

目 录

摘 要	III
Abstract	IV
1 绪论	1
1.1 四阶特征值问题的研究背景	1
1.2 变系数二阶资源问题的研究背景	1
1.3 本文的主要内容与结构安排	2
2 预备知识	3
2.1 Sobolev空间	3
2.2 Jacobi多项式、Legendre多项式	4
2.3 傅里叶基函数	6
2.4 分段线性多项式	7
2.5 Lax-Milgram定理和Cauchy-Schwarz不等式	8
3 周期边界条件下四阶特征值问题的Fourier谱逼近和误差分析 ..	10
3.1 弱形式及其离散格式	10
3.2 误差估计	11
3.3 算法实现	19
3.4 数值算例	22
4 变系数二阶椭圆交面问题的谱元法	24
4.1 问题描述与降维格式	24
4.2 弱形式和离散格式	24
4.3 算法实现	25
4.4 数值算例	29
总 结	32

参考文献	33
附 录	37
致 谢	39
攻读硕士学位期间主要研究成果	41
贵州师范大学学位论文原创性声明	43
贵州师范大学学位论文使用授权书	43

摘 要

本文提出了周期边界条件下四阶特征值问题的Fourier谱逼近方法及圆域上一类变系数二阶椭圆交面问题的谱元法。

针对周期边界条件下四阶特征值问题，根据周期边界条件引入了适当的Sobolev空间和相应的逼近空间，建立了原问题的一种弱形式及其离散格式，并推导了等价的算子形式。其次，定义了正交投影算子，并证明了其逼近性质，结合紧算子的谱理论证明了逼近特征值的误差估计。另外，构造了逼近空间中的一组基函数，推导了离散格式基于张量积的矩阵形式。最后，我们给出了一些数值算例，数值结果表明其算法是有效的和谱精度的。

针对圆域上的变系数二阶椭圆交面问题，根据极坐标变换公式，极条件以及傅里叶基函数展开，原问题被分解为一系列关于径向变量的相互独立的一维二阶问题，并建立了弱形式和相应的离散格式。其次，我们根据变系数的正则性，构造了基于分片高阶多项式逼近的一种谱元方法，然后通过利用勒让德多项式的正交性质，构造了一组适当的基函数，使得离散变分形式中的系数矩阵在变系数为分片多项式条件下是分块对角的稀疏矩阵。最后，我们呈现了一些数值算例，数值结果验证了我们提出的算法的收敛性和高精度。

关键词：周期边界；四阶特征值问题；Fourier谱方法；二阶椭圆交面问题；谱元法。

Abstract

In this paper, we put forward Fourier spectral approximation of fourth-order eigenvalue problems under periodic boundary conditions and spectral element method for second-order elliptic intersection problems with variable coefficients.

For the Fourier spectral approximation method for fourth-order eigenvalue problems with periodic boundary conditions, firstly, we introduce the appropriate Sobolev space and the corresponding approximation space according to the periodic boundary conditions, establish a weak form of the original problem and its discrete form, and derive the equivalent operator form. Then we define an orthogonal projection operator and prove its approximation properties. Combined with the spectral theory of compact operators, we prove the error estimates of approximation eigenvalues. In addition, we construct a set of basis functions of the approximation space, and derive the matrix form based on tensor product associated with the discrete scheme. Finally, we provide some numerical examples, and the numerical results show our algorithm is effective and spectral accuracy.

For second order elliptic interface problem with variable coefficients in a circular region, firstly, because of the polarity transformation, pole condition and fourier basis function expansion, the original problem resolve into a succession of independent one-dimensional second-order problems about radial variables. Furthermore, the weak form and relevant discrete scheme are established. Secondly, according to the regularity of variable

coefficients, we construct a spectral element method based on piecewise high-order polynomial approximation, and then by taking advantage of the orthogonal property of Legendre polynomials, we construct a set of appropriate basis functions, so that the coefficient matrix in the discrete scheme is sparse diagonal matrix in the case that the variable coefficients are piecewise polynomials. Finally, some numerical examples are presented, and the numerical results show that the proposed algorithm is convergent and high-precision.

Key Words: Periodic boundary; Fourth-order eigenvalue problem; Fourier spectral method; Second Order Elliptic Intersection Problem; Spectral Element Method.

第1章 绪论

1.1 四阶特征值问题的研究背景

特征值问题在量子力学、流体力学、随机过程和结构力学等学科领域有着广泛的应用^[1-3]，如机械振动模式结构的非线性弹性框架，稳态的爱因斯坦凝聚^[4]和基态电子结构^[5,6]等。关于特征值问题的数值方法已经有很多研究成果，主要包括有限元法^[7-10]，谱方法^[11-20]，有限差分法^[21-29]。近年来，关于四阶问题的高精度数值方法引起了很多学者的关注，文献^[30]提出了圆、球、椭圆域上双调和特征值问题的一种谱-Galerkin方法；文献^[31]提出了固支板、紧支板和Cahn - Hilliard 类型三种边界条件下双调和特征值问题基于Legendre-Galerkin逼近的一种直接谱方法；文献^[32]提出了球域上双调和特征值问题基于极小极大原理的一种高精度谱方法。

