

2023-2024 学年广东仲元中学高三下学期期中联考数学试题试卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足: $(1+i)(z-1)=1-i$, 则 z 的共轭复数为 ()

- A. $1-2i$ B. $1+i$ C. $-1+i$ D. $1+2i$

2. 设 i 是虚数单位, 则 $(2+3i)(3-2i) =$ ()

- A. $12+5i$ B. $6-6i$ C. $5i$ D. 13

3. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线与圆 $x^2 + (y-2)^2 = 2$ 至多有一个交点, 则双曲线的离心率的取值范围是 ()

- A. $[\sqrt{2}, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(1, \sqrt{2}]$ D. $(1, 2]$

4. i 为虚数单位, 则 $\frac{2i^3}{1-i}$ 的虚部为 ()

- A. $-i$ B. i C. -1 D. 1

5. 2019 年 10 月 1 日, 中华人民共和国成立 70 周年, 举国同庆. 将 2,0,1,9,10 这 5 个数字按照任意次序排成一行, 拼成一个 6 位数, 则产生的不同的 6 位数的个数为

- A. 96 B. 84 C. 120 D. 360

6. 已知复数 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(-1, 2)$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $z \cdot i = 2 - i$ B. 复数 z 的共轭复数是 $1 - 2i$
C. $|z| = 5$ D. $\frac{z}{1+i} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

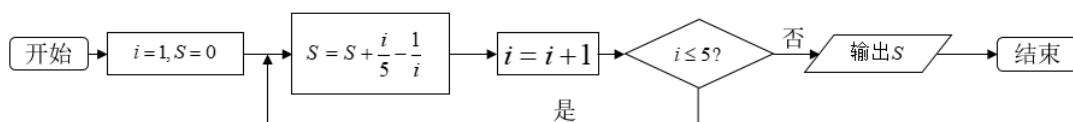
7. 阅读名著, 品味人生, 是中华民族的优良传统. 学生李华计划在高一年级每周星期一至星期五的每天阅读半个小时中国四大名著:《红楼梦》、《三国演义》、《水浒传》及《西游记》, 其中每天阅读一种, 每种至少阅读一次, 则每周不同的阅读计划共有 ()

- A. 120 种 B. 240 种 C. 480 种 D. 600 种

8. 已知命题 $p: x < 2m+1, q: x^2 - 5x + 6 < 0$, 且 p 是 q 的必要不充分条件, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $m > \frac{1}{2}$ B. $m \geq \frac{1}{2}$ C. $m > 1$ D. $m \geq 1$

9. 执行下面的程序框图，则输出 S 的值为 ()



- A. $-\frac{1}{12}$ B. $\frac{23}{60}$ C. $\frac{11}{20}$ D. $\frac{43}{60}$

10. 集合 $M = \{y \mid y = \sqrt{4-x^2}, x \in \mathbb{Z}\}$ 的真子集的个数为()

- A. 7 B. 8 C. 31 D. 32

11. 已知函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ 的图象向左平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位后得到函数 $g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象，则 φ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{8}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{5\pi}{8}$

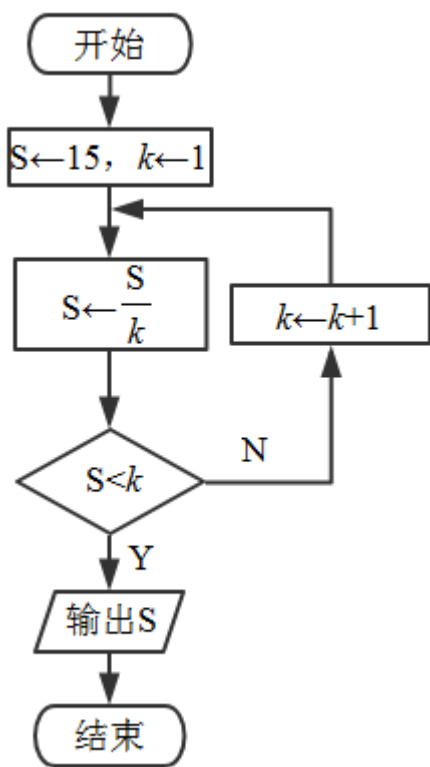
12. 抛物线 $\square^2 = \square\square (\square > 0)$ 的准线与双曲线 $\square: \frac{\square^2}{8} - \frac{\square^2}{4} = 1$ 的两条渐近线所围成的三角形面积为 $2\sqrt{2}$ ，则 $\square$ 的值为 ()

