



2024第六届全国边坡安全防护与
生态修复新技术高峰论坛



高陡岩质边坡渐进破坏的数值流形法模拟

樊火 研究员

中科院成都山地灾害与环境研究所

山地自然灾害与工程安全全国重点实验室

2024年4月27-30日·贵阳



提纲

1

背景

2

数值流形法

3

四方面改进

4

验证与算例

5

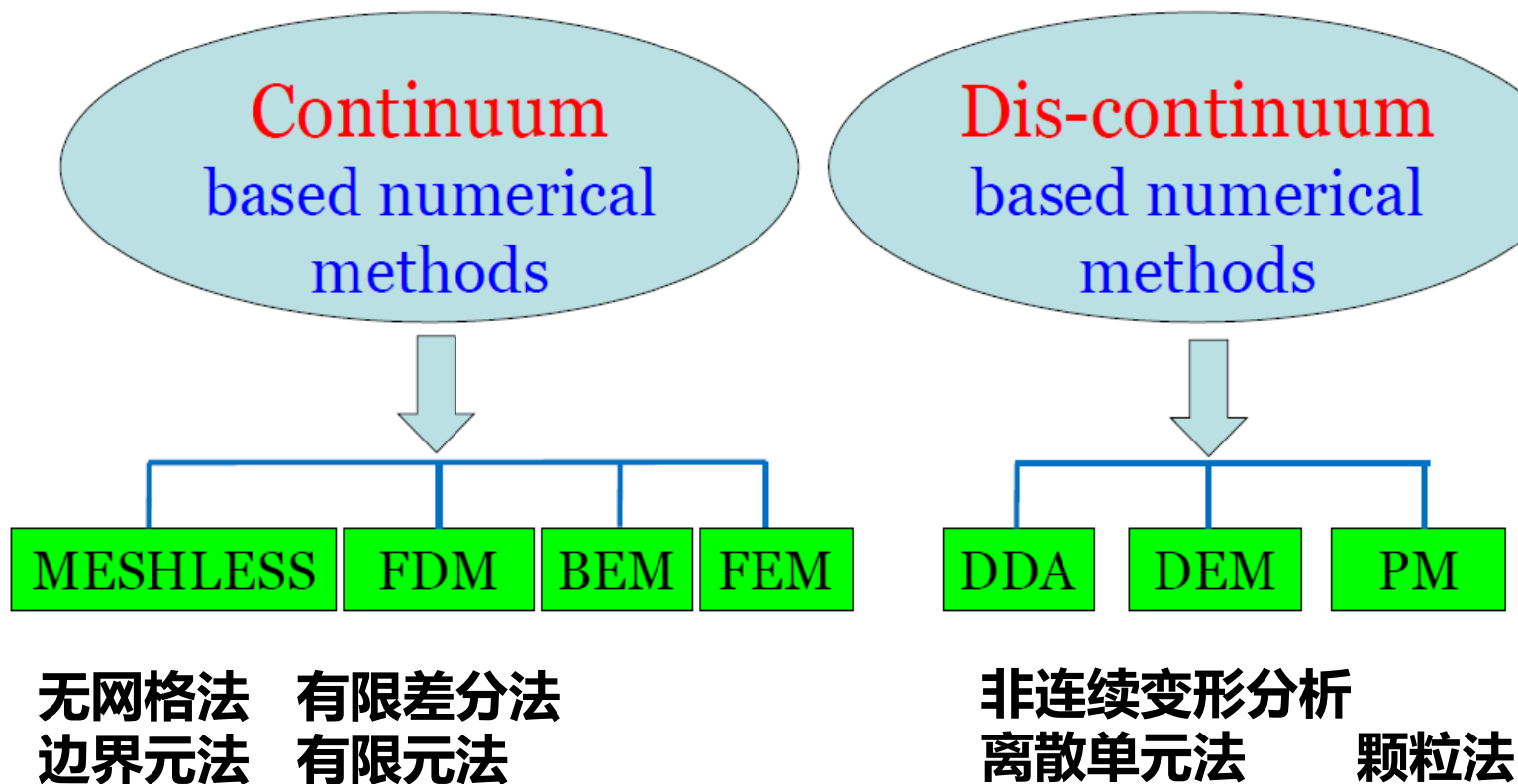
结论与展望

1. 背景——岩土体的渐进破坏



渐进破坏：连续小变形—>裂纹扩展—>碰撞破碎—>离散大运动

1. 背景——数值方法



提纲

1

背景

2

数值流形法

3

四方面改进

4

验证与算例

5

结论与展望

2. 数值流形法(NMM)——提出



Numerical Manifold Method

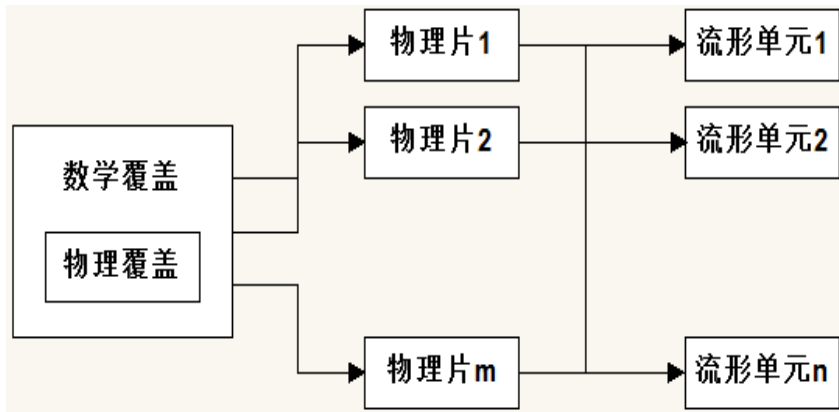
数值流形法 (NMM)突出特征

1. 两套独立的覆盖系统