然而，很少有关于周期边界条件的四阶特征值问题的Fourier谱逼近的研究。因此，我们将在第三章提出周期边界条件下四阶特征值问题的一种有效的Fourier谱逼近方法。首先，根据周期边界条件引入适当的Sobolev空间和相应的逼近空间，建立原问题的一种弱形式及其离散格式，并推导等价的算子形式。其次，定义正交投影算子，并证明其逼近性质，结合紧算子的谱理论证明逼近特征值的误差估计。另外，构造逼近空间中的一组基函数，推导离散格式基于张量积的矩阵形式。最后，给出一些数值算例，数值结果表明其算法是有效的和谱精度的。

1.2 变系数二阶资源问题的研究背景

在材料科学和流体动力学中，通常会涉及到一些分片光滑的变系数二阶椭圆交面问题的数值求解。常用的数值方法包括有限元方法^[33-37]和有限差分方法^[38-40]。

文献^[41]应用拟合有限元方法解决椭圆界面问题，并在有限元空间的一些近似假设下，得到了能量范数估计。文献^[35]利用具有特殊拟合网格的标准有限元

对拟合网格有限元方法进行估计。文献^[42]提出了一种无限元素方法，可以看作是一种特定的网格细化方案，用于不适合弯曲界面的椭圆界面问题。文献^[43]利用Nitsche方法，提出了椭圆界面问题的有限元法。文献^[44]针对系数不连续的二维椭圆界面问题，提出了一种新的基于笛卡尔三角剖分的有限元方法。

因此，我们将在第四章针对圆域上一类变系数二阶椭圆交面问题提出一种有效的谱元法。根据极坐标变换公式，极条件以及傅里叶基函数展开，原问题被分解为一系列关于径向变量的相互独立的一维二阶资源问题，并建立了弱形式和相应的离散格式。然后，根据变系数的正则性，构造了基于分片高阶多项式逼近的一种谱元方法，再通过利用勒让德多项式的正交性质，构造了一组适当的基函数，使得离散变分形式中的系数矩阵在变系数为分片多项式条件下是分块对角的稀疏矩阵。最后，呈现了一些数值算例，数值结果验证了提出的算法的收敛性和高精度。

1.3 本文的主要内容与结构安排

本论文旨在研究周期边界条件的四阶特征值问题的 Fourier 谱逼近以及一类变系数二阶椭圆交面问题有效的谱元法。全文一共四章，按内容可以分为两个版块。第一部分为第二章，介绍了误差分析的一些基础知识；第二部分包括第三章和第四章，主要研究了研究周期边界条件的四阶特征值问题的 Fourier 谱逼近以及一类变系数二阶椭圆交面问题的谱元法。具体安排如下：

第三章，在3.1节，推导周期边界条件下四阶特征值问题的弱形式及其离散格式；在3.2节，证明逼近特征值的误差估计；在3.3节，详细描述算法的实现过程；在3.4节，给出一些数值算例，数值结果验证我们提出的算法的收敛性和高精度。

第四章，在4.1节，推导圆域上变系数二阶椭圆问题的降维格式；在4.2节，对每个降维格式建立弱形式及其离散格式；在4.3节，详细描述算法的实现过程；在4.4节，给出一些数值算例，通过数值结果验证提出的算法的收敛性和高精度。

第2章 预备知识

为了叙述的方便和简洁, 本文使用了大量具有特殊意义的英文字母和希腊字母, 并在附录中给出了它们的详细说明。

2.1 Sobolev空间

在本文中, 我们将反复使用不同的Sobolev空间, 因此, 我们首先在本章第一节给出Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$) 的定义。在介绍 $W^{k,p}(\Omega)$ 之前, 先给出空间 $L^p(\Omega)$ 的定义。

定义 2.1 当 $1 \leq p \leq \infty$ 时, 记

$$L^p(\Omega) := \{u : u \text{ 在区域 } \Omega \text{ 是可测的, 并且 } \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\},$$

其中, 当 $1 \leq p < \infty$ 时,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

当 $p = \infty$ 时,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

定义 2.2 Sobolev空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 定义为所有函数自身及其直到 k 阶导数均属于 $L^p(\Omega)$ 的函数空间, 其数学表达式如下:

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ 满足 } |\alpha| \leq k\},$$

其中 $D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ 是非负多重指标 α 的长度。 $W^{k,p}(\Omega)$ 空间的范数和半范数通常定义为:

$$\|u\|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad |u|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

注 2.1 特别地, 当 $k = 0, p = 2$ 时, $W^{0,2}(\Omega) = L^2(\Omega)$, 此时范数一般记作 $\|\cdot\|$; 当 $p = 2$ 时, $W^{k,2}(\Omega)$ 记为 $H^k(\Omega)$, 其范数和半范数分别记为 $\|\cdot\|_k$ 和 $|\cdot|_k$. $H^k(\Omega)$ 是一类常用的 Sobolev 空间, 比如在二阶边值问题中常用的 Sobolev 空间 $H^1(\Omega) := \{u : u \in L^2(\Omega), Du \in L^2(\Omega)\}$ 和 $H_0^1(\Omega) := \{u : u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

