可知：点 S 到平面 ABC 的距离 $d = \frac{2}{3}PS = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$ ，

则点 O 到平面 ABC 的距离为 $d - OS = \frac{5\sqrt{6}}{12}a \neq OS$ ，

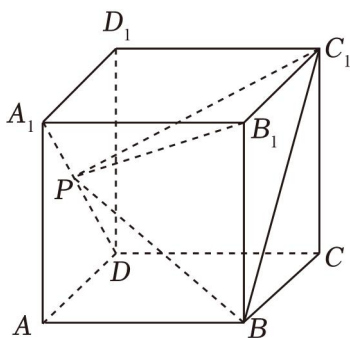
所以该截角四面体不存在内切球，故 D 错误；

故选：AC。

【点睛】关键点点睛：本题解题关键是将该截角四面体补成正四面体 $P-MNQ$ ，结合正四面体的性质分析

求解.

11. (多选) 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 是线段 A_1D 上的动点, 则 ()



A. $\triangle PBC_1$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 三棱锥 B_1-PBC_1 的体积为 $\frac{1}{6}$

C. 存在点 P , 使得 $BP \perp PC_1$

D. 存在点 P , 使得 $A_1D \perp$ 平面 PBC_1

【答案】 BD

【分析】 选项 A: 当点 P 与 A_1 重合, $\triangle PBC_1$ 为边长是 $\sqrt{2}$ 的等边三角形, 求出三角形面积, 即可判断; 选项 B: 利用等体积转化法求解即可; 选项 C: 以 BC_1 为直径的球面与直线没有公共点, 即可判断; 选项 D: 当 P 为 A_1D 的中点时, 根据线面垂直的判定定理即可得证.

【解析】 A 选项, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

点 P 是线段 A_1D 上的动点, 当点 P 与 A_1 重合时, $\triangle PBC_1$ 为等边三角形,

边长为 $\sqrt{2}$,

故 $\triangle PBC_1$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 A 错误;

B 选项, 因为 $V_{B_1-PBC_1} = V_{P-B_1BC_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle B_1BC_1} \cdot h_p$,

其中 $S_{\triangle B_1BC_1} = \frac{1}{2} B_1C_1 \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$,

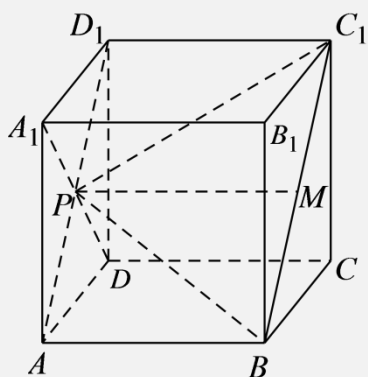
h_p 表示点 P 到平面 B_1BC_1 的距离, 故 $h_p = 1$,

所以三棱锥 B_1-PBC_1 的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$, 故 B 正确;

C 选项: 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 以 BC_1 为直径的球面, 半径 $R = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$,

则直线 A_1D 与该球面没有公共点，故不存在点 P ，故 C 错误；

D 选项：取 BC_1 的中点 M ，连接 PM ，



当 P 为 A_1D 的中点时，即 P 为 AD_1 , A_1D 的交点时，

因为 $D_1C_1 \parallel AB$ ， $D_1C_1 = AB$ ，所以四边形 D_1C_1BA 为平行四边形，

故 $D_1P \parallel C_1M$ ，

又 $D_1P = C_1M$ ，

所以四边形 D_1PMC_1 为平行四边形，

所以 $PM \parallel D_1C_1$ ，

因为 $D_1C_1 \perp$ 平面 ADD_1A_1 ，

易知 $PM \perp$ 平面 ADD_1A_1 ，

因为 $A_1D \subset$ 平面 ADD_1A_1 ，

所以 $PM \perp A_1D$ ，

又因为在正方体中， $A_1D \perp BC_1$ ，

而 $PM \cap BC_1 = M$ ，所以 $A_1D \perp$ 平面 PBC_1 ，故 D 正确。

故选：BD。

三、填空题

12. 已知底面半径为 2 的圆锥的侧面积为 $4\sqrt{5}\pi$ ，则该圆锥的外接球的表面积为_____.

【答案】 25π

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/685010023022012120>