

2025 届江西省校级联考高三考前热身数学试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知圆 $C_1: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ ，圆 $C_2: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$ ，点 M 、 N 分别是圆 C_1 、圆 C_2 上的动点， P 为 x 轴上的动点，则 $|PN| - |PM|$ 的最大值是 ()

- A. $2\sqrt{5} + 4$ B. 9 C. 7 D. $2\sqrt{5} + 2$

2. $\tan 570^\circ =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知点 $A(2\sqrt{5}, 3\sqrt{10})$ 在双曲线 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 上，则该双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. $\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{10}$

4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 的直线 l 与双曲线 C 的左支交于 A 、

B 两点.若 $|AB| = |AF_2|$, $\angle BAF_2 = 120^\circ$ ，则双曲线 C 的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}x$ C. $y = \pm(\sqrt{3} - \sqrt{2})x$ D. $y = \pm(\sqrt{3} - 1)x$

5. i 是虚数单位，若 $\frac{1+7i}{2-i} = a + bi (a, b \in R)$ ，则乘积 ab 的值是 ()

- A. -15 B. -3 C. 3 D. 15

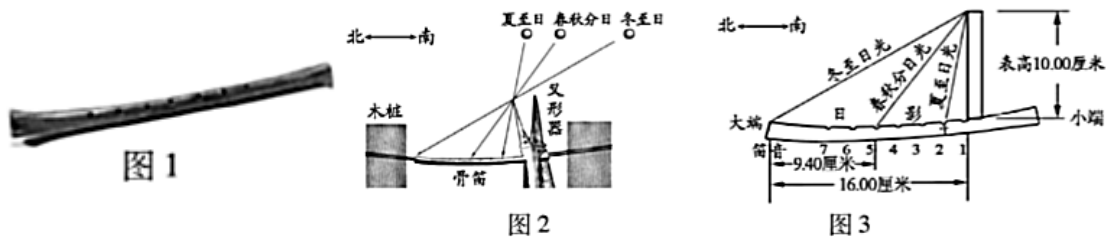
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x, & x > 0 \\ a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \leq 0 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f[f(x)] = 0$ 有且只有一个实数根，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

7. 已知复数 z 满足 $z \cdot i^{2020} = 1 + i^{2019}$ (其中 i 为虚数单位), 则复数 z 的虚部是 ()

- A. -1 B. 1 C. $-i$ D. i

8. 上世纪末河南出土的以鹤的尺骨(翅骨)制成的“骨笛”(图1), 充分展示了我国古代高超的音律艺术及先进的数学水平, 也印证了我国古代音律与历法的密切联系. 图2为骨笛测量“春(秋)分”, “夏(冬)至”的示意图, 图3是某骨笛的部分测量数据(骨笛的弯曲忽略不计), 夏至(或冬至)日光(当日正午太阳光线)与春秋分日光(当日正午太阳光线)的夹角等于黄赤交角.



由历法理论知, 黄赤交角近 1 万年持续减小, 其正切值及对应的年代如下表:

黄赤交角	$23^{\circ}41'$	$23^{\circ}57'$	$24^{\circ}13'$	$24^{\circ}28'$	$24^{\circ}44'$
正切值	0.439	0.444	0.450	0.455	0.461
年代	公元元年	公元前 2000 年	公元前 4000 年	公元前 6000 年	公元前 8000 年

根据以上信息, 通过计算黄赤交角, 可估计该骨笛的大致年代是()

- A. 公元前 2000 年到公元元年 B. 公元前 4000 年到公元前 2000 年
C. 公元前 6000 年到公元前 4000 年 D. 早于公元前 6000 年

9. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, $\angle B = 30^{\circ}$, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2$, 点 E 为 BC 上一点, 且 $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, 当 xy 的值最大时, $|\overrightarrow{AE}| =$ ()

- A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{30}}{2}$ D. $2\sqrt{3}$

10. 曲线 $x^2 = 4y$ 在点 $(2, t)$ 处的切线方程为 ()

- A. $y = x - 1$ B. $y = 2x - 3$ C. $y = -x + 3$ D. $y = -2x + 5$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 过原点 O 作斜率为 $\frac{4}{3}$ 的直线交 C 的右支于点 A , 若

$|OA| = |OF|$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. 2 D. $\sqrt{3} + 1$

12. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + x + 1$ 且 $f(a) + f(a+1) > 2$, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设 $n = 1 - 90C_{10}^1 + 90^2C_{10}^2 - 90^3C_{10}^3 + \cdots + (-1)^k 90^k C_{10}^k + \cdots + 90^{10}C_{10}^{10}$, 则 n 除以 88 的余数是_____.

14. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足: ①对任意的 $x, y \in R$, 都有 $f(x-y) = f(x) - f(y)$; ②当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 的解析式可以是_____.

15. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq 2x - 1 \\ x + y \leq m \end{cases}$, 且可行域表示的区域为三角形, 则实数 m 的取值范围为_____, 若目标函数

$z = x - y$ 的最小值为 -1, 则实数 m 等于_____.

16. 在 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^n$ 的二项展开式中, 只有第 5 项的二项式系数最大, 则该二项展开式中的常数项等于_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若对任意的 $m \in R$, 当 $x > 0$ 时, 都有 $m^2 \left(2f(x) + \frac{1}{x}\right) > 2\sqrt{2}km - 1$ 恒成立, 求最大的整数 k .

(参考数据: $e^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \approx 1.78$)

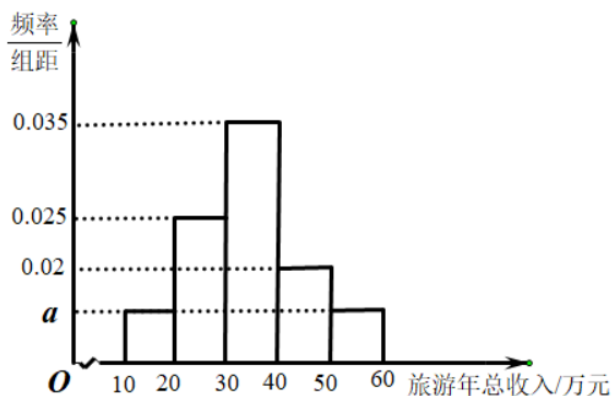
18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 并且 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$.

(1) 已知_____, 计算 $\triangle ABC$ 的面积;

请① $a = \sqrt{7}$, ② $b = 2$, ③ $\sin C = 2\sin B$ 这三个条件中任选两个, 将问题 (1) 补充完整, 并作答. 注意, 只需选择其中的一种情况作答即可, 如果选择多种情况作答, 以第一种情况的解答计分.

(2) 求 $\cos B + \cos C$ 的最大值.

19. (12 分) 2019 年 9 月 26 日, 携程网发布《2019 国庆假期旅游出行趋势预测报告》, 2018 年国庆假日期间, 西安共接待游客 1692.56 万人次, 今年国庆有望超过 2000 万人次, 成为西部省份中接待游客量最多的城市. 旅游公司规定: 若公司某位导游接待旅客, 旅游年总收入不低于 40 (单位: 万元), 则称该导游为优秀导游. 经验表明, 如果公司的优秀导游率越高, 则该公司的影响度越高. 已知甲、乙家旅游公司各有导游 40 名, 统计他们一年内旅游总收入, 分别得到甲公司的频率分布直方图和乙公司的频数分布表如下:



分组	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)
频数	2	b	20	10

- (1) 求 a , b 的值, 并比较甲、乙两家旅游公司, 哪家的影响度高?
- (2) 从甲、乙两家公司旅游总收入在 $[10,20)$ (单位: 万元) 的导游中, 随机抽取 3 人进行业务培训, 设来自甲公司的人数为 X , 求 X 的分布列及数学期望.

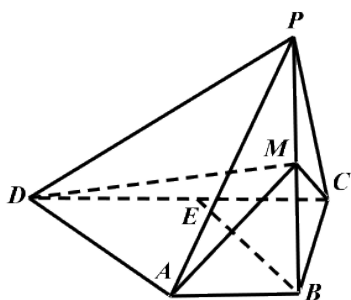
20. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 左、右焦点为 F_1, F_2 , 点 P 为 C 上任意一点, 若 $|PF_1|$ 的最大值为 3, 最小值为 1.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 动直线 l 过点 F_2 与 C 交于 P, Q 两点, 在 x 轴上是否存在定点 A , 使 $\angle PAF_2 = \angle QAF_2$ 成立, 说明理由.

21. (12 分) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_n = n^2$, 等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1$, $b_3 = a_5$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

22. (10 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形 $AB \parallel DC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 1$, $CD = 2$, $PC \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PC = \sqrt{2}$, E 为 CD 的中点.