2.2 Jacobi多项式、Legendre多项式

2.2.1 Jacobi多项式

在本节, 我们将首先介绍 Jacobi 多项式的定义和基本性质, 它是谱方法中常用的一类经典正交多项式。

首先, 记 Jacobi 权函数 $\omega^{\alpha,\beta}(x) := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, x \in I := (-1, 1)$ 。显然, $\omega^{\alpha,\beta}(x) \in L^1(I)$ 当且仅当 $\alpha, \beta > -1$ 。

定义 2.3 Jacobi 多项式记作 $J_n^{\alpha,\beta}(x)$, 它是定义在区间 I 上且关于 Jacobi 权函数 $\omega^{\alpha,\beta}(x)$ 正交的多项式^[45], 即

$$\int_I J_n^{\alpha,\beta}(x) J_m^{\alpha,\beta}(x) \omega^{\alpha,\beta}(x) dx = 0, \text{ 当 } m \neq n.$$

引理 2.1 $J_n^{\alpha,\beta}(x)$ 是 Sturm-Liouville 问题的特征函数 (谱)^[45], 即满足以下等式:

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta} J_n^{\alpha,\beta}(x) = \lambda_n^{\alpha,\beta} J_n^{\alpha,\beta}(x),$$

其中

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta} u := (x^2 - 1) \partial_x^2 u + [\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x] \partial_x u,$$

$$\lambda_n^{\alpha,\beta} := n(n + \alpha + \beta + 1).$$

引理 2.2 Jacobi 多项式也具有如下的递推关系^[46]:

$$J_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) = (a_n^{\alpha,\beta} x - b_n^{\alpha,\beta}) J_n^{\alpha,\beta}(x) - c_n^{\alpha,\beta} J_{n-1}^{\alpha,\beta}(x), n \geq 1,$$

$$J_0^{\alpha,\beta}(x) = 1, \quad J_1^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

其中

$$\begin{aligned} a_n^{\alpha,\beta} &= \frac{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2)}{2(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)}, \\ b_n^{\alpha,\beta} &= \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(2n + \alpha + \beta + 1)}{2(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)}, \\ c_n^{\alpha,\beta} &= \frac{(n + \alpha)(n + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}{(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

本文还会用到一类带权Soblev空间^[46]:

$$\begin{aligned} L_\omega^2(I) &:= \left\{ u : \int_I u^2 \omega dx < +\infty \right\}, \\ H_\omega^k(I) &:= \left\{ u \in L_\omega^2(I) : \partial_x^i u \in L_\omega^2(I), i = 1, 2, \dots, k \right\}, \\ H_{0,\omega}^k(I) &:= \left\{ u \in H_\omega^k(I) : \partial_x^i u(\pm 1) = 0, i = 0, 1, \dots, k - 1 \right\}, \end{aligned}$$

其中 $\|\cdot\|_\omega$ 和 $\|\cdot\|_{k,\omega}$ 分别为 $L_\omega^2(I)$ 和 $H_\omega^k(I)$ 中的范数, $|u|_{k,\omega} = \|\partial_x^k u\|_\omega$ 为 $H_\omega^l(I)$ 中的半范数。

2.2.2 Legendre多项式

Legendre多项式是最常用的正交多项式之一, 一般用 $L_n(x)$ 表示 n 次Legendre多项式, 权函数 $\omega^{\sigma,\tau} \equiv 1$, 也就是在Jacobi多项式的权函数 $\omega^{\sigma,\tau} := (1-x)^\sigma(1+x)^\tau$ 中指标 $\sigma = \tau = 0$ 时的情况, 即:

$$\int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx = \frac{2}{2m+1} \sigma_{mn},$$

其中:

$$\sigma_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

下面我们将给出有关Legendre多项式的基本性质。Legendre多项式满足如下的三项递推关系:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, L_1(x) = x, \\ L_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} x L_{n-1}(x), n \geq 1. \end{aligned}$$

此外, Legendre多项式还有如下一些常用性质:

$$\int_{-1}^x L_n(\xi) d\xi = \frac{1}{2n+1} (L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)), n \geq 1, \quad (2-1)$$

$$L_n(x) = \frac{1}{2n+1} (L'_{n+1}(x) - L'_{n-1}(x)), \quad (2-2)$$

$$L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, L'_n(\pm 1) = \frac{1}{2} (\pm 1)^{n-1} n(n+1), \quad (2-3)$$

$$|L'(x)| \leq \frac{1}{2} k(k+1), -1 \leq x \leq 1, \quad (2-4)$$

$$\int_{-1}^1 L_n^2 dx = (n + \frac{1}{2})^{-1}, \quad (2-5)$$

$$(1-x^2)L'_n(x) = nL_{n-1}(x) - nxL_n(x), \quad (2-6)$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0, k+n \text{ odd}}^{n-1} (2k+1)L_k(x), \quad (2-7)$$

$$L''_n(x) = \sum_{k=0, k+n \text{ even}}^{n-1} (k + \frac{1}{2})(n(n+1) - k(k+1))L_k(x). \quad (2-8)$$

2.3 傅里叶基函数

我们将在本节介绍傅里叶基函数的定义及其相关性质。为了定义傅里叶基函数, 我们首先给出复空间 $L^2[0, 2\pi]$ 中内积的定义:

定义 2.4 复空间 $L^2[0, 2\pi]$ 的内积具有如下的形式:

$$(\phi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\theta) \overline{\psi(\theta)} d\theta,$$

