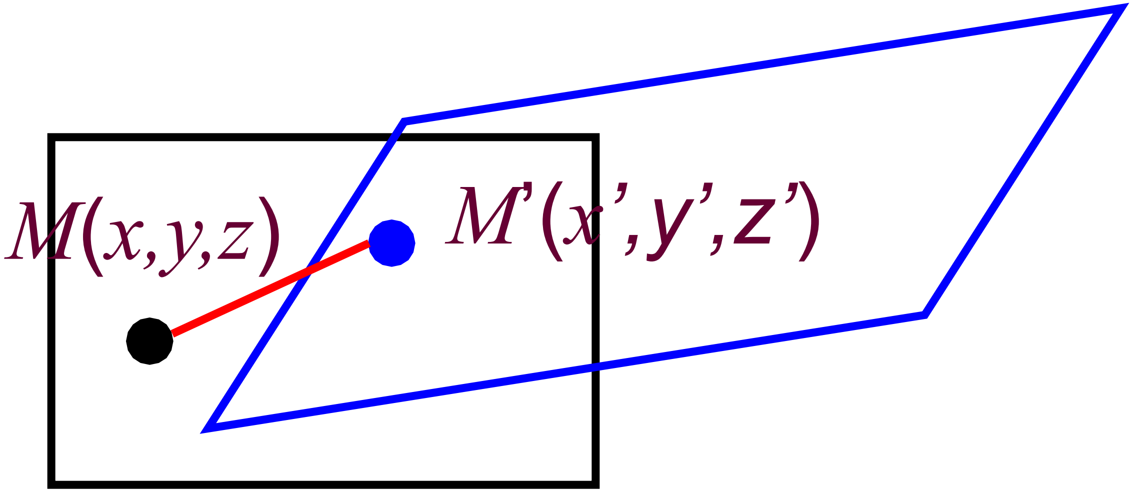
§1.2 应变分量

- 因为外部原因 —— 载荷或温度
- **位移**—— 物体内部各点空间位置发生变化
- 位移形式
- **刚体位移**：物体内部各点位置变化，但仍保持初始状态相对位置不变。
- **变形位移**：位移不但使得位置变化，而且变化了物体内部各个点的相对位置。



$$x' - x = u = u\left(x, y, z\right)$$
$$y' - y = v = v\left(x, y, z\right)$$
$$z' - z = w = w\left(x, y, z\right)$$

