联立方程组模型

本章简单介绍联立方程组模型计量分析，包括联立方程组模型的基本概念、假设、识别性和参数估计等。

第一节 联立方程组模型及其假设

第二节 联立方程组模型的识别性

第三节 联立方程组模型的参数估计

第一节联立方程组模型及其假设

一、联立方程组模型的基本概念

- 联立方程组模型是方程组形式的计量经济模型。
- 用一个简单的微观市场均衡模型说明联立方程组模型的基本情况，以及它们所涉及的基本概念。

- 这个微观市场均衡模型包括一个供给函数、一个需求函数、以及一个均衡方程，具体如下：

$$Q_t^S = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 P_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$Q_t^D = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Y_t + \varepsilon_{2t}$$

$$Q_t^S = Q_t^D$$

- 称被决定的 P_t 和 Q_t 为模型的"内生变量"。联立方程组模型的内生变量对应单方程模型中的被解释变量。
- 收入变量 Y_t 为模型的"外生变量"，相当于单方程模型中的解释变量。
- 内生变量 P_t 的一期滞后变量 P_{t-1}，称"滞后内生变量"。
- 外生变量和滞后内生变量统称为联立方程组模型的"前定变量"。

- 区分联立方程组模型的内生变量和前定变量非常重要。因为两类变量的数目及构成模型的情况，对联立方程组模型是否意义，是否能够得出唯一确定的参数估计等都有重要的影响。
- 通常一个联立方程组模型的内生变量数量与方程个数相等，而且能够表示成每个内生变量被其他变量决定的标准形式。

- “结构式模型”（Structural Model）：
  每个方程都代表经济问题和系统的一个方面，每个参数都有意义，能反映研究问题或经济系统结构和内在联系的联立方程组模型
- “简约式模型”（Reduced Form Model）：
  为了参数估计和分析的需要，常需要把结构式模型变换为各内生变量只是前定变量函数形式的“简约式模型”。由于内生变量数与方程的个数相等，因此这种变换一般是不难做到的。

$$Q_t = Q_t^S = Q_t^D$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} Q_t &= \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 P_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ Q_t &= \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Y_t + \varepsilon_{2t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} Q_t &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2\beta_1}{1-\alpha_2\beta_2} + \frac{\alpha_2\beta_3}{1-\alpha_2\beta_2} Y_t + \frac{\alpha_3}{1-\alpha_2\beta_2} P_{t-1} + \frac{\varepsilon_{1t} + \alpha_2\varepsilon_{2t}}{1-\alpha_2\beta_2} \\ P_t &= \frac{\beta_1 + \alpha_1\beta_2}{1-\alpha_2\beta_2} + \frac{\beta_3}{1-\alpha_2\beta_2} Y_t + \frac{\alpha_3\beta_2}{1-\alpha_2\beta_2} P_{t-1} + \frac{\beta_2\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1-\alpha_2\beta_2} \end{aligned}$$

引进下述记法

$$\Pi_{11}=\frac{\alpha_1+\alpha_2\beta_1}{1-\alpha_2\beta_2},\Pi_{12}=\frac{\alpha_2\beta_3}{1-\alpha_2\beta_2},\Pi_{13}=\frac{\alpha_3}{1-\alpha_2\beta_2},u_{1t}=\frac{\varepsilon_{1t}+\alpha_2\varepsilon_{2t}}{1-\alpha_2\beta_2}$$

$$\Pi_{21}=\frac{\beta_1+\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_2\beta_2},\Pi_{22}=\frac{\beta_3}{1-\alpha_2\beta_2},\Pi_{23}=\frac{\alpha_3\beta_2}{1-\alpha_2\beta_2},u_{2t}=\frac{\beta_2\varepsilon_{1t}+\varepsilon_{2t}}{1-\alpha_2\beta_2}$$

则模型进一步化为

$$Q_t=\Pi_{11}+\Pi_{12}Y_t+\Pi_{13}P_{t-1}+u_{1t}$$

$$P_t=\Pi_{21}+\Pi_{22}Y_t+\Pi_{23}P_{t-1}+u_{2t}$$

这就是原市场均衡模型的简约式模型。

- 引进简约式模型的根本原因：

1、简约式模型的每个方程都是内生变量与前定变量的函数关系，不存在内生变量的交叉决定，因此求解内生变量的数值和进行预测都比较简单，

2、没有内生变量作为解释变量可避免解释变量与误差项存在相关性，并对分析结果有效性的影响。

- 简约式模型的意义比较模糊，不能清晰地反映经济变量的内在联系，因此不是联立方程组模型分析的最终目标，最后必须回到结构式模型。
- 当然这需要符合一定条件，就是后面要讨论的联立方程组模型的识别性。