其中, $\overline{\psi(\theta)}$ 是 $\psi(\theta)$ 的复共轭。

注 2.2 在实际计算中, 我们一般不使用连续内积而是使用离散内积:

$$(\phi, \psi)_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \phi(\theta_j) \overline{\psi(\theta_j)},$$

其中 $\theta_j = \frac{2\pi j}{N}, 0 \leq j \leq N-1$ 。请注意, $(\phi, \phi)_N = 0$ 并不意味着 $\phi = 0$, 只能说明 ϕ 在 θ_j 取值都为零。

结合定义2.4和欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, 我们给出傅里叶基函数的定义。

定义 2.5 傅里叶基函数 $E_k := e^{ik\theta}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是复空间 $L^2[0, 2\pi]$ 上的一组正交基, 即

$$(E_k, E_m) = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

我们总是能对以 2π 为周期的函数 $f(\theta)$ 作如下广义傅里叶展开:

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^n f_k e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n f_k E_k(\theta), \quad (2-9)$$

其中 f_k 是傅里叶展开系数。

下面我们将给出正交投影定理。令 $I := (0, 2\pi)$, 定义 $(2M+1)$ 维的复空间:

$$X_M := \text{span}\{e^{ikx} : -M \leq k \leq M\}.$$

令 $P_M : L^2(I) \rightarrow X_M$ 是 L^2 正交投影, 定义为

$$(P_M u - u, v) = 0, \quad \forall v \in X_M.$$

显然 $P_M u$ 是截断傅里叶级数, 即

$$(P_M u)(x) = \sum_{k=-M}^M \hat{u}_k e^{ikx},$$

其中 $\hat{u}_k = (u, e^{ikx}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{ikx} dx$ 。

定理 2.1 对 $\forall u \in H_p^m(I)$ 和 $0 \leq \mu \leq m^{[45]}$, 有

$$\|P_M u - u\|_\mu \lesssim M^{\mu-m} |u|_m.$$

2.4 分段线性多项式

分段线性多项式是使用有限元法解决一维资源问题的重要工具。最简单的有限元空间 V_h 是由分段线性函数组成的, 称之为线性元或一次元。为构造 V_h , 首先对区间 $I = [a, b]$ 作网格剖分:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_N < x_{N+1} = b,$$

把 I 分成 $N+1$ 个相邻的小区间 $I_n = [x_n, x_{n+1}]$ ($n = 0, 1, \dots, N$) 称每个小区间 I_n 为单元, 其长度 $h_n = x_{n+1} - x_n$, 又记 $h = \max_{0 \leq n \leq N} h_n$ 。

定义 2.6 定义一维线性有限元空间 V_h , 满足;

(1) $v_h \in V_h$ 在每个单元 I_n 上是线性函数;

(2) $v_h \in V_h$ 在区间 I 连续;

(3) $v_h(a) = v_h(b) = 0$ 。

由定义2.6定义的空间 V_h 是连续函数空间 $C(I)$ 的一个 N 维子空间。由分片线性插值可得

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{h_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{h_j}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $j = 1, \dots, N$, 则 $V_h = \text{span}\{\phi_j\}_{j=1}^N$ 。

2.5 Lax-Milgram定理和Cauchy-Schwarz不等式

定理 2.2 (Lax-Milgram定理) 设 V 是一个Banach空间, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow R$ 是一个双线性形式, 即对任何的 $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ 和实数 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, 都有

$$a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v),$$

$$a(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1 a(u, v_1) + \beta_2 a(u, v_2),$$

且满足:

(1) 对称性: $a(u, v) = a(v, u), \forall u, v \in V$;

(2) 连续性: 存在常数 $M > 0$, 使得

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \forall u, v \in V;$$

(3) V椭圆性: 存在常数 $\alpha > 0$, 使得

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \forall u \in V.$$

又设 $F(v)$ 是 V 上的有界线性泛函, 则变分方程

$$a(u, v) = F(v), \forall v \in V,$$

有唯一的解 $u_0 \in V$ 。

定义 2.7 ^[20] 设 $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ 为 Hilbert 空间下的范数, 则如下的 Cauchy - Schwarz 不等式成立:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

在 R^n 和 L^2 空间中的内积对应的 Cauchy - Schwarz 不等式的形式是

$$|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \{\sum_{i=1}^n x_i^2\}^{\frac{1}{2}} \{\sum_{i=1}^n y_i^2\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2-10)$$

$$|\sum_{i=1}^n x_i| \leq \sqrt{n} \{\sum_{i=1}^n x_i^2\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2-11)$$

$$|\int_{\Omega} f g dx| \leq \{\int_{\Omega} f^2 dx\}^{\frac{1}{2}} \{\int_{\Omega} g^2 dx\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2-12)$$

$$|\int_{\Omega} f dx| \leq \{\int_{\Omega} f^2 dx\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{V}, \quad (2-13)$$

