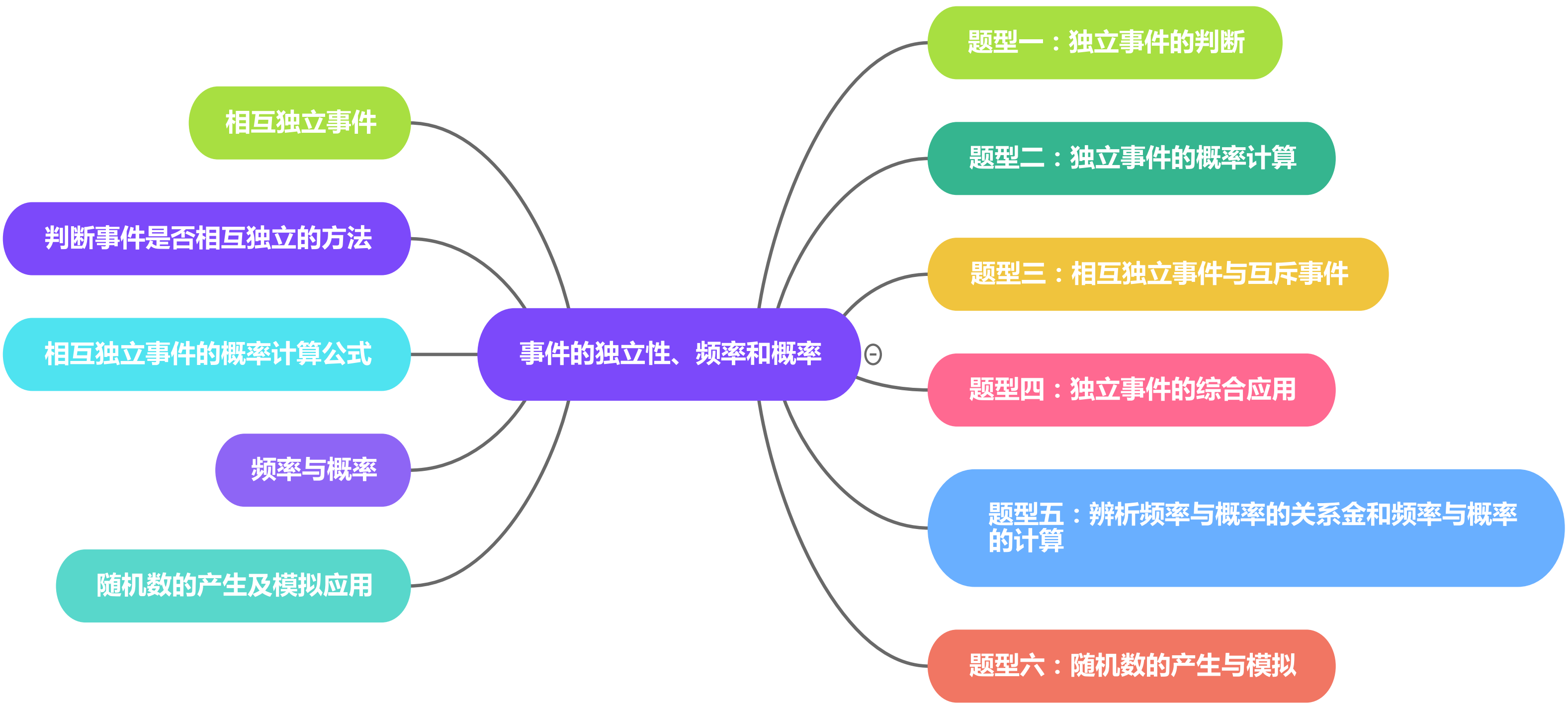
专题 26：事件的独立性、频率和概率（5 知识点+6 题型）



必备知识

知识点一：相互独立事件

（1）定义：对任意两个事件 A 与 B，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立，则称事件 A 与事件 B 相互独立，简称为独立.

（2）性质：如果事件 A 与事件 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

（3）两个相互独立事件同时发生的概率乘法：事件 A 与事件 B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$

知识点二：判断事件是否相互独立的方法

（1）直接法：若事件 A 的发生对事件 B 的发生概率没有影响，反之亦然，则这两个事件是相互独立的，这是从定性的角度进行判断.

（2）公式法：若对两事件 A，B 有 $P(AB)=P(A)P(B)$，则事件 A，B 相互独立.