位移u，v，w是单值连续函数

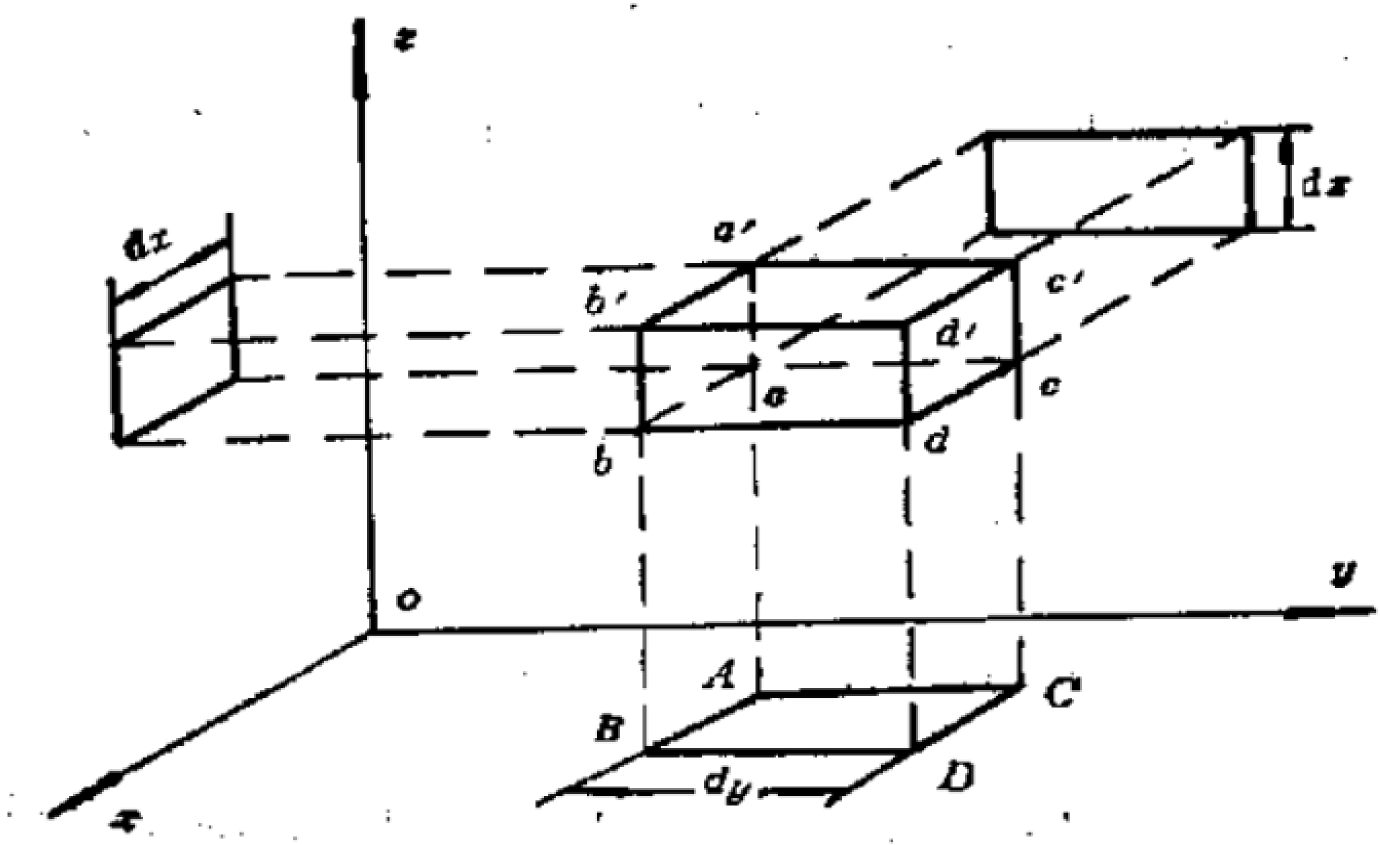
进一步分析位移函数具有连续的三阶导数

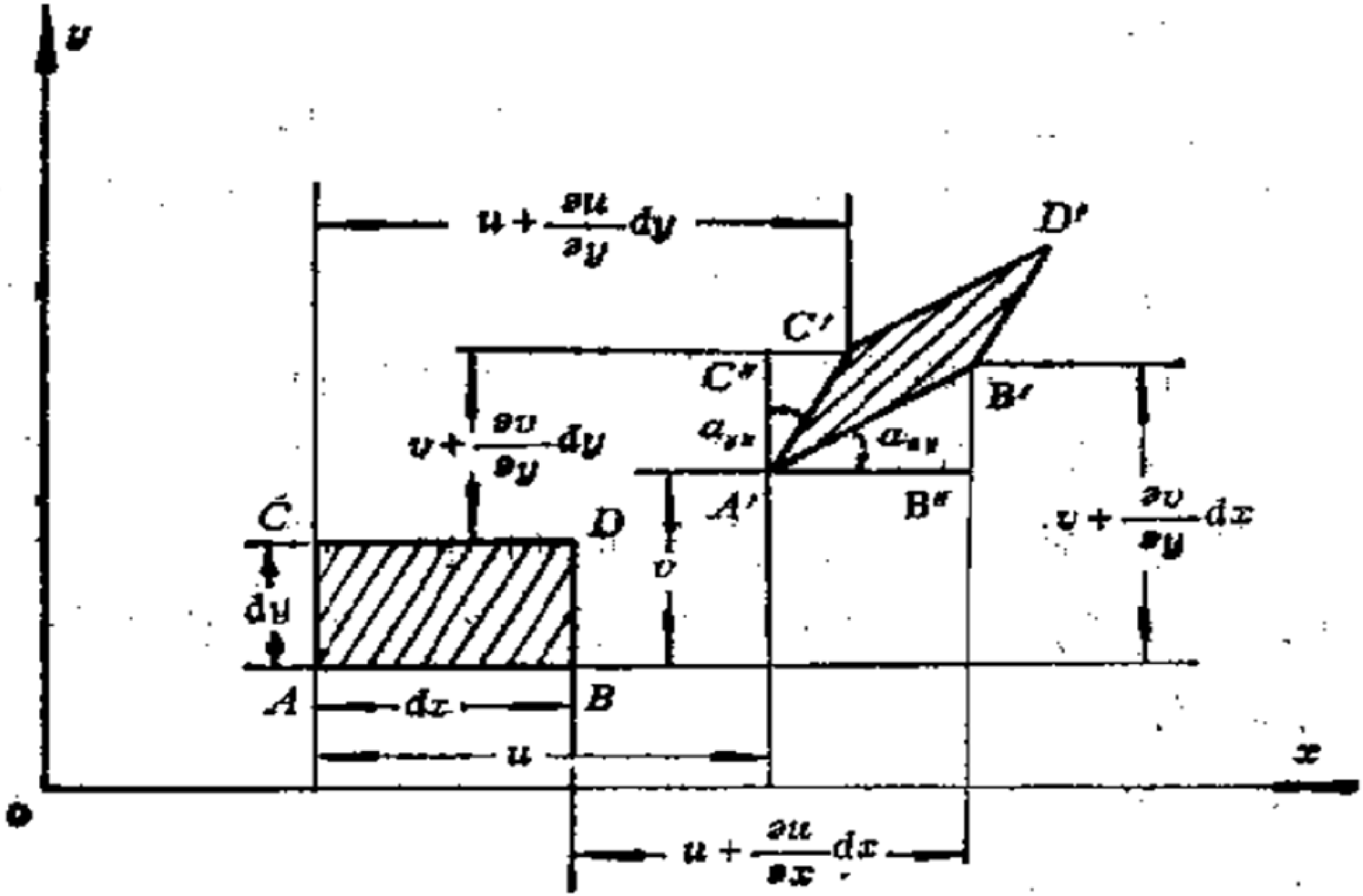
一点的变形经过微分六面体单元描述

微分单元体的变形，分为两部分讨论

正应变——棱边的伸长和缩短

切应变——棱边之间夹角（直角）变化


z
dx
a'
b'
c'
d'
a
c
b
d
dz
o
y
A
C
B
D
dy
x



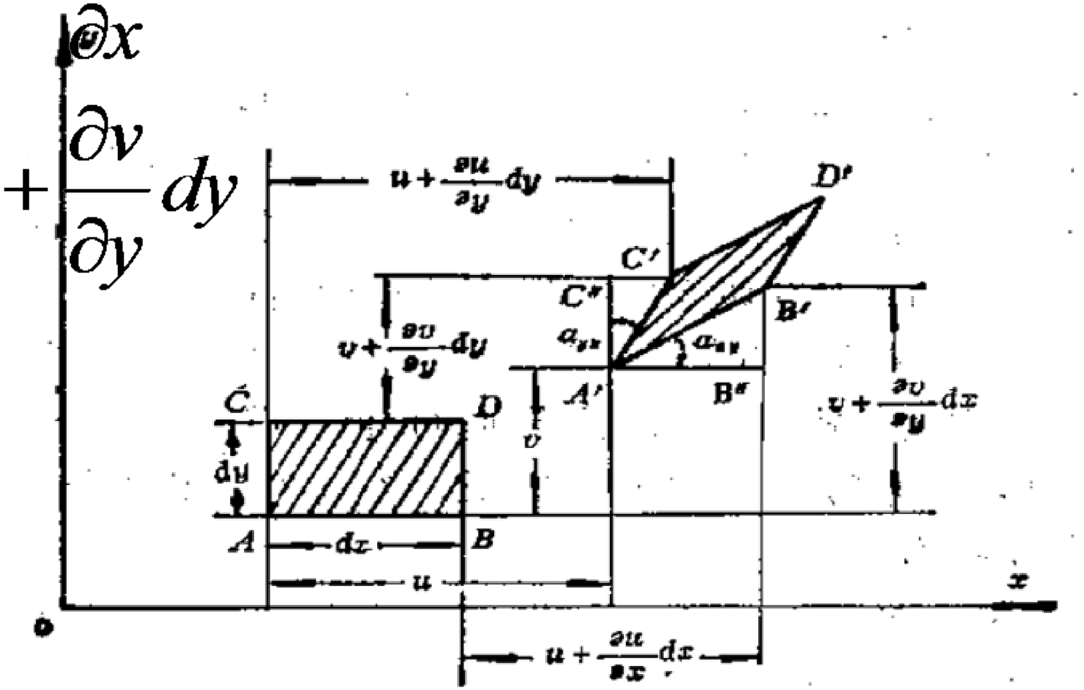
v
$u+\frac{\partial u}{\partial y}dy$
D'
C'
C''
B'
α_{yx}
α_{xy}
$v+\frac{\partial v}{\partial y}dy$
C
D
A'
B''
$v+\frac{\partial v}{\partial y}dx$
dy
v
A
dx
B
u
x
o
$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$

$$u\left(x+dx,y\right)=u\left(x,y\right)+\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$u\left(x,y+dy\right)=u\left(x,y\right)+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$v\left(x+dx,y\right)=v\left(x,y\right)+\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$v\left(x,y+dy\right)=v\left(x,y\right)+\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