2. 统一描述连续与非连续
3. 岩土材料从连续变形到破坏

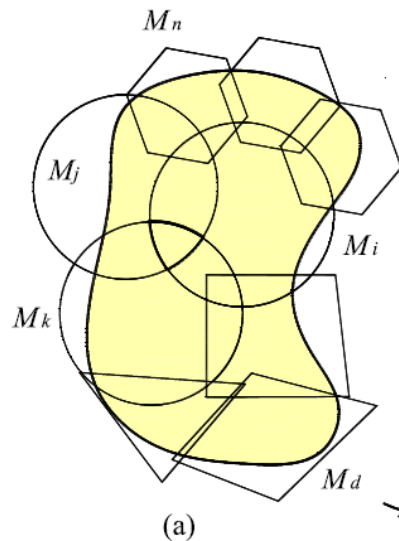
Proposed by **Gen-hua Shi** in **1991** at UC Berkeley in one paper titled “**Manifold method of material analysis**”, published in Transactions of the Conference on Applied Mathematics and Computing (9th) Held in Minneapolis, Minnesota on 18-21 June **1991**.

2. 数值流形法(NMM)——基本原理：伽辽金类数值方法(同FEM)

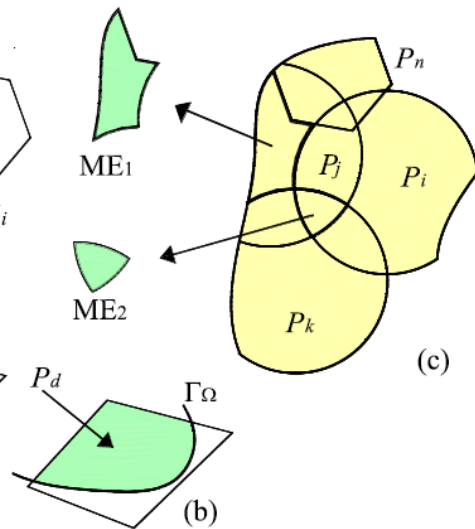
基本概念(“两盖三片”)



数学覆盖(星)



流形单元



物理覆盖(问题域)