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数 $f(x) = 4\cos \omega x \sin(\omega x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} (\omega > 0)$ 的最大值与最小正周期相同，则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的单调递增区间为 _____.

14. 下图是一个算法流程图，则输出的 S 的值是_____.



15. 已知四棱锥 $P-ABCD$ ，底面四边形 $ABCD$ 为正方形， $PA=PB=PC=PD$ ，四棱锥的体积为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ，在该四

棱锥内放置一球 O ，则球 O 体积的最大值为_____.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，满足 $a_1=1$ ， $a_{k+1}-a_k=a_i$ ($i \leq k, k=1, 2, 3, \dots, n-1$)，若 $\{a_n\}$ 是等比数列，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知椭圆 C 的中心在坐标原点 O ，其短半轴长为 1，一个焦点坐标为 $(1, 0)$ ，点 A 在椭圆 C 上，点 B 在直线 $y = \sqrt{2}$ 上，且 $OA \perp OB$.

(1) 证明：直线 AB 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切；

(2) 设 AB 与椭圆 C 的另一个交点为 D ，当 $\triangle AOB$ 的面积最小时，求 OD 的长.

18. (12 分) 某社区服务中心计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 5 元，售价每瓶 7 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完. 根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温 (单位：摄氏度 $^{\circ}\text{C}$) 有关. 如果最高气温不低于 25，需求量为 600 瓶；如果最高气温位于区间 $[20, 25)$ ，需求量为 500 瓶；如果最高气温低于 20，需求量为 300 瓶. 为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

最高气温	$[10, 15)$	$[15, 20)$	$[20, 25)$	$[25, 30)$	$[30, 35)$	$[35, 40)$
------	------------	------------	------------	------------	------------	------------

天数	4	14	36	27	6	3
----	---	----	----	----	---	---

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率.

- (1) 求六月份这种酸奶一天的需求量 X (单位: 瓶) 的分布列;
- (2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 y (单位: 元), 当六月份这种酸奶一天的进货量为 n (单位: 瓶) 时, y 的数学期望的取值范围?

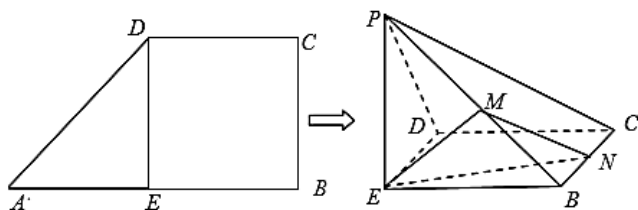
19. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$,

- (1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减;
- (2) 证明: 对任意的 $x \in (0,1)$ 有 $e^{\frac{x}{1-x}} < 1-x < e^{-x}$.

20. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2, 且过点 $P(2,0)$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 设 F 为 C 的左焦点, 点 M 为直线 $x = -4$ 上任意一点, 过点 F 作 MF 的垂线交 C 于两点 A, B
 - (i) 证明: OM 平分线段 AB (其中 O 为坐标原点);
 - (ii) 当 $\frac{|MF|}{|AB|}$ 取最小值时, 求点 M 的坐标.

21. (12 分) 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 2DC = 2BC$, E 为 AB 的中点, 沿 DE 将 $\triangle ADE$ 折起, 使得点 A 到点 P 位置, 且 $PE \perp EB$, M 为 PB 的中点, N 是 BC 上的动点 (与点 B, C 不重合).