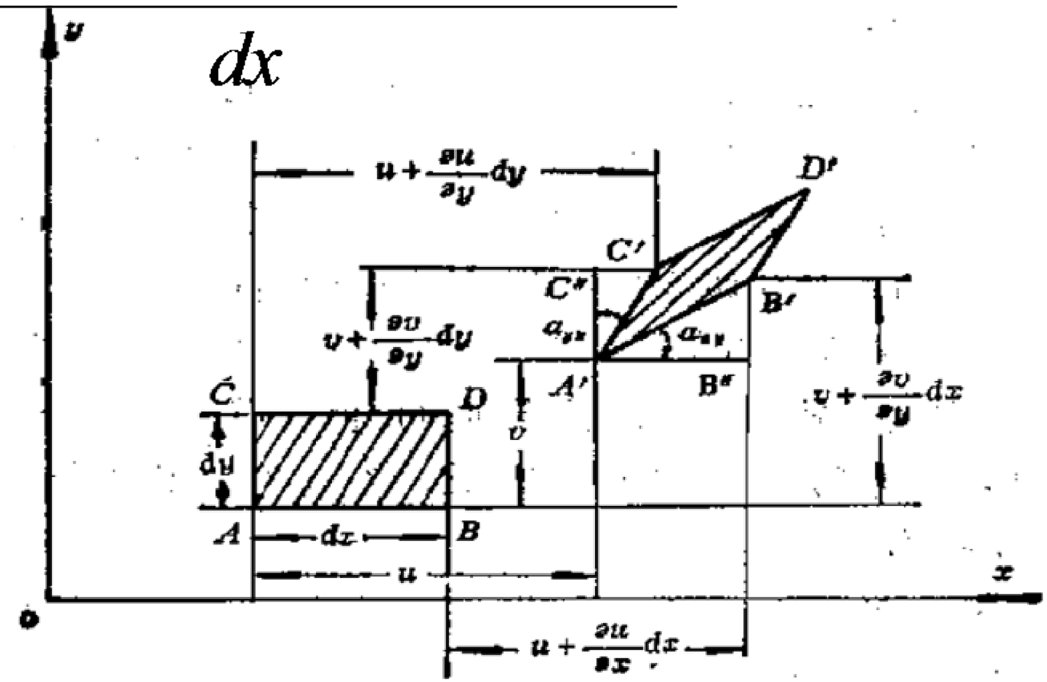


几何意义

$$A(x, y) \rightarrow A'(x+u, y+v)$$

$$B(x+dx, y) \rightarrow B'\left(x+dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx, y+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)$$

$$\frac{|A'B'|-|AB|}{|AB|}=\frac{\sqrt{(dx+u_x dx)^2+(v_x dx)^2}-dx}{dx}$$

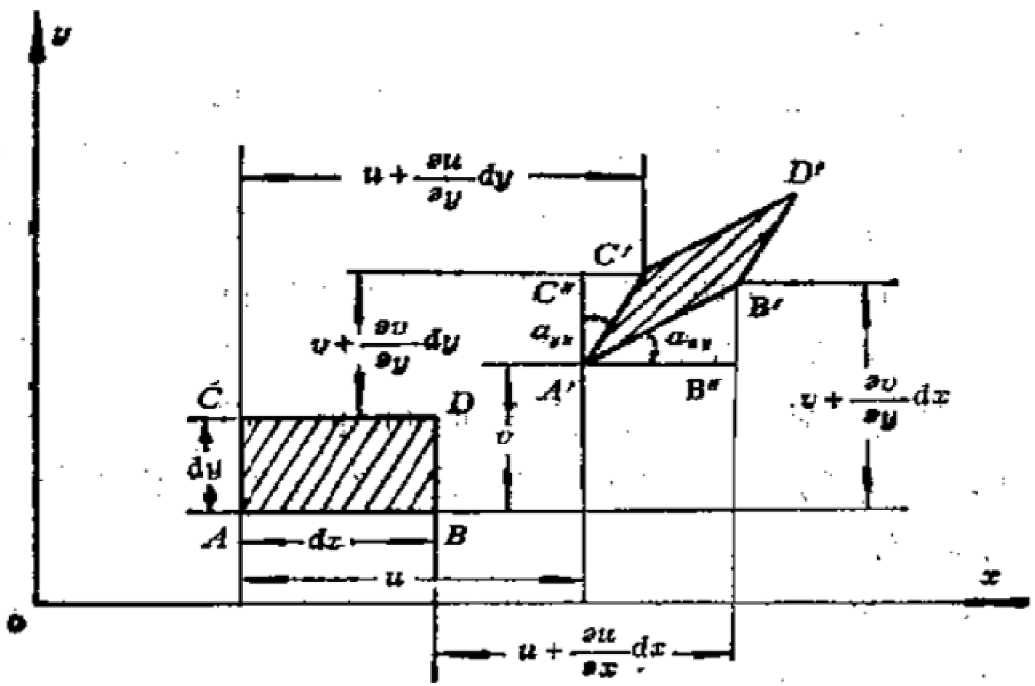


$$C(x, y+dy) \to B'\left(x+u+\frac{\partial u}{\partial y}dy, y+dy+v+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