物理片

1. 数学片相互切割形成物理片
2. 数学片与求解域切割形成物理片
3. 可以相互重叠
4. 全体的集合构成物理覆盖

数学片

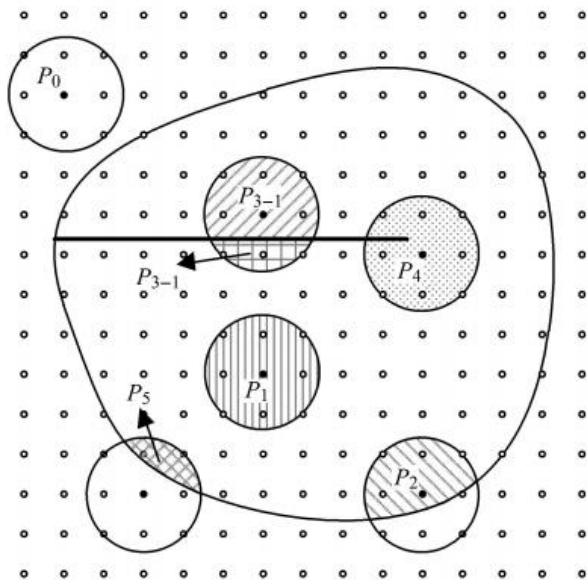
1. 各自独立的单连通域
2. 可以相互重叠
3. 全体的集合构成数学覆盖

流形单元(单元片)

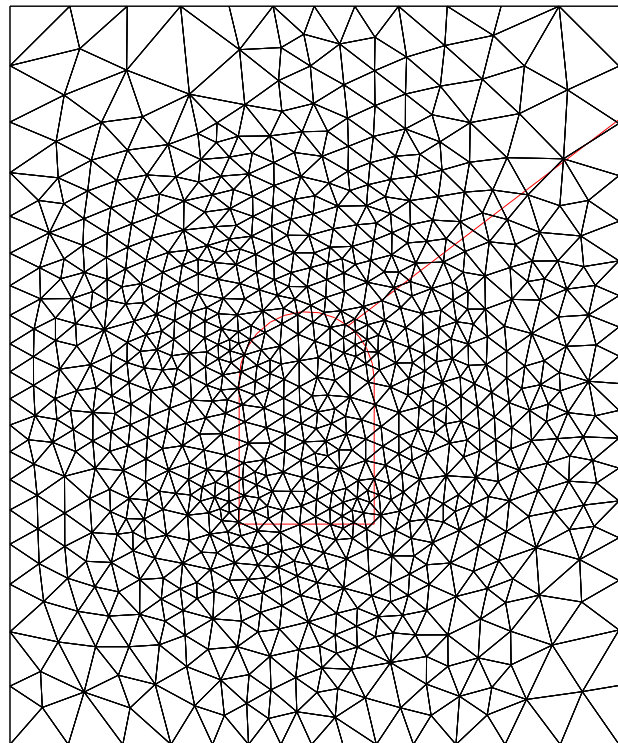
1. 物理片的交集
2. 不重叠
3. 基本的积分域

2. 数值流形法(NMM)——离散化

空间离散化(无网格/有限元)



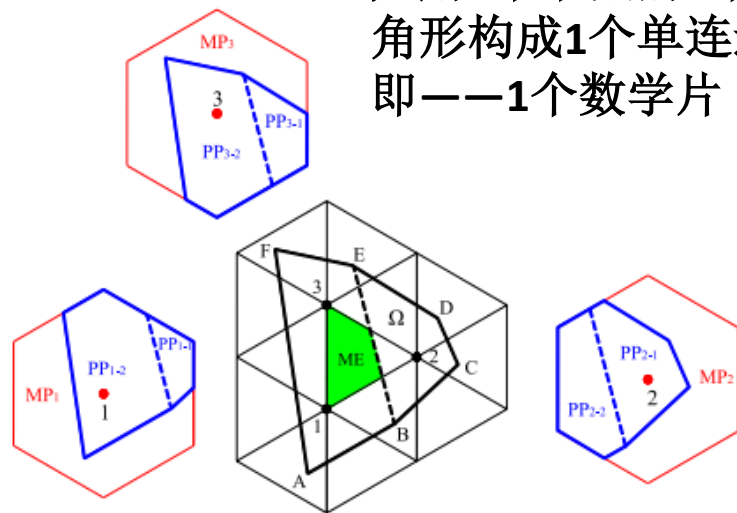
由无网格法的节点生成覆盖系统



由FEM网格生成双覆盖系统(常用)