- (I) 证明: 平面 $EMN \perp$ 平面 PBC 垂直;
- (II) 是否存在点 N , 使得二面角 $B-EN-M$ 的余弦值 $\frac{\sqrt{6}}{6}$? 若存在, 确定 N 点位置; 若不存在, 说明理由.

22. (10 分) 设函数 $f(x) = 2x^2 + a \ln x$, ($a \in \mathbb{R}$).

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 2x + m$, 求实数 a, m 的值;
- (2) 若 $f(2x-1) + 2 > 2f(x)$ 对任意 $x \in [2, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
- (3) 关于 x 的方程 $f(x) + 2 \cos x = 5$ 能否有三个不同的实根? 证明你的结论.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

转化 $(1+i)(z-1)=1-i$ ，为 $z-1=\frac{1-i}{1+i}$ ，利用复数的除法化简，即得解

【详解】

复数 z 满足： $(1+i)(z-1)=1-i$

$$\text{所以 } z-1 = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$$

$$\Rightarrow z = 1-i$$

$$\therefore \bar{z} = 1+i$$

故选：B

【点睛】

本题考查了复数的除法和复数的基本概念，考查了学生概念理解，数学运算的能力，属于基础题.

2、A

【解析】

利用复数的乘法运算可求得结果.

【详解】

由复数的乘法法则得 $(2+3i)(3-2i)=6+5i-6i^2=12+5i$.

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的乘法运算，考查计算能力，属于基础题.

3、C

【解析】

求得双曲线的渐近线方程，可得圆心 $(0,2)$ 到渐近线的距离 $d \geq \sqrt{2}$ ，由点到直线的距离公式可得 a

的范围，再由离心率公式计算即可得到所求范围.

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线为 $y = \frac{1}{a}x$ ，即 $x - ay = 0$ ，

由题意知，直线 $x - ay = 0$ 与圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 2$ 相切或相离，则 $d = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} \geq \sqrt{2}$ ，

解得 $a \geq 1$ ，因此，双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} \in (1, \sqrt{2}]$.

故选：C.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率的范围，注意运用圆心到渐近线的距离不小于半径，考查化简整理的运算能力，属于中档题.

4、C

【解析】

利用复数的运算法则计算即可.

【详解】

$\frac{2i^3}{1-i} = \frac{-2i}{1-i} = \frac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -i(1+i) = 1-i$ ，故虚部为 -1 .

故选：C.

【点睛】

本题考查复数的运算以及复数的概念，注意复数 $a+bi (a, b \in \mathbb{R})$ 的虚部为 b ，不是 bi ，本题为基础题，也是易错题.

5、B

【解析】

2,0,1,9,10 按照任意次序排成一行，得所有不以 0 开头的排列数共 $4A_4^4 = 96$ 个，其中含有 2 个 10 的排列数共 $A_4^2 = 12$ 个，

所以产生的不同的 6 位数的个数为 $96 - 12 = 84$. 故选 B.

6、D

【解析】

首先求得 $z = -1 + 2i$ ，然后根据复数乘法运算、共轭复数、复数的模、复数除法运算对选项逐一分析，由此确定正确选项.

【详解】

由题意知复数 $z = -1 + 2i$ ，则 $z \cdot i = (-1 + 2i) \cdot i = -2 - i$ ，所以 A 选项不正确；复数 z 的共轭复数是 $-1 - 2i$ ，所以 B 选项不正确； $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，所以 C 选项不正确； $\frac{z}{1+i} = \frac{-1+2i}{1+i} = \frac{(-1+2i) \cdot (1-i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ ，所以 D 选项正确。

故选：D

【点睛】

本小题考查复数的几何意义，共轭复数，复数的模，复数的乘法和除法运算等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，数形结合思想。