(1) 证明: $BE \perp AP$;

(2) 设点 M 是线段 BP 上的动点, 当直线 AM 与直线 DP 所成的角最小时, 求三棱锥 $P-CDM$ 的体积.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

试题分析: 圆 $C_1: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 的圆心 $E(1, -1)$, 半径为 1, 圆 $C_2: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$ 的圆心 $F(4, 5)$, 半径是 3. 要使 $|PN| - |PM|$ 最大, 需 $|PN|$ 最大, 且 $|PM|$ 最小, $|PN|$ 最大值为 $|PF| + 3$, $|PM|$ 的最小值为 $|PE| - 1$, 故

$|PN| - |PM|$ 最大值是 $(|PF| + 3) - (|PE| - 1) = |PF| - |PE| + 4$; $F(4, 5)$ 关于 x 轴的对称点 $F'(4, -5)$,

$|PF| - |PE| = |PF'| - |PE| \leq |EF'| = \sqrt{(4-1)^2 + (-5+1)^2} = 5$, 故 $|PF| - |PE| + 4$ 的最大值为 $5 + 4 = 9$, 故选 B.

考点: 圆与圆的位置关系及其判定.

【思路点睛】先根据两圆的方程求出圆心和半径, 要使 $|PN| - |PM|$ 最大, 需 $|PN|$ 最大, 且 $|PM|$ 最小, $|PN|$ 最大值为 $|PF| + 3$, $|PM|$ 的最小值为 $|PE| - 1$, 故 $|PN| - |PM|$ 最大值是 $(|PF| + 3) - (|PE| - 1) = |PF| - |PE| + 4$, 再利用对称性, 求出所求式子的最大值.

2、A

【解析】

直接利用诱导公式化简求解即可.

【详解】

$$\tan 570^\circ = \tan (360^\circ + 210^\circ) = \tan 210^\circ = \tan (180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查三角函数的恒等变换及化简求值, 主要考查诱导公式的应用, 属于基础题.

3、C

【解析】

将点 A 坐标代入双曲线方程即可求出双曲线的实轴长和虚轴长，进而求得离心率.

【详解】

将 $x = 2\sqrt{5}, y = 3\sqrt{10}$ 代入方程 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 得 $b = 3\sqrt{10}$ ，而双曲线的半实轴 $a = \sqrt{10}$ ，所以

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$ ，得离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{10}$ ，故选 C.

【点睛】

此题考查双曲线的标准方程和离心率的概念，属于基础题.

4、D

【解析】

设 $|AF_2| = m$ ，利用余弦定理，结合双曲线的定义进行求解即可.

【详解】

设 $|AB| = |AF_2| = m, \therefore |BF_2| = \sqrt{|AB|^2 + |AF_2|^2 - 2|AB| \cdot |AF_2| \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}m$ ，由双曲线的定义可知 $|AF_1| = m - 2a$ ，

因此 $|BF_1| = 2a$ ，再由双曲线的定义可知： $|BF_2| - |BF_1| = 2a \Rightarrow m = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$ ，在三角形 AF_1F_2 中，由余弦定理可知：

$$|F_1F_2|^2 = |AF_1|^2 + |AF_2|^2 - 2|AF_1| \cdot |AF_2| \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow c^2 = (5 - 2\sqrt{3})a^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = (5 - 2\sqrt{3})a^2$$

$$\Rightarrow b^2 = (4 - 2\sqrt{3})a^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = (4 - 2\sqrt{3}) \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{3} - 1，因此双曲线的渐近线方程为：$$

$$y = \pm(\sqrt{3} - 1)x.$$

故选：D

【点睛】

本题考查了双曲线的定义的应用，考查了余弦定理的应用，考查了双曲线的渐近线方程，考查了数学运算能力.

5、B

【解析】

$$\frac{1+7i}{2-i} = \frac{(1+7i)(2+i)}{5} = -1+3i, \therefore a = -1, b = 3, ab = -3, \text{选 B.}$$

6、B

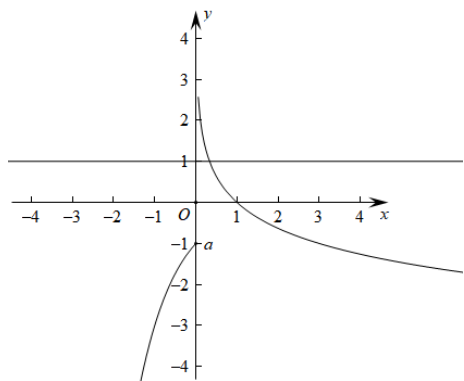
【解析】

利用换元法设 $t = f(x)$ ，则等价于 $f(t) = 0$ 有且只有一个实数根，分 $a < 0, a = 0, a > 0$ 三种情况进行讨论，结合函数的图象，求出 a 的取值范围.

【详解】

解：设 $t = f(x)$ ，则 $f(t) = 0$ 有且只有一个实数根.