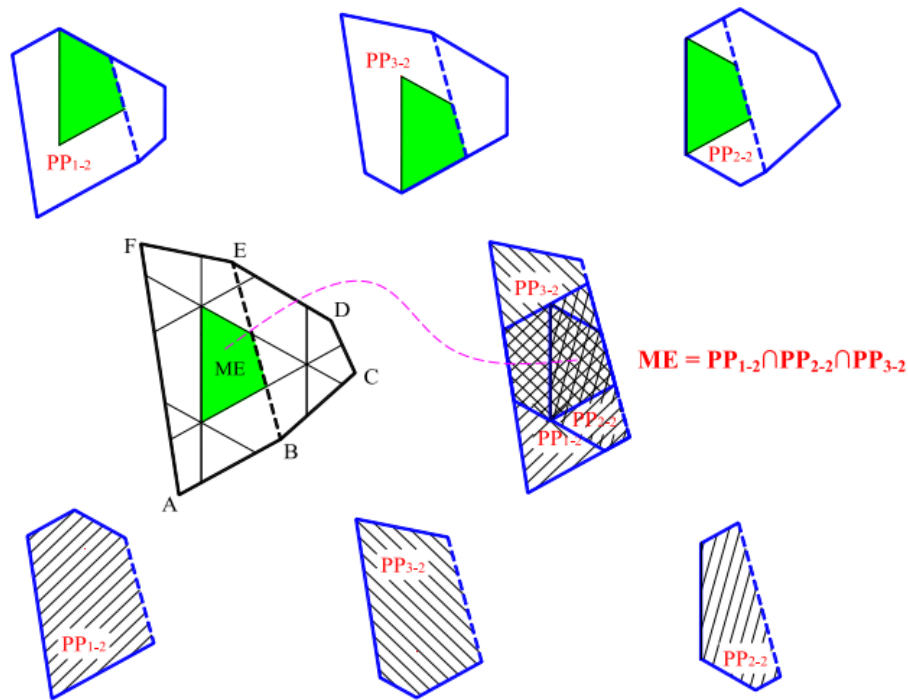
2. 数值流形法(NMM)——覆盖与单元

共用1个节点的6个三角形构成1个单连通域：
即——1个数学片



计算域用FEM网格覆盖构成
NMM的有限覆盖系统

三角形网格覆盖下，
每个单元都是三个物理片的交集



NMM单元的形成
(公共部分)

2. 数值流形法(NMM)——单元位移场构造

单元位移场：用定义在**数学片**上的**权函数粘合**定义在**物理片**上的**局部近似函数**

$$u^h(x, y) = w_1(x, y)u_1^h(x, y) + w_2(x, y)u_2^h(x, y) + w_3(x, y)u_3^h(x, y)$$

权函数：满足单位分解

$$w_i(\mathbf{r}) = 0, \text{ if } \mathbf{r} \notin \Omega_i^m$$

$$0 \leq w_i(\mathbf{r}) \leq 1, \text{ if } \mathbf{r} \in \Omega_i^m$$

$$\sum_{i=1}^{n^m} w_i(\mathbf{r}) = 1, \text{ if } \mathbf{r} \in \Omega$$

FEM的形函数都可以用

局部近似

一般形式

$$u_i^h = \sum_{k=1}^n a_k b_k \quad \text{——多项式表达}$$

幂指数基 $\{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots\}$

三角函数基 $\left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{3\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{3\theta}{2} \right\}$

有理函数基 $\left\{ \frac{1}{r}, \frac{1}{r^2} \right\}$ ——反映裂纹尖端的奇异性
——反映场变量随距离的衰减性

FEM vs. NMM

FEM: 在**网格**上定义**权函数**和**局部近**(网格承担双重角色)

NMM: 在**数学片**上定义**权函数**, 在**物理片**上定义**局部近似**

提纲

1

背景

2

数值流形法

3

四方面改进

4

验证与算例

5

结论与展望

3. 四方面改进

◆ 裂隙岩体破碎过程数值模拟至少要注意以下四个问题

(1) 裂纹尖端场变量性质：位移间断和应力奇异

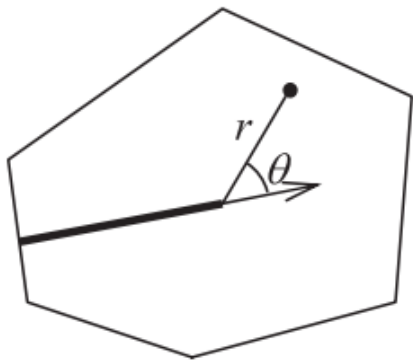
(2) 奇异函数积分：精确

(3) 开裂准则：适当

(4) 接触力计算：精度、稳定性

3. 四方面改进——裂纹尖端奇异场

◆ 反映裂纹面两侧位移跳跃场和裂纹尖端应力场的奇异性：**间断和奇异增强**



奇异物理片及极坐标系

裂纹尖端附近 Williams 位移级数的前两项

$$\{\psi_\alpha\} = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\} = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{3\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{3\theta}{2} \right\}$$