其中 V 是 Ω 的体积。

第3章 周期边界条件下四阶特征值问题的Fourier谱逼近 和误差分析

在本章节，我们将介绍周期边界条件下四阶特征值问题的一种有效的Fourier谱逼近方法。首先，根据周期边界条件引入了适当的Sobolev空间和相应的逼近空间，建立了原问题的一种弱形式及其离散格式，并推导了等价的算子形式。其次，定义了正交投影算子，并证明了其逼近性质，结合紧算子的谱理论证明了逼近特征值的误差估计。另外，构造了逼近空间中的一组基函数，推导了离散格式基于张量积的矩阵形式。最后，给出了一些数值算例，数值结果表明其算法是有效的和谱精度的。

3.1 弱形式及其离散格式

作为一个模型, 我们考虑如下的四阶特征值问题:

$$\Delta^2 u - \nabla(\alpha \nabla u) + \beta u = \lambda u, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3-1)$$

$$u(x, y) = u(x + L_x, y), \partial_x u(x, y) = \partial_x u(x + L_x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3-2)$$

$$u(x, y) = u(x, y + L_y), \partial_y u(x, y) = \partial_y u(x, y + L_y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3-3)$$

其中 α 是一个非负有界的 (L_x, L_y) 周期函数, β 是一个有界函数, $\Omega = (x_L, x_R) \times (y_L, y_R)$, $L_x = x_R - x_L$, $L_y = y_R - y_L$ 。下面将推导(3-1)-(3-3)的弱形式及其离散格式, 用 $H^s(\Omega)$ 表示 s 阶Sobolev空间, $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ 和 $|\cdot|_{s,\Omega}$ 分别表示 $H^s(\Omega)$ 中的范数和半范数。特别地, 我们有

$$H^0(\Omega) = L^2(\Omega) = \left\{ u : \int_{\Omega} |u|^2 dx dy < \infty \right\},$$

相应的内积和范数分别是:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u \bar{v} dx dy, \|u\| = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义Sobolev空间:

$$H_p^2(\Omega) = \{ u \in H^2(\Omega) : u \text{ 满足周期边界条件(3-2)-(3-3)} \},$$

相应的内积和范数分别为:

$$(u, v)_{2,\Omega} = \sum_{|\alpha|=0}^2 \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} \bar{v} \, dxdy, \|u\|_{2,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^2 \|D^{\alpha} u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}.$$

由格林公式可知(3-1)-(3-3)的弱形式为: 找 $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 \neq u \in H_p^2(\Omega)$, 使得

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in H_p^2(\Omega), \quad (3-4)$$

其中

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \Delta u \Delta \bar{v} \, dxdy + \int_{\Omega} \alpha \nabla u \nabla \bar{v} \, dxdy + \int_{\Omega} \beta u \bar{v} \, dxdy, \\ b(u, v) &= \int_{\Omega} u \bar{v} \, dxdy. \end{aligned}$$

定义如下的逼近空间:

$$X_M(\Omega) = \text{span}\{e^{i2\pi k \frac{x-x_L}{L_x}} e^{i2\pi j \frac{y-y_L}{L_y}}, |k| = 0, 1, \dots, M, |j| = 0, 1, \dots, M\}.$$

则弱形式(3-4)相应的离散格式为: 找 $\lambda_M \in \mathbb{C}$, $0 \neq u_M \in X_M(\Omega)$, 使得

$$a(u_M, v_M) = \lambda_M b(u_M, v_M), \quad \forall v_M \in X_M(\Omega). \quad (3-5)$$

3.2 误差估计

在这一节, 我们将证明逼近特征值的误差估计, 由于 α 是一个非负有界的 (L_x, L_y) 周期函数, 则有

$$\alpha_* := \inf_{(x,y) \in \Omega} \alpha(x, y) \geq 0, \alpha^* := \sup_{(x,y) \in \Omega} \alpha(x, y) < \infty. \quad (3-6)$$

由于 $\beta(x, y)$ 是一个有界函数, 不妨假设 $\beta(x, y)$ 满足下面的条件:

$$\beta_* := \inf_{(x,y) \in \Omega} \beta(x, y) > 0, \beta^* := \sup_{(x,y) \in \Omega} \beta(x, y) < \infty. \quad (3-7)$$

事实上, 当 $\beta(x, y) \leq 0$, 我们只需要将方程(3-1)化为如下的等价形式:

$$\Delta^2 u - \nabla(\alpha \nabla u) + \hat{\beta}u = \hat{\lambda}u,$$

其中 $\hat{\beta} = \beta + K$, $\hat{\lambda} = \lambda + K$, 则只要 K 足够大, $\hat{\beta}$ 自然能够满足条件(3-7)。不失一般性, 令

$$x_L = y_L = 0, x_R = y_R = 2\pi,$$

则 $L_x = L_y = 2\pi$, $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ 。为了叙述方便, 我们用 $a \lesssim b$ 表示 $a \leq Cb$, 其中 C 为大于零的常数且不依赖于多项式的次数或者网格的大小。

引理 3.1 $\forall u, v \in H_p^2(\Omega)$, 则下列等式成立

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_{xy} u \partial_{xy} \bar{u} dx dy &= \int_{\Omega} \partial_{xx} u \partial_{yy} \bar{u} dx dy = \int_{\Omega} \partial_{xx} \bar{u} \partial_{yy} u dx dy, \\ \int_{\Omega} \partial_{xy} u \partial_{xy} \bar{v} dx dy &= \int_{\Omega} \partial_{xx} u \partial_{yy} \bar{v} dx dy = \int_{\Omega} \partial_{yy} u \partial_{xx} \bar{v} dx dy. \end{aligned}$$