用相互独立事件的乘法公式解题的步骤：

①用恰当的字母表示题中有关事件；

②根据题设条件，分析事件间的关系；

③将需要计算概率的事件表示为所设事件的乘积或若干个事件的乘积之和(相互乘积的事件之间必须满足相互独立)；

④利用乘法公式计算概率.

知识点三：相互独立事件的概率计算公式

已知两个事件 A，B 相互独立，它们的概率分别为 $P(A)$，$P(B)$，则有

事件	表示	概率

A，B 同时发生	AB	$P(A)P(B)$
A，B 都不发生	$\overline{A}\overline{B}$	$P(\overline{A})P(\overline{B})$
A，B 恰有一个发生	$\left(A\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}B\right)$	$P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)$
A，B 中至少有一个发生	$\left(A\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}B\right)\cup\left(AB\right)$	$P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)+P(A)P(B)$
A，B 中至多有一个发生	$\left(A\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}B\right)\cup\left(\overline{A}\overline{B}\right)$	$P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)+P(\overline{A})P(\overline{B})$

知识点四：频率与概率

（1）频率的稳定性

大量的试验证明，在任何确定次数的随机试验中，一个随机事件 A 发生的频率具有随机性.一般地，随着试验次数 n 的增大，频率偏离概率的幅度会缩小，即事件 A 发生的频率 $f_n\left(A\right)$ 会逐渐稳定于事件 A 发生的概率 $P\left(A\right)$，我们称频率的这个性质为频率的稳定性.因此我们可以用频率 $f_n\left(A\right)$ 估计概率 $P\left(A\right)$.

（2）频率的求法

频率是事件 A 发生的次数 m 与试验总次数 n 的比值，利用此公式可求出它们的频率，频率本身是随机变量，当 n 很大时，频率总是在一个稳定值附近摆动，这个稳定值是概率.

（3）频率和概率区别和联系

区别：

①在相同的条件下重复 n 次试验，观察某一事件 A 是否出现，称 n 次试验中事件 A 出现的次数 n_A 为事件 A 出现的频数，称事件 A 出现的比例 $f_n\left(A\right)=\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 出现的频率.

②概率是度量随机事件发生的可能性大小的量.

③频率是一个变量，随着试验次数的变化而变化，概率是一个定值，是某事件的固有属性.

联系：对于给定的随机事件 A，由于事件 A 发生的频率 $f_n\left(A\right)$ 随着试验次数的增加稳定于概率 $P\left(A\right)$，因此可以用频率 $f_n\left(A\right)$ 来估计概率 $P\left(A\right)$.

知识点五：随机数的产生及模拟应用

（1）随机数的产生

①标号：把 n 个大小、形状相同的小球分别标上 1，2，3，…，n.

②搅拌：放入一个袋中，把它们充分搅拌.

③摸取：从中摸出一个.这个球上的数就称为从 1～n 之间的随机整数，简称随机数.

（2）产生随机数的常用方法

①用计算器产生；②用计算机产生；③抽签法.

（3）随机模拟方法(蒙特卡洛方法)

利用计算机或计算器产生的随机数来做模拟试验，通过模拟试验得到的频率来估计概率，

这种用计算机或计算器模拟试验的方法称为随机模拟方法或蒙特卡洛方法.

题型、考点剖析

题型一：独立事件的判断

解题思路：（1）直接法：若事件 *A* 的发生对事件 *B* 的发生概率没有影响，反之亦然，则这两个事件是相互独立的，这是从定性的角度进行判断.

（2）公式法：若对两事件 *A*，*B* 有 *P(AB)=P(A)P(B)*，则事件 *A*，*B* 相互独立.

用相互独立事件的乘法公式解题的步骤：

①用恰当的字母表示题中有关事件；

②根据题设条件，分析事件间的关系；

③将需要计算概率的事件表示为所设事件的乘积或若干个事件的乘积之和(相互乘积的事件之间必须满足相互独立);

④利用乘法公式计算概率.