加入奇异单元 $\downarrow$ 的位移场

奇异单元的位移场 $\mathbf{u}_e(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{T}_e^i \mathbf{d}_e^i$

插值矩阵 $\mathbf{T}_e^i(x, y) = \begin{bmatrix} w^i & 0 & w^i \Delta \psi_1^i & 0 & w^i \Delta \psi_2^i & 0 & w^i \Delta \psi_3^i & 0 & w^i \Delta \psi_4^i & 0 \\ 0 & w^i & 0 & w^i \Delta \psi_1^i & 0 & w^i \Delta \psi_2^i & 0 & w^i \Delta \psi_3^i & 0 & w^i \Delta \psi_4^i \end{bmatrix}$

待解自由度 $\mathbf{d}_e^i = [u^i, v^i, e_1^{iu}, e_1^{iv}, e_2^{iu}, e_2^{iv}, e_3^{iu}, e_3^{iv}, e_4^{iu}, e_4^{iv}]^T$

Williams ML. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics* 1957; **24**:109–114.

3. 四方面改进——奇异函数积分

◆ 提高奇异函数积分精度：增强型广义Duffy变换法

奇异单元的位移场 $\left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{3\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{3\theta}{2} \right\}$

$$\int B^T \sigma d\Omega \quad \int B^T D B d\Omega$$

初应力向量

刚度矩阵

$$\sqrt{r}$$

求导数

$$\frac{1}{\sqrt{r}}, \frac{1}{r}$$

奇异项

传统的数字积分法
(如Gauss) 精度
和效率都不高

广义Duffy 变换法
$$I = \int_0^1 \int_0^x \frac{f(x, y)}{r^{\alpha/2}} dx dy = \int_0^1 \int_0^x \frac{f(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(u, v)}{(1 + v^2)^{\alpha/2}} \beta u^{2\beta-1-\alpha\beta} du dv,$$

单元形状影响计算精度

S.E. Mousavi, N. Sukumar, Generalized Duffy transformation for integrating vertex singularities, Comput. Mech. 45 (2–3) (2010) 127–140.

3. 四方面改进——奇异函数积分

◆ 提高奇异函数积分精度：增强型广义Duffy变换法

奇异项

$$\frac{1}{\sqrt{r}}, \frac{1}{r}$$

$$v = \frac{1}{2}(e^w - e^{-w}).$$

Substituting Eqs. (16) and (17) into Eq. (15) gives us

$$\begin{aligned} \text{Solving Eq. (16) yields} \quad w &= \ln[v + \sqrt{1 + v^2}] \\ dv &= \sqrt{1 + v^2} dw \\ I &= \int_0^1 \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} f(u, w) \left\{ 1 + \left[\frac{1}{2}(e^w - e^{-w}) \right]^2 \right\}^{(1-\alpha)/2} \beta u^{2\beta-1-\alpha\beta} dudw \\ &= \int_0^1 \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} f(u, w) \left(\frac{e^w + e^{-w}}{2} \right)^{(1-\alpha)} \beta u^{2\beta-1-\alpha\beta} dudw. \end{aligned}$$

$$I = \int_{\Delta_{123}} \frac{f(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} dx dy = \sum_{i=1}^{n \times n} \tilde{w}_i \frac{f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)}{(\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2)^{\alpha/2}},$$