证明 由分部积分公式有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_{xy} u \partial_{xy} \bar{u} dx dy &= \int_0^{2\pi} \partial_{xy} u \partial_y \bar{u} \Big|_{x=0}^{x=2\pi} dy - \int_{\Omega} \partial_{xxy} u \partial_y \bar{u} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \partial_{xy} u \partial_y \bar{u} \Big|_{x=0}^{x=2\pi} dy - \int_0^{2\pi} \partial_{xx} u \partial_y \bar{u} \Big|_{y=0}^{y=2\pi} dx + \int_{\Omega} \partial_{xx} u \partial_{yy} \bar{u} dx dy \end{aligned}$$

由周期边界条件(3-2)-(3-3)可得:

$$\begin{aligned} \partial_{xy} u(x, y) &= \partial_{xy} u(x + 2\pi, y), \partial_y \bar{u}(x, y) = \partial_y \bar{u}(x + 2\pi, y), \\ \partial_{xx} u(x, y) &= \partial_{xx} u(x, y + 2\pi), \partial_y \bar{u}(x, y) = \partial_y \bar{u}(x, y + 2\pi). \end{aligned}$$

则有

$$\partial_{xy} u \partial_y \bar{u} \Big|_{x=0}^{x=2\pi} = 0, \partial_{xx} u \partial_y \bar{u} \Big|_{y=0}^{y=2\pi} = 0.$$

因此

$$\int_{\Omega} \partial_{xy} u \partial_{xy} \bar{u} dx dy = \int_{\Omega} \partial_{xx} u \partial_{yy} \bar{u} dx dy.$$

将上式两边取共轭可得:

$$\int_{\Omega} \partial_{xy} u \partial_{xy} \bar{u} dx dy = \int_{\Omega} \partial_{xx} \bar{u} \partial_{yy} u dx dy.$$

同理可证

$$\int_{\Omega} \partial_{xy} u \partial_{xy} \bar{v} dx dy = \int_{\Omega} \partial_{xx} u \partial_{yy} \bar{v} dx dy = \int_{\Omega} \partial_{yy} u \partial_{xx} \bar{v} dx dy.$$

□

引理 3.2 $\forall u \in H_p^2(\Omega)$, 则下列不等式成立

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\partial_x u|^2 dx dy &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_{xx} u|^2 dx dy, \\ \int_{\Omega} |\partial_y u|^2 dx dy &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_{yy} u|^2 dx dy. \end{aligned}$$

证明 由Cauchy-Schwarz不等式和均值不等式有:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\partial_x u|^2 dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_x u \partial_x \bar{u} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} u \partial_x \bar{u} \Big|_{x=0}^{x=2\pi} dy - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u \partial_{xx} \bar{u} dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u \partial_{xx} \bar{u} dx dy \leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\partial_{xx} u|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_{xx} u|^2 dx dy. \end{aligned}$$

同理可得:

$$\int_{\Omega} |\partial_y u|^2 dx dy \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_{yy} u|^2 dx dy.$$

□

定理 3.1 若 $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ 分别满足条件(3-6)和(3-7), 则 $a(u, v)$ 为定义在 $H_p^2(\Omega) \times H_p^2(\Omega)$ 上的正定连续的双线性泛函, 即

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq M^* \|u\|_{2, \Omega} \|v\|_{2, \Omega}, \\ a(u, u) &\geq M_* \|u\|_{2, \Omega}^2, \end{aligned}$$

其中 $M^* = \max\{1, \alpha^*, \beta^*\}$, $M_* = \frac{1}{2} \min\{1, \beta_*\}$ 。

证明 由引理3.1可得:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u \Delta \bar{v} dx dy &= \int_{\Omega} (\partial_{xx} u \partial_{xx} \bar{v} + \partial_{xx} u \partial_{yy} \bar{v} + \partial_{yy} u \partial_{xx} \bar{v} + \partial_{yy} u \partial_{yy} \bar{v}) dx dy \\ &= \int_{\Omega} (\partial_{xx} u \partial_{xx} \bar{v} + 2\partial_{xy} u \partial_{xy} \bar{v} + \partial_{yy} u \partial_{yy} \bar{v}) dx dy. \end{aligned}$$

则由Cauchy-Schwarz不等式有

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \Delta u \Delta \bar{v} \, dxdy + \int_{\Omega} \alpha \nabla u \nabla \bar{v} \, dxdy + \int_{\Omega} \beta u \bar{v} \, dxdy \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} |\Delta u \Delta \bar{v}| \, dxdy + \int_{\Omega} |\alpha \nabla u \nabla \bar{v}| \, dxdy + \int_{\Omega} |\beta u \bar{v}| \, dxdy \\
 &= \int_{\Omega} (|\partial_{xx} u \partial_{xx} \bar{v} + \partial_{xx} u \partial_{yy} \bar{v} + \partial_{yy} u \partial_{xx} \bar{v} + \partial_{yy} u \partial_{yy} \bar{v}|) \, dxdy \\
 &\quad + \int_{\Omega} (|\partial_x u \partial_x \bar{v} + \partial_y u \partial_y \bar{v}|) \, dxdy + \int_{\Omega} |\beta u \bar{v}| \, dxdy \\
 &\leq \int_{\Omega} (|\partial_{xx} u \partial_{xx} v| + 2|\partial_{xy} u \partial_{xy} v| + |\partial_{yy} u \partial_{yy} v|) \, dxdy \\
 &\quad + \alpha^* \int_{\Omega} (|\partial_x u \partial_x v| + |\partial_y u \partial_y v|) \, dxdy + \beta^* \int_{\Omega} |uv| \, dxdy \\
 &\leq \max\{1, \alpha^*, \beta^*\} \|u\|_{2,\Omega} \|v\|_{2,\Omega}.
 \end{aligned}$$