二、联立方程组模型的假设

（一）联立方程组模型的一般表示法

一般用$Y_1,\cdots,Y_g$分别表示有g个方程的联立方程组模型的g个内生变量，用$X_1,\cdots,X_K$表示模型的K个前定变量

模型的结构式表示为：

$$
\begin{aligned}
Y_{1t} &= \gamma_{12}Y_{2t} + \cdots + \gamma_{1g}Y_{gt} + \beta_{11}X_{1t} + \cdots + \beta_{1K}X_{Kt} + \varepsilon_{1t} \\
Y_{2t} &= \gamma_{21}Y_{1t} + \cdots + \gamma_{2g}Y_{gt} + \beta_{21}X_{1t} + \cdots + \beta_{2K}X_{Kt} + \varepsilon_{2t} \\
&\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
Y_{gt} &= \gamma_{g1}Y_{1t} + \cdots + \gamma_{gg-1}Y_{g-1t} + \beta_{g1}X_{1t} + \cdots + \beta_{gK}X_{Kt} + \varepsilon_{gt}
\end{aligned}
$$

（二）联立方程组模型的矩阵表示法

$$\mathbf{\Gamma Y}_t = \boldsymbol{\beta}\mathbf{X}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

向量、矩阵记号如下：

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_{12} & \cdots & -\gamma_{1g} \\ -\gamma_{21} & 1 & \cdots & -\gamma_{2g} \\ & & \vdots & \\ -\gamma_{g1} & -\gamma_{g2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1K} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2K} \\ & & \vdots & \\ \beta_{g1} & \beta_{g2} & \cdots & \beta gK \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{gt} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{Kt} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{gt} \end{bmatrix}$$

（三）联立方程组模型的基本假设如下

1、模型由上述结构式线性方程组组成，或者可用向量方程表示。其中有些系数，即 Γ和β的部分元素可以是0，ε_t 中有些元素也可以是0；

2、不等于0的 $\varepsilon_{1t}, \cdots, \varepsilon_{2t}$ 都满足单方程线性回归模型误差项的假设，包括零均值、同方差、误差序列不相关和正态分布。

3、不同方程的同期误差可以相关，但协方差与时期t无关，即 $Cov(\varepsilon_{it},\varepsilon_{jt})=\sigma_{ij}$ 不是t的函数。此外，不同方程的误差项也不能有跨期相关性，即 $Cov(\varepsilon_{it},\varepsilon_{js})=0$ 当 $i\neq j, t\neq s$ 时必须成立。

4、模型的外生变量是确定性变量。

5、模型是可识别的。这是联立方程组模型特有的重要假设。下一节将专门讨论这个问题。

第二节 联立方程组模型的识别性

一、识别性问题的意义

- 由于联立方程组模型中内生变量的水平由多个方程的共同作用决定，因此能否根据所观测到变量数据推测出生成它们的各个经济关系，或者说联立方程组模型中的函数关系是否可以明确辨别或唯一确定，是一个很重要的问题。这就是联立方程组模型的**识别性问题**。
- 联立方程组模型的识别性等价于结构式参数与简约式参数之间的对应关系。