例 1．盒中有 4 个大小相同的小球，其中 2 个红球、2 个白球，第一次在盒中随机摸出 2 个小球，记下颜色后放回，第二次在盒中也随机摸出 2 个小球，记下颜色后放回.设事件 $A=$“两次均未摸出红球”，事件 $B=$“两次均未摸出白球”，事件 $C=$“第一次摸出的两个球中有红球”，事件 $D=$ “第二次摸出的两个球中有白球”，则（　　）

A． A 与 B 相互独立　　B． A 与 C 相互独立

C． B 与 C 相互独立　　D． C 与 D 相互独立

【答案】D

【分析】根据相互独立事件的定义依次分析即可.

【详解】依题意得 $P(A)=\frac{C_2^2C_2^2}{C_4^2C_4^2}=\frac{1}{36}$， $P(B)=\frac{C_2^2C_2^2}{C_4^2C_4^2}=\frac{1}{36}$， $P(AB)=0\neq P(A)P(B)$，故 A 项错误；

$P(C)=\frac{C_2^2+C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\frac{5}{6}$， $P(AC)=0\neq P(A)P(C)$，故 B 项错误；

$P(BC)=\frac{C_2^2C_2^2}{C_4^2C_4^2}=\frac{1}{36}\neq P(B)P(C)$，故 C 项错误；

$P(D)=\frac{C_2^2+C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\frac{5}{6}$， $P(CD)=\frac{C_2^2C_2^2+C_2^2C_2^1C_2^1+C_2^1C_2^1C_2^2+C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{C_4^2C_4^2}=\frac{25}{36}=P(C)P(D)$，故 D 项正确.

故选：D.

例 2．有 6 个相同的球，分别标有数字 1， 2， 3， 4， 5， 6 从中有放回地随机取两次，每次取 1 个球.甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 5”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 6”，则（　　）.

A．甲与乙相互独立　　B．乙与丙相互独立

C．甲与丙相互独立　　D．乙与丁相互独立

【答案】A

【分析】根据题意分别求出事件的概率，再根据相互独立满足的概率公式判断即可.

【详解】由题意得，$P(甲)=\frac{1}{6}$，$P(乙)=\frac{1}{6}$，$P(丙)=\frac{4}{6\times6}=\frac{1}{9}$， $P(丁)=\frac{5}{6\times6}=\frac{5}{36}$.

对于 A，$P(甲乙)=\frac{1}{36}$，所以$P(甲)\times P(乙)=P(甲乙)$，所以甲与乙相互独立，故 A 正确；

对于 B，$P(乙丙)=\frac{1}{36}$，所以$P(乙)\times P(丙)\neq P(乙丙)$，所以乙与丙不是相互独立，故 B 不正确；

对于 C，$P(甲丙)=\frac{1}{36}$，所以$P(甲)\times P(丙)\neq P(甲丙)$，所以甲与丙不是相互独立，故 C 不正确；

对于 D，$P(乙丁)=\frac{1}{36}$，所以$P(乙)\times P(丁)\neq P(乙丁)$，所以乙与丁不是相互独立，故 D 不正确.

故选：A.

例 3．对于事件A,B，下列命题不正确的是（   ）

A．如果A,B互斥，那么$\overline{A}$与$\overline{B}$也互斥

B．如果A,B对立，那么$\overline{A}$与$\overline{B}$也对立

C．如果A,B独立，那么$\overline{A}$与$\overline{B}$也独立

D．如果A,B不独立，那么$\overline{A}$与$\overline{B}$也不独立

【答案】A

【分析】选项 A，利用互斥事件的定义判断；选项 B，利用对立事件的定义判断；选项 C，利用相互独立事件的定义判断；选项 D，利用相互独立事件的定义判断.

【详解】对于选项 A，如果A,B互斥，$\overline{A}$与$\overline{B}$可以同时发生，由互斥事件的定义得$\overline{A}$与$\overline{B}$不一定互斥，所以选项 A 错误；

对于选项 B，如果A,B对立，由对立事件的定义得$\overline{A}$与$\overline{B}$也对立，所以选项 B 正确；

对于选项 C，如果A,B独立，由相互独立事件的定义得$\overline{A}$与$\overline{B}$也独立，所以选项 C 正确；

对于选项 D，如果A,B不独立，由相互独立事件的定义得$\overline{A}$与$\overline{B}$也不独立，所以选项 D 正确；

故选：A.