7、B

【解析】

首先将五天进行分组，再对名著进行分配，根据分步乘法计数原理求得结果。

【详解】

将周一至周五分为 4 组，每组至少 1 天，共有： $\frac{C_5^2 C_3^1 C_2^1}{A_3^3} = 10$ 种分组方法；

将四大名著安排到 4 组中，每组 1 种名著，共有： $A_4^4 = 24$ 种分配方法；

由分步乘法计数原理可得不同的阅读计划共有： $10 \times 24 = 240$ 种

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查排列组合中的分组分配问题，涉及到分步乘法计数原理的应用，易错点是忽略分组中涉及到的平均分组问题。

8、D

【解析】

求出命题 q 不等式的解为 $2 < x < 3$ ， p 是 q 的必要不充分条件，得 q 是 p 的子集，建立不等式求解。

【详解】

解：Q 命题 $p: x < 2m + 1, q: x^2 - 5x + 6 < 0$ ，即： $2 < x < 3$ ，

p 是 q 的必要不充分条件，

$\therefore (2, 3) \subseteq (-\infty, 2m + 1)$ ，

$\therefore 2m + 1 \geq 3$ ，解得 $m \geq 1$ 。实数 m 的取值范围为 $m \geq 1$ 。

故选：D。

【点睛】

本题考查根据充分、必要条件求参数范围，其思路方法：

(1)解决此类问题一般是把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系，然后根据集合之间关系列出关于参数的不等式(组)求解.

(2)求解参数的取值范围时，一定要注意区间端点值的检验.

9、D

【解析】

根据框图，模拟程序运行，即可求出答案.

【详解】

运行程序，

$$s = \frac{1}{5} - 1, i = 2,$$

$$s = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - 1 - \frac{1}{2}, i = 3,$$

$$s = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, i = 4,$$

$$s = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, i = 5,$$

$$s = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, i = 5,$$

$$s = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{5} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, i = 6, \text{ 结束循环,}$$

$$\text{故输出 } s = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 3 - \frac{137}{60} = \frac{43}{60},$$

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了程序框图，循环结构，条件分支结构，属于中档题.

10、A

【解析】

计算 $M = \{2, \sqrt{3}, 0\}$ ，再计算真子集个数得到答案.

【详解】

$$M = \{y \mid y = \sqrt{4-x^2}, x \in \mathbb{Z}\} = \{2, \sqrt{3}, 0\}, \text{ 故真子集个数为: } 2^3 - 1 = 7.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查了集合的真子集个数，意在考查学生的计算能力.

11、A

【解析】

首先求得平移后的函数 $g(x) = \sin\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$ ，再根据 $\sin\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 求 φ 的最小值.

【详解】

根据题意， $f(x)$ 的图象向左平移 φ 个单位后，所得图象对应的函数

$$g(x) = \sin\left[2(x + \varphi) - \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right),$$

所以 $2\varphi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ ，所以 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. 又 $\varphi > 0$ ，所以 φ 的最小值为 $\frac{\pi}{4}$.

故选：A

【点睛】

本题考查三角函数的图象变换，诱导公式，意在考查平移变换，属于基础题型.

12、A

【解析】

求得抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，解得两交点，由三角形的面积公式，计算即可得到所求值.

【详解】

抛物线 $x^2 = 4y$ ($4 > 0$) 的准线为 $y = -1$ ，双曲线 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的两条渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，可得两交点为

$\left(-\frac{4}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，即有三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ，解得 $4 = 8$ ，故选 A.

【点睛】

本题考查三角形的面积的求法，注意运用抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，考查运算能力，属于基础题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 $\left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$

【解析】

利用三角函数的辅助角公式进行化简，求出函数的解析式，结合三角函数的单调性进行求解即可.

【详解】

$$\begin{aligned} \because f(x) &= 4 \cos \omega x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega x \right) + \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \sin \omega x \cos \omega x - 2\sqrt{2} \cos^2 \omega x + \sqrt{2} \end{aligned}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/685140033044011332>