另一方面，由引理3.2有

$$\begin{aligned}
 a(u, u) &= \int_{\Omega} \Delta u \Delta \bar{u} \, dxdy + \int_{\Omega} \alpha \nabla u \nabla \bar{u} \, dxdy + \int_{\Omega} \beta u \bar{u} \, dxdy \\
 &= \int_{\Omega} (\partial_{xx} u \partial_{xx} \bar{u} + 2\partial_{xy} u \partial_{xy} \bar{u} + \partial_{yy} u \partial_{yy} \bar{u}) \, dxdy \\
 &\quad + \int_{\Omega} \alpha (\partial_x u \partial_x \bar{u} + \partial_y u \partial_y \bar{u}) \, dxdy + \int_{\Omega} \beta u \bar{u} \, dxdy \\
 &\geq \int_{\Omega} (|\partial_{xx} u|^2 + 2|\partial_{xy} u|^2 + |\partial_{yy} u|^2) \, dxdy + \beta_* \int_{\Omega} |u|^2 \, dxdy \\
 &\geq \min\{1, \beta_*\} \int_{\Omega} (|\partial_{xx} u|^2 + 2|\partial_{xy} u|^2 + |\partial_{yy} u|^2 + |u|^2) \, dxdy \\
 &\geq \frac{1}{2} \min\{1, \beta_*\} \|u\|_{2,\Omega}^2.
 \end{aligned}$$

□

类似于定理3.1的证明，我们下面的定理：

定理 3.2 $b(u, v)$ 是定义在 $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 上的正定连续的双线性泛函，即

$$|b(u, v)| \leq \|u\| \|v\|, \quad b(u, u) \geq \|u\|^2.$$

根据定理3.1，定理3.2以及Lax-Milgram 引理，可以定义解算子 $T : L^2(\Omega) \rightarrow H_p^2(\Omega)$ ，使得：

$$a(Tu, v) = b(u, v), \quad \forall v \in H_p^2(\Omega). \quad (3-8)$$

则(3-4)有如下等价的算子形式:

$$Tu = \lambda^{-1}u. \quad (3-9)$$

定理 3.3 由(3-8)定义的算子 $T : H_p^2(\Omega) \rightarrow H_p^2(\Omega)$ 是一个紧算子。

证明 在(3-8)中取 $v = Tu$, 由定理3.1可得

$$M_* \|Tu\|_{2,\Omega}^2 \leq a(Tu, Tu) = b(u, Tu) \leq \|u\| \|Tu\|_{2,\Omega},$$

即:

$$\|Tu\|_{2,\Omega} \leq M_*^{-1} \|u\|. \quad (3-10)$$

假设 S 为 $H_p^2(\Omega)$ 中的一个有界集, 由 $H_p^2(\Omega)$ 紧嵌入 $L^2(\Omega)$ 可知 S 为 $L^2(\Omega)$ 中的列紧集, 再由(3-10) 可知 S 为 $H_p^2(\Omega)$ 中的列紧集。因此, $T : H_p^2(\Omega) \rightarrow H_p^2(\Omega)$ 是一个紧算子。 $\square$

考虑(3-4)的共轭问题: 找 $\lambda^* \in \mathbb{C}$, $0 \neq u^* \in H_p^2(\Omega)$, 使得

$$a(v, u^*) = \overline{\lambda^*} b(v, u^*), \quad \forall v \in H_p^2(\Omega). \quad (3-11)$$

定义相应的解算子 $T^* : L^2(\Omega) \rightarrow H_p^2(\Omega)$, 使得:

$$a(v, T^* u^*) = b(v, u^*), \quad \forall v \in H_p^2(\Omega). \quad (3-12)$$

则(3-11)有如下等价的算子形式:

$$T^* u^* = (\lambda^*)^{-1} u^*. \quad (3-13)$$

由于

$$a(Tu, v) = b(u, v) = a(u, T^* v), \quad u, v \in H_p^2(\Omega),$$

则 T^* 为 T 的共轭算子, 从而 $T^* : H_p^2(\Omega) \rightarrow H_p^2(\Omega)$ 也是一个紧算子。类似于算子 T 的定义, 我们引入相应的解算子: $T_M : L^2(\Omega) \rightarrow X_M(\Omega)$, 使得:

$$a(T_M u, v_M) = b(u, v_M), \quad \forall u \in L^2(\Omega), \forall v_M \in X_M(\Omega). \quad (3-14)$$