变式训练

4．盒子里有 2 个红球和 2 个白球，从中不放回地依次取出 2 个球，设事件$A=$“两个球颜色相同”，$B=$“第 1 次取出的是红球”，$C=$“第 2 次取出的是红球”，$D=$“两个球颜色不同”.则下列说法正确的是（   ）

A．A与B相互独立　　B．A与D互为对立

C．B与C互斥　　D．B与D相互独立

【答案】ABD

【分析】依次列出样本空间，事件A、B、C、D包含的基本事件，由事件的基本关系及概率公式一一判定选项即可.

【详解】依题意可设 2 个红球为a_1，a_2，2 个白球为b_1，b_2，则样本空间为：

$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_1),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_1,b_2),(b_2,a_1),(b_2,a_2),(b_2,b_1)\}$，共 12 个基本事件.

事件$A=\{(a_1,a_2),(a_2,a_1),(b_1,b_2),(b_2,b_1)\}$，共 4 个基本事件.

事件$B=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_1),(a_2,b_1),(a_2,b_2)\}$，共 6 个基本事件.

事件 $C=\{(a_1,a_2),(a_2,a_1),(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_2,a_1),(b_2,a_2)\}$，共 6 个基本事件.

事件 $D=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_2,a_1),(b_2,a_2)\}$，

共 8 个基本事件.

对于 A 选项，因 $P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3},P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，

则 $P(A)\cdot P(B)=P(AB)$，故 A 与 B 相互独立，故 A 正确；

对于 B 选项，注意到 $A\cap D=\varnothing$，$A\cup D=\Omega$，得 A 与 D 互为对立事件，故 B 正确；

对于 C 选项，注意到 $B\cap C\neq\varnothing$，则 B 与 C 不互斥，故 C 错误；

对于 D 选项，因 $P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，$P(D)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$，$P(BD)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，

则 $P(D)\cdot P(B)=P(DB)$，故 D 与 B 相互独立，故 D 正确.

故选：ABD

5．下列各对事件中，M，N 为相互独立事件的是（　）

A．掷一枚质地均匀的骰子一次，事件 M 为“出现的点数为奇数”，事件 N 为“出现的点数为偶数”

B．袋中有 5 个白球，5 个黄球（球除颜色外完全相同），现不放回地依次摸出 2 个球，事件 M 为“第一次摸到黄球”，事件 N 为“第二次摸到黄球”

C．一枚硬币掷两次，事件 M 为“第一次为正面”，事件 N 为“两次抛掷的结果相同”

D．一枚硬币掷两次，事件 M 为“第一次为正面”，事件 N 为“第二次为反面”

【答案】CD

【分析】借助概率公式分别计算出 $P(M)$、$P(N)$、$P(MN)$，结合相互独立事件的定义判断即可得.

【详解】对 A：$P(M)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(N)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(MN)=0$，

故 $P(MN)\neq P(M)P(N)$，所以 M，N 不相互独立，故 A 错误；

对 B：$P(M)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，$P(N)=\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{2}$，$P(MN)=\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$，

故 $P(MN)\neq P(M)P(N)$，所以 M，N 不相互独立，故 B 错误；

对 C：$P(M)=\frac{1}{2}$，$P(N)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$P(MN)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

有 $P(MN)=P(M)P(N)=\frac{1}{4}$，所以 M，N 相互独立，故 C 正确；

对 D：$P(M)=\frac{1}{2}$，$P(N)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$P(MN)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

有 $P(MN)=P(M)P(N)=\frac{1}{4}$，所以 M，N 相互独立，故 D 正确.

故选：CD.

6．现有 5 张完全相同的卡片，分别写有字母 A、B、C、D、E，从中任取一张，看后再放回，再任取一张.甲表示事件“第一次抽取卡片的字母为 B”，乙表示事件“第二次抽取卡片的字母为 E”，丙表示事件“两次抽取卡片的字母相邻”，丁表示事件“两次抽取卡片的字母不相邻”，则（　）

A．乙与丁相互独立　　　　　　　　　　B．甲与丙相互独立

C．丙与丁相互独立　　　　　　　　　　D．甲与乙相互独立

【答案】D

【分析】计算出事件甲、乙、丙、丁的概率，结合独立事件的定义逐项判断，可得出合适的选项.