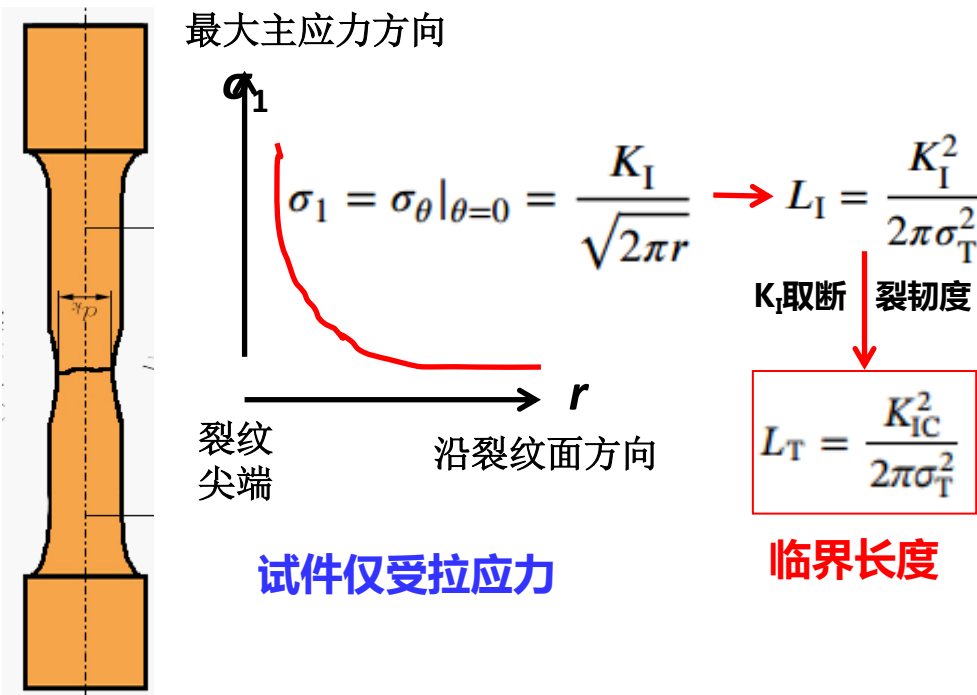
with

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= x_1 + (x_2 - x_1)\bar{\bar{x}}_i + (x_3 - x_2)\bar{\bar{y}}_i, & \bar{\bar{x}}_i &= \tilde{x}_i^\beta, & \bar{x}_i &= (1 + x_i)/2 \\ \tilde{y}_i &= y_1 + (y_2 - y_1)\bar{\bar{x}}_i + (y_3 - y_2)\bar{\bar{y}}_i, & \bar{\bar{y}}_i &= \bar{\bar{x}}_i(e^{\bar{y}_i} - e^{-\bar{y}_i})/2, & \bar{y}_i &= \ln(1 + \sqrt{2})(1 + y_i)/2 \\ \tilde{w}_i &= \bar{\bar{w}}_i, & \bar{\bar{w}}_i &= (e^{\bar{y}_i} + e^{-\bar{y}_i})\bar{w}_i/2, & \bar{w}_i &= \ln(1 + \sqrt{2})w_i/4 \end{aligned}$$

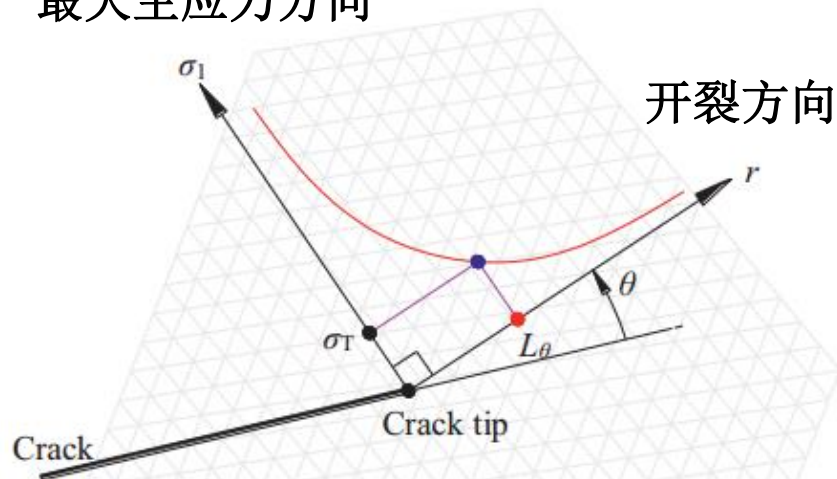
Huo Fan, Duruo Huang*, Gang Wang. A four-way enhanced numerical manifold method for crack propagation and failure analysis of rock slopes. Applied Mathematical Modelling, 2021, 95: 623–643.

3. 四方面改进——开裂强度准则

◆ 开裂准则：临界长度破裂准则：拉剪破坏



最大主应力方向



受力状态比较复杂：拉应力+剪应力

开裂方向：

找 $\sigma_1 \approx \sigma_T$ 点，得 L_θ

$L_\theta \geq L_T$ 则扩展 L_θ ，否则不扩展

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/685243222304011210>