- 例如一个最简单的供给需求均衡模型如下：

$$供给函数：Q_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \varepsilon_{1t}$$

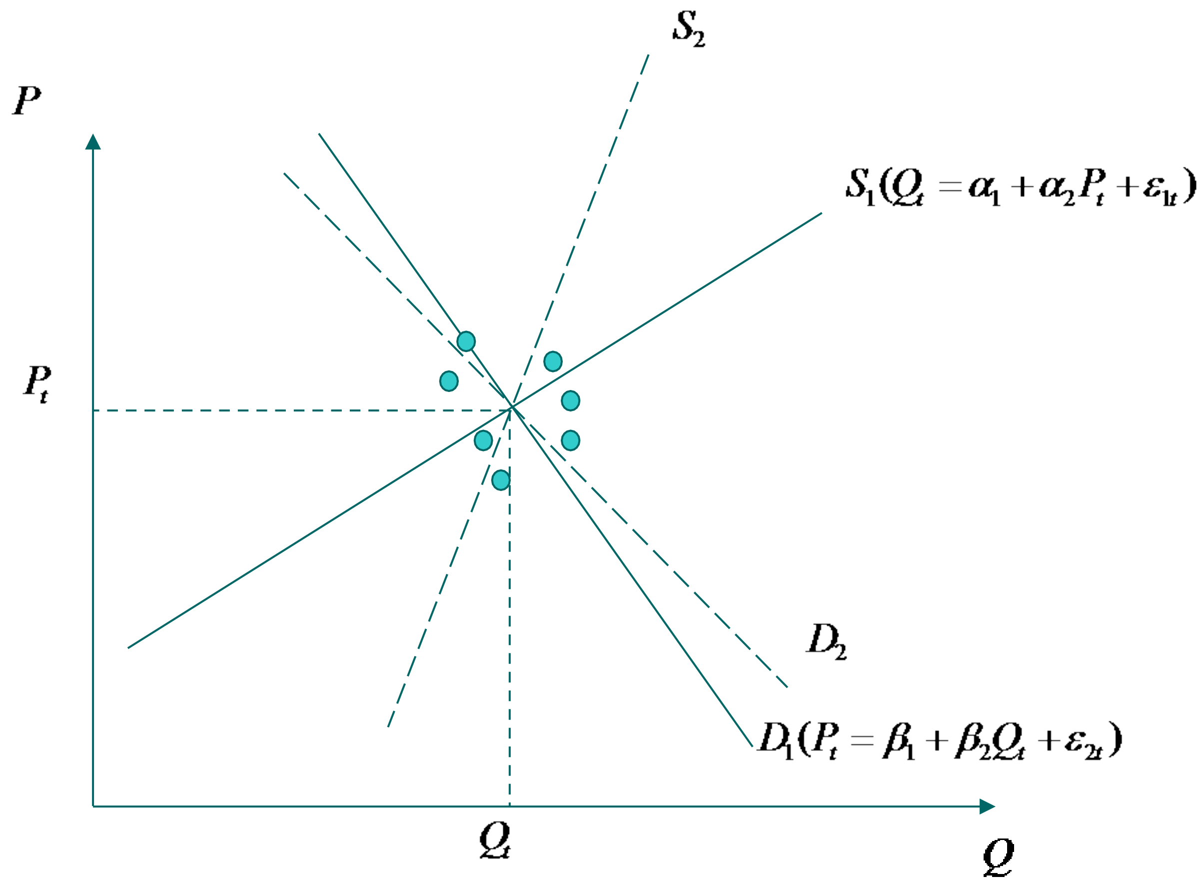
$$需求函数：Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \varepsilon_{2t}$$

- 如果其中参数已知，那么很容易根据这个模型解出均衡价格和销售量，实际上就是模型的简约式

$$Q_t = \frac{\alpha_1 + \alpha_2\beta_1}{1-\alpha_2\beta_2} + \frac{\varepsilon_{1t} + \alpha_2\varepsilon_{2t}}{1-\alpha_2\beta_2} = \Pi_{11} + u_{1t}$$

$$P_t = \frac{\beta_1 + \alpha_1\beta_2}{1-\alpha_2\beta_2} + \frac{\beta_2\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1-\alpha_2\beta_2} = \Pi_{21} + u_{2t}$$

- 供求模型的识别问题



S_2
P
$S_1(Q_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \varepsilon_{1t})$
P_t
D_2
$D_1(P_t = \beta_1 + \beta_2 Q_t + \varepsilon_{2t})$
Q_t
Q

- 根据均衡价格和销售量数据确定供给和需求函数，实际上就是根据简约式推导结构式。由于简约式中只有两个参数，而结构式中有四个参数，因此根据两个方程

$$\Pi_{11}=\frac{\alpha_1+\alpha_2\beta_1}{1-\alpha_2\beta_2},\Pi_{21}=\frac{\beta_1+\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_2\beta_2}$$