【详解】设事件甲、乙、丙、丁分别记为M_1、M_2、M_3、M_4，由题意可得$P(M_1)=P(M_2)=\frac{1}{5}$，

有放回的抽取卡片两次的基本事件数为25，

两次抽取卡片的字母相邻的基本事件为(A,B)、(B,C)、(C,D)、(D,E)、(B,A)、(C,B)、(D,C)、(E,D)，共8个，

两次抽取卡片的字母不相邻的基本事件为$25-8=17$个，则$P(M_3)=\frac{8}{25}$，$P(M_4)=\frac{17}{25}$，

显然丙与丁为对立事件，C错误；

对于A，乙与丁同时发生的基本事件为(A,E)、(B,E)、(C,E)，有3个，

则$P(M_2M_4)=\frac{3}{25}\neq\frac{1}{5}\times\frac{17}{25}=P(M_2)P(M_4)$，所以乙与丁不相互独立，A错误；

对于B，甲与丙同时发生的基本事件(B,C)、(B,A)，有2个，

则$P(M_1M_3)=\frac{2}{25}\neq\frac{1}{5}\times\frac{8}{25}=P(M_1)P(M_3)$，所以甲与丙不相互独立，B错误；

对于D，甲与乙同时发生的基本事件为(B,E)，只有1个，

则$P(M_1M_2)=\frac{1}{25}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=P(M_1)P(M_2)$，所以甲与乙相互独立，D正确.

故选：D.

7．甲、乙两社团各有3名男党员、3名女党员，从甲、乙两社团各随机选出1名党员参加宪法知识比赛．设事件A为“从甲社团中选出的是男党员小凡”，事件B为“从乙社团中选出的是男党员”，事件C为“甲、乙两社团选出的都是男党员”，事件D为“从甲、乙两社团中选出的是1名男党员和1名女党员”，则（　　）

A．A与B相互独立　　　　　　　　B．B与C相互独立　　C．B与D相互独立　　D．C与D互斥

【答案】ACD

【分析】根据相互独立事件及互斥事件的定义判断即可.

【详解】由题意可得$P(A)=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$，$P(D)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

因为$P(AB)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{12}=P(A)P(B)$，所以A与$B$相互独立，故A正确；

因为$P(BC)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}\neq P(B)P(C)$，所以$B$与$C$不相互独立，故B错误；

因为$P(BD)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}=P(B)P(D)$，所以$B$与$D$相互独立，故C正确；

因为$P(CD)=0$，所以C与D互斥，故D正确.

故选：ACD

题型二：独立事件的概率计算

解题思路：两个相互独立事件同时发生的概率乘法：事件 A 与事件 B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$

例 1．银行卡的密码由 6 位数字组成，某人在银行自助取款机上取钱时，忘记了最后一位数字，但记得是一个偶数，则他不超过 2 次就按对的概率是（　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

【答案】B

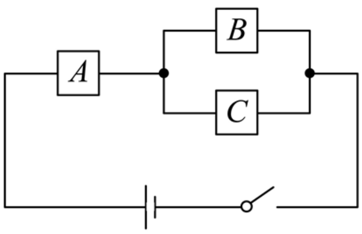
【分析】分第一次按对和第二次按对两种情况，利用概率加法公式和乘法公式可得.

【详解】第一次按对的概率为$\frac{1}{5}$；第一次不对，第二次按对的概率为$\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$.

所以，不超过 2 次就按对的概率为$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.

故选：B

例 2．如图，一个电路中有 A,B,C 三个电器元件，每个元件正常工作的概率均为$\frac{1}{2}$，这个电路是通路的概率是（　）



A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{5}{8}$　　D．$\frac{1}{4}$

【答案】B

【分析】根据给定条件，利用对立事件的概率公式及相互独立事件的概率公式计算即得.

【详解】元件 B,C 都不正常的概率 $p_1=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，

则元件 B,C 至少有一个正常工作的概率为$1-p_1=\frac{3}{4}$，

而电路是通路，即元件 A 正常工作，元件 B,C 至少有一个正常工作同时发生，

所以这个电路是通路的概率 $p=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$.

故选：B

例 3．某大学选拔生补充进“篮球”“舞蹈”“美术”三个社团，据资料统计，新生通过考核选拔进入这三个社团成功与否相互独立 2023 年某新生入学，假设他通过考核选拔进入该校的“篮球”“舞蹈”“美术”三个社团的概率依次为$\frac{1}{2}$，m，n，已知三个社团他都能进入的概率为$\frac{1}{18}$，至少进入一个社团的概率为$\frac{7}{9}$．则（　）

A．$m=\frac{1}{3}$　　B．$m=\frac{2}{3}$　　C．$n=\frac{1}{3}$　　D．$n=\frac{1}{2}$

【答案】AC

【分析】根据独立事件同时发生的概率，三个社团他都能进入的概率为$\frac{1}{2}mn=\frac{1}{18}$，根据对立事件的概率，至少进入一个社团的概率为$1-\frac{1}{2}(1-m)(1-n)=\frac{7}{9}$，组成方程组，即可解得$m$、$n$的值.