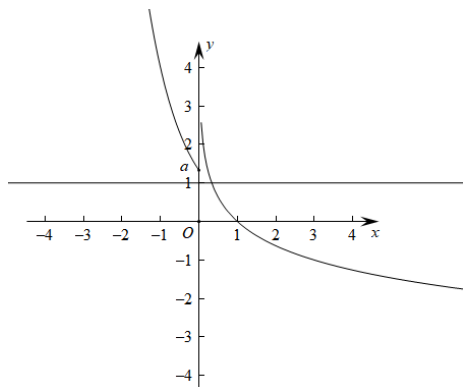
当 $a < 0$ 时，当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$ ，由 $f(t) = 0$ 即 $\log_{\frac{1}{3}} t = 0$ ，解得 $t = 1$ ，



结合图象可知，此时当 $t = 1$ 时，得 $f(x) = 1$ ，则 $x = \frac{1}{3}$ 是唯一解，满足题意；

当 $a = 0$ 时，此时当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$ ，此时函数有无数个零点，不符合题意；

当 $a > 0$ 时，当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \in [a, +\infty)$ ，此时 $f(x)$ 最小值为 a ，



结合图象可知，要使得关于 x 的方程 $f[f(x)] = 0$ 有且只有一个实数根，此时 $a > 1$ 。

综上所述： $a < 0$ 或 $a > 1$ 。

故选:A.

【点睛】

本题考查了函数方程根的个数的应用.利用换元法，数形结合是解决本题的关键.

7、A

【解析】

由虚数单位 i 的运算性质可得 $z = 1 - i$ ，则答案可求.

【详解】

解：∵ $i^4 = 1$ ，

$$\therefore i^{2020} = i^{4 \times 505} = 1, \quad i^{2019} = i^{4 \times 504 + 3} = -i,$$

则 $z \cdot i^{2020} = 1 + i^{2019}$ 化为 $z = 1 - i$ ，

∴ z 的虚部为 -1 。

故选：A.

【点睛】

本题考查了虚数单位 i 的运算性质、复数的概念，属于基础题.

8、D

【解析】

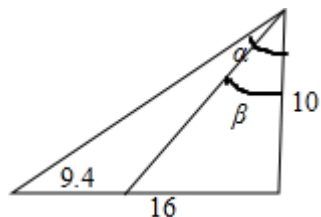
先理解题意，然后根据题意建立平面几何图形，在利用三角函数的知识计算出冬至日光与春秋分日光的夹角，即黄赤交角，即可得到正确选项.

【详解】

解：由题意，可设冬至日光与垂直线夹角为 α ，春秋分日光与垂直线夹角为 β ，

则 $\alpha - \beta$ 即为冬至日光与春秋分日光的夹角，即黄赤交角，

将图 3 近似画出如下平面几何图形：



$$\text{则 } \tan \alpha = \frac{16}{10} = 1.6, \quad \tan \beta = \frac{16 - 9.4}{10} = 0.66,$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1.6 - 0.66}{1 + 1.6 \times 0.66} \approx 0.457.$$

$$\text{Q } 0.455 < 0.457 < 0.461,$$

∴ 估计该骨笛的大致年代早于公元前 6000 年.

故选：D.

【点睛】

本题考查利用三角函数解决实际问题的能力，运用了两角和与差的正切公式，考查了转化思想，数学建模思想，以及数学运算能力，属中档题.

9、B

【解析】

由题, 可求出 $AD=1, CD=\sqrt{3}$, 所以 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$, 根据共线定理, 设 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}(0\leq\lambda\leq 1)$, 利用向量三角形法则求出 $\overrightarrow{AE}=\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$, 结合题给 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$, 得出 $x=1-\frac{\lambda}{2}, y=\lambda$, 进而得出 $xy=\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\lambda$, 最后利用二次函数求出 xy 的最大值, 即可求出 $|\overrightarrow{AE}|$.

【详解】

由题意, 直角梯形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, $\angle B=30^\circ$, $AB=2\sqrt{3}$, $BC=2$,

可求得 $AD=1, CD=\sqrt{3}$, 所以 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$.

$\because$ 点 E 在线段 BC 上, 设 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}(0\leq\lambda\leq 1)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$$

$$=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DC}=\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD},$$

$$\text{即 } \overrightarrow{AE}=\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD},$$

$$\text{又因为 } \overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$$

$$\text{所以 } x=1-\frac{\lambda}{2}, y=\lambda,$$

$$\text{所以 } xy=\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\lambda=-\frac{1}{2}[(\lambda-1)^2-1]=-\frac{1}{2}(\lambda-1)^2+\frac{1}{2},$$

当 $\lambda=1$ 时, 等号成立.

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AE}|=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=2.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查平面向量线性运算中的加法运算、向量共线定理, 以及运用二次函数求最值, 考查转化思想和解题能力.

10、A

【解析】

将点代入解析式确定参数值, 结合导数的几何意义求得切线斜率, 即可由点斜式求的切线方程.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/685120000232012101>