是无法从简约式参数推导、确定出结构式参数的。
- 能否根据简约式参数解出结构式参数，是识别问题的另一种标准。

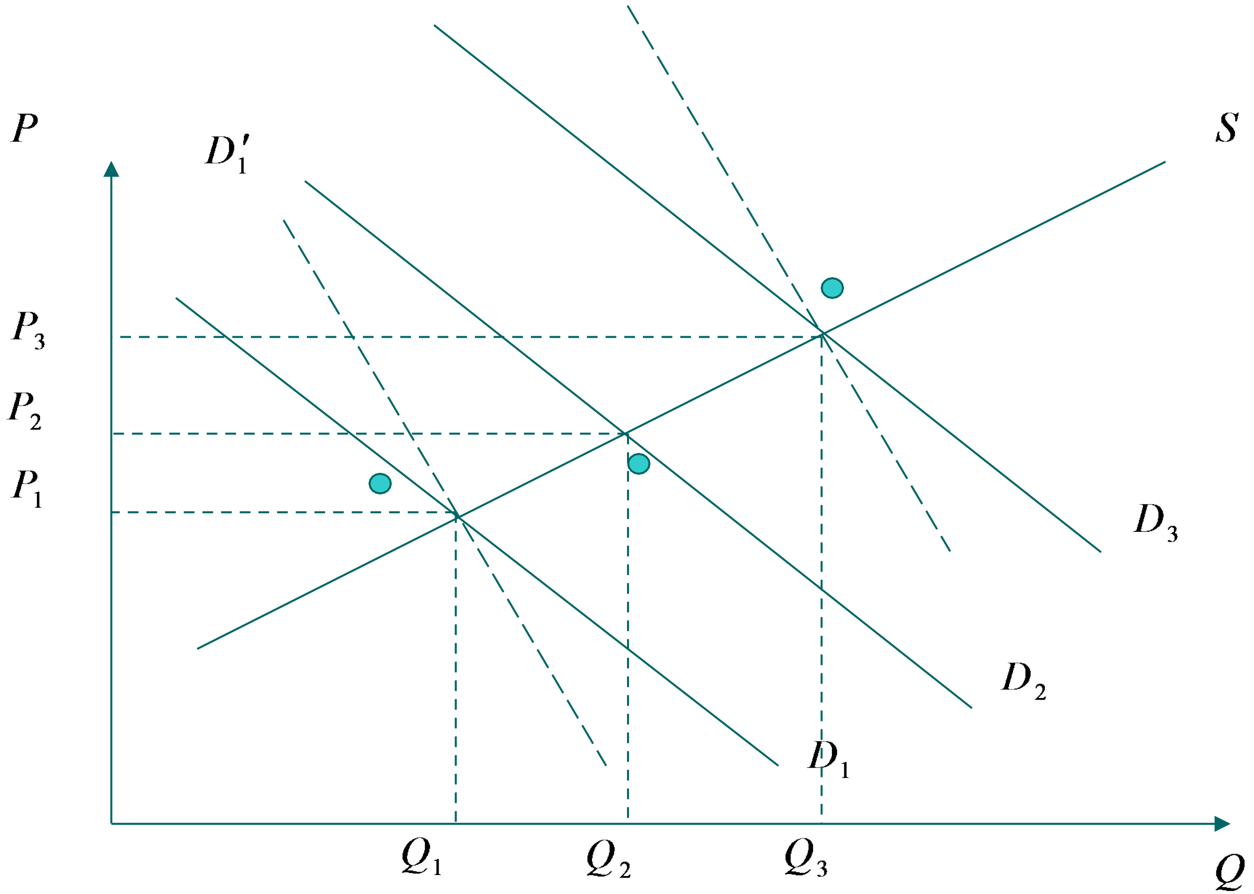
- 为了说明怎样的联立方程组模型是可识别的，我们在需求函数中引进收入变量，得到如下模型：

$$
\begin{aligned}
Q_t &= \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \varepsilon_{1t} \\
P_t &= \beta_1 + \beta_2 Q_t + \beta_3 Y_t + \varepsilon_{2t}
\end{aligned}
$$

解成简约式为：

$$Q_t = \frac{\alpha_1 + \alpha_2\beta_1}{1-\alpha_2\beta_2} + \frac{\alpha_2\beta_3}{1-\alpha_2\beta_2}Y_t + \frac{\varepsilon_{1t} + \alpha_2\varepsilon_{2t}}{1-\alpha_2\beta_2} = \Pi_{11} + \Pi_{12}Y_t + u_{1t}$$

$$P_t = \frac{\beta_1 + \alpha_1\beta_2}{1-\alpha_2\beta_2} + \frac{\beta_3}{1-\alpha_2\beta_2}Y_t + \frac{\beta_2\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1-\alpha_2\beta_2} = \Pi_{21} + \Pi_{22}Y_t + u_{2t}$$



P
S
D_1'
P_3
P_2
P_1
D_3
D_2
D_1
Q_1
Q_2
Q_3
Q

- 也可以根据简约式和结构式之间的关系，论证供给函数可识别和需求函数不可识别。
- 结构式参数和简约式参数之间有下列四个关系式

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2\beta_1}{1-\alpha_2\beta_2}=\Pi_{11},\frac{\alpha_2\beta_3}{1-\alpha_2\beta_2}=\Pi_{12}$$

$$\frac{\beta_1+\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_2\beta_2}=\Pi_{21},\frac{\beta_3}{1-\alpha_2\beta_2}=\Pi_{22}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_2\beta_3}{1-\alpha_2\beta_2}\Bigg/\frac{\beta_3}{1-\alpha_2\beta_2}=\alpha_2=\Pi_{12}/\Pi_{22}$$

- 还可以通过考察结构式供给函数和需求函数的形式是否统一，是否能通过两个方程的线性组合产生其他形式的供给函数和需求函数，判断它们的识别性问题。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/685311140110011131