$$=\sqrt{(1+u_x)^2+(v_x)^2}-1$$

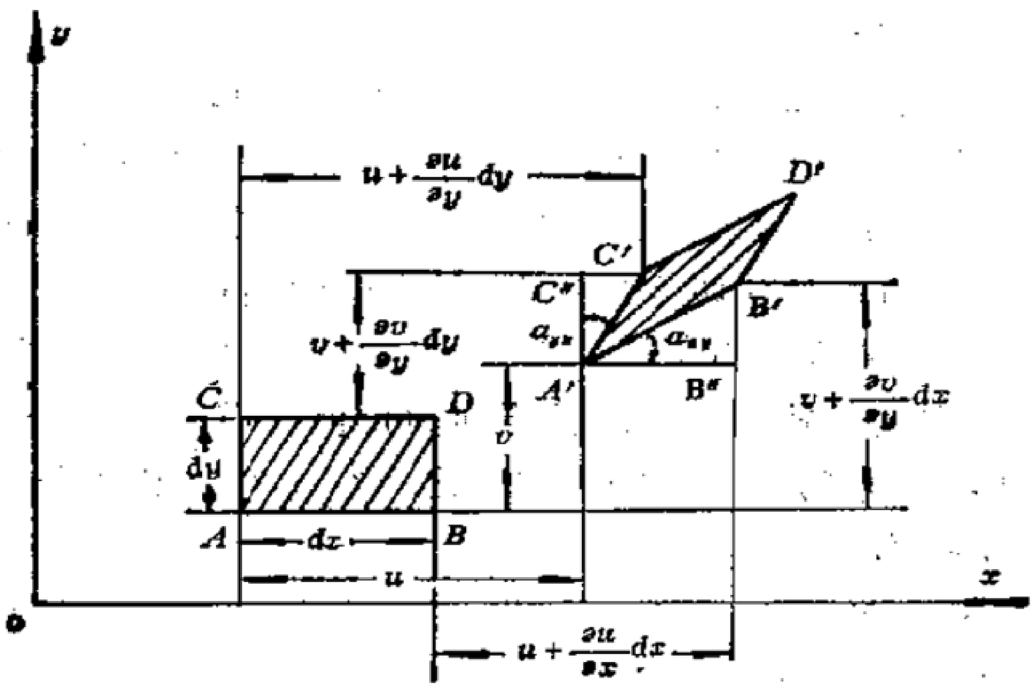
$$\approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

正应变



$$\tan\alpha_1 = \frac{v_x dx}{(1+u_x)dx} \approx \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \tan\alpha_2 = \frac{u_y dy}{(1+v_y)dy} \approx \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2 \approx \tan\alpha_1 + \tan\alpha_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$



几何方程

位移分量和应变分量之间的关系

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

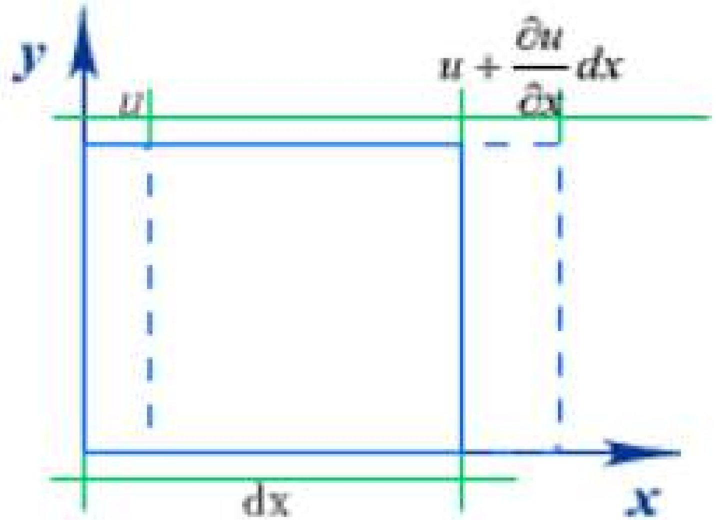
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