显然 $T_M : L^2(\Omega) \rightarrow X_M(\Omega)$ 是一个有限秩算子, 且(3-5) 有如下等价的算子形式:

$$T_M u_M = \lambda_M^{-1} u_M. \quad (3-15)$$

定义投影算子 $\Pi_M : H_p^2(\Omega) \rightarrow X_M(\Omega)$, 使得

$$a(u - \Pi_M u, v_M) = 0, \quad \forall u \in H_p^2(\Omega), \quad \forall v_M \in X_M(\Omega). \quad (3-16)$$

引理 3.3 令 T 和 T_M 分别为(3-8)和(3-14) 定义的有界线性算子, 则有

$$T_M = \Pi_M T.$$

证明 由(3-8), (3-14)和(3-16), 对 $\forall u \in H_p^2(\Omega)$, $\forall v_M \in X_M(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned} a(\Pi_M T u - T_M u, v_M) &= a(\Pi_M T u - T u + T u - T_M u, v_M) \\ &= a(\Pi_M T u - T u, v_M) + a(T u - T_M u, v_M) \\ &= a(\Pi_M T u - T u, v_M) + a(T u, v_M) - a(T_M u, v_M) \\ &= a(\Pi_M T u - T u, v_M) + b(u, v_M) - b(u, v_M) \\ &= 0. \end{aligned}$$

在上式中取 $v_M = \Pi_M T u - T_M u$ 可得

$$a(\Pi_M T u - T_M u, \Pi_M T u - T_M u) = 0.$$

由定理3.1有

$$T_M = \Pi_M T.$$

□

显然, $T_M|_{X_M(\Omega)} : X_M(\Omega) \rightarrow X_M(\Omega)$ 也是一个有限秩算子. 令

$$\xi_M = \sup_{u \in H_p^2(\Omega), \|u\|_{2,\Omega}=1} \inf_{v_M \in X_M(\Omega)} \|T u - v_M\|_{2,\Omega}.$$

由于 $X_M(\Omega)$ 在 $H_p^2(\Omega)$ 中终归稠密, 且逐一包含, 则有:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \xi_M = 0. \quad (3-17)$$

定理 3.4 令 $\|u\|_a = \sqrt{a(u, u)}$, 则下面的等式成立:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|T - T_M\|_{\mathcal{L}(H_p^2(\Omega), H_p^2(\Omega))} = 0. \quad (3-18)$$

证明 由算子的范数定义和定理3.1可得:

$$\begin{aligned} \|T - T_M\|_{\mathcal{L}(H_p^2(\Omega), H_p^2(\Omega))} &= \sup_{u \in H_p^2(\Omega), \|u\|_{2,\Omega}=1} \|(T - T_M)u\|_{2,\Omega} \\ &\leq \sup_{u \in H_p^2(\Omega), \|u\|_{2,\Omega}=1} \frac{1}{\sqrt{M_*}} \|Tu - \Pi_M Tu\|_a \\ &\leq \sup_{u \in H_p^2(\Omega), \|u\|_{2,\Omega}=1} \inf_{v_M \in X_M(\Omega)} \frac{1}{\sqrt{M_*}} \|Tu - v_M\|_a \\ &\leq \sup_{u \in H_p^2(\Omega), \|u\|_{2,\Omega}=1} \inf_{v_M \in X_M(\Omega)} \sqrt{\frac{M^*}{M_*}} \|Tu - v_M\|_{2,\Omega} \\ &= \sqrt{\frac{M^*}{M_*}} \xi_M. \end{aligned}$$

由(3-17)知结论成立。 $\square$

类似地, 由格林公式可知(3-11)的离散格式为: 找 $\lambda_M^* \in \mathbb{C}$, $0 \neq u_M^* \in X_M(\Omega)$, 使得

$$a(v, u_M^*) = \overline{\lambda_M^*} b(v, u_M^*), \quad \forall v \in X_M(\Omega). \quad (3-19)$$

定义相应的解算子 $T_M^* : L^2(\Omega) \rightarrow X_M(\Omega)$, 使得:

$$a(v, T_M^* u^*) = b(v, u^*), \quad \forall u^* \in L^2(\Omega), \forall v \in H_p^2(\Omega). \quad (3-20)$$

由(3-20)可知(3-19)等价的算子形式为:

$$T_M^* u_M^* = \lambda_M^{*-1} u_M^*.$$

我们用 λ 和 μ 分别表示代数重数为 g 的特征值和 $\lambda^{-1} - T$ 的陡度。由 $\lim_{M \rightarrow \infty} \|T - T_M\|_{\mathcal{L}(H_p^2(\Omega), H_p^2(\Omega))} = 0$ 可知 g 个特征值 $\lambda_{j,M}$ ($j = 1, \dots, g$) 将收敛到 λ 。令 $\rho(T)$ 和 $\sigma(T)$ 分别表示算子 T 的预解集和谱集。定义谱投影:

$$E = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mathcal{R}_z(T) dz, \quad E_M = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mathcal{R}_z(T_M) dz,$$

其中 Γ 属于 $\rho(T)$, 且是以谱点 λ^{-1} 为中心, 不再含有其它谱点的一个圆, $\mathcal{R}_z(T) = (z - T)^{-1}$ 。由文献^[47]可知 E 是一个到相应于 λ^{-1} 和 T 的广义特征向量空间的投

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/685010222124012102>