几何方程又称柯西方程

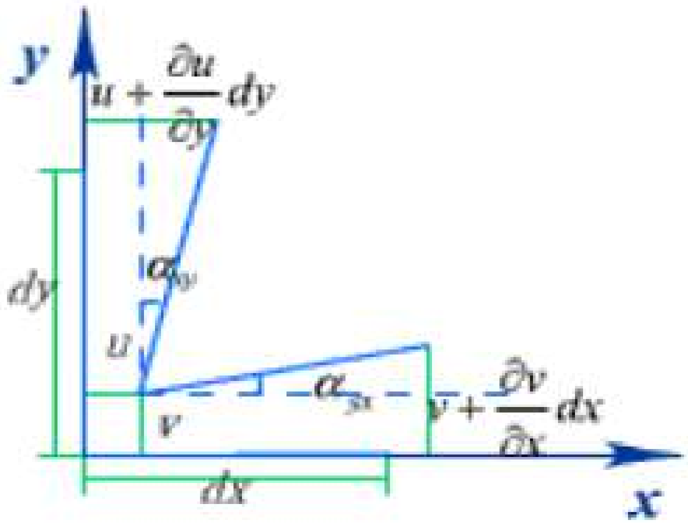
微分线段伸长——正应变不小于零

微分线段夹角缩小——切应变分量不小于零

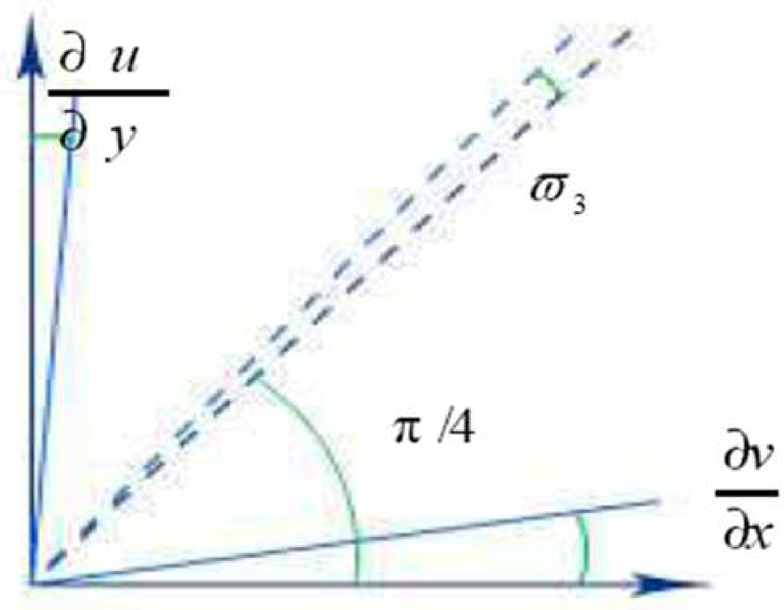
微小应变的几何解释



y
u
$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$
dx
x



y
$u+\frac{\partial u}{\partial y}dy$
dy
α_{xy}
u
α_{yx}
v
$v+\frac{\partial v}{\partial x}dx$
dx
x



$\frac{\partial u}{\partial y}$
ϖ_3
π /4
$\frac{\partial v}{\partial x}$

- 几何方程——位移导数表达的应变
- 应变描述一点的变形，但还不足以完全描述弹性体的变形
- 原因是没有考虑单元体位置的变化
- ——单元体的刚体转动
- 刚性位移能够分解为平动与转动
- 刚性转动——变形位移的一部分，但是不产生变形。

主应变与主应变方向

- 变形经过应变描述
- **应变状态——** 坐标变换时，应变分量是随之坐标变化而变化。
- 应变分量的转轴公式 $\varepsilon_{i'j'} = n_{ii'} n_{jj'} \varepsilon_{ij}$
- 应变张量

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

- 应变张量一旦拟定，则任意坐标系下的应变分量均可拟定。所以应变状态就完全拟定。
- 坐标变换后各应变分量均发生变化，但作为一种整体，所描述的应变状态并未变化。
- 主应变与应变主轴
- 应变主轴——切应变为0的方向
- 主应变——应变主轴方向的正应变