【详解】依题意有$\begin{cases}\frac{1}{2}mn=\frac{1}{18}\\1-\frac{1}{2}(1-m)(1-n)=\frac{7}{9}\end{cases}$，解得，$\begin{cases}m=\frac{1}{3}\\n=\frac{1}{3}\end{cases}$.

故选：AC.

变式训练

4．某型号新能源汽车参加碰撞测试和续航测试，该型号新能源汽车参加这两项测试的结果相互不受影响．若该型号新能源汽车在碰撞测试中结果为优秀的概率为$\frac{3}{4}$，在续航测试中结果为优秀的概率为$\frac{2}{3}$，则该型号新能源汽车在这两项测试中仅有一项测试结果为优秀的概率为（　　）

A．$\frac{7}{12}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{5}{12}$　　D．$\frac{1}{3}$

【答案】C

【分析】根据独立事件的概率公式与互斥事件的概率加法公式可求概率.

【详解】根据题意可得该型号新能源汽车在这两项测试中仅有一项测试结果为优秀的概率为$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$.

故选：C.

5．某疾病全球发病率为0.03%，该疾病检测的漏诊率（患病者判定为阴性的概率）为5%，检测的误诊率（未患病者判定为阳性的概率）为1%，则某人检测成阳性的概率约为（　　）

A．0.03%　　B．0.99%　　C．1.03%　　D．2.85%

【答案】C

【分析】根据题意，某人检测成阳性包含两种情况：非患者检测为阳性和患者检测为阳性，结合互斥事件的概率加法公式，即可求解.

【详解】由题意，未患病者判定为阳性的概率为1%，患病者判定为阳性的概率为95%，

所以某人检测成阳性包含两种情况：

①非患者检测为阳性的概率为$(1-0.3\%)\times1\%=0.00997$；

②患者检测为阳性的概率为$0.3\%\times(1-5\%)=0.00285$，

所以某人检测成阳性的概率为$0.00997+0.00285=0.01282\approx1.03\%$.

故选：C.

6．在高二选科前，高一某班班主任对该班同学的选科意向进行了调查统计，根据统计数据发现：选物理的同学占全班同学的80%，同时选物理和化学的同学占全班同学的60%，且该班同学选物理和选化学相互独立.现从该班级中随机抽取一名同学，则该同学既不选物理也不选化学的概率为（　　）

A．0.125　　B．0.1　　C．0.075　　D．0.05

【答案】D

【分析】借助相互独立事件的性质与乘法公式计算即可得.

【详解】设事件 $A=$“选物理”，$B=$“选化学”，

则有 $P(A)=0.8$，$P(AB)=0.6$，

由该班同学选物理和选化学相互独立，

即 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，则 $P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.6}{0.8}=0.75$，

故 $P(\overline{A})=1-0.8=0.2$，$P(\overline{B})=1-0.75=0.25$，

则 $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.2\times0.25=0.05$.

故选：D.

题型三：相互独立事件与互斥事件

解题思路：理解独立事件和互斥事件的概念及计算公式

已知两个事件 *A*，*B* 相互独立，它们的概率分别为 *P*(*A*)，*P*(*B*)，则有

事件	表示	概率
A，*B* 同时发生	AB	$P(A)P(B)$
A，*B* 都不发生	$\overline{A}\overline{B}$	$P(\overline{A})P(\overline{B})$
A，*B* 恰有一个发生	$(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)$	$P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)$
A，*B* 中至少有一个发生	$(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)\cup(AB)$	$P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)+P(A)P(B)$
A，*B* 中至多有一个发生	$(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)\cup(\overline{A}\overline{B})$	$P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)+P(\overline{A})P(\overline{B})$

例 1．已知 A,B 是两个概率大于 0 的随机事件，则下列说法错误的是（　　）

A．若 A,B 是对立事件，则 A,B 是互斥事件

B．若事件 A,B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$ 也相互独立

C．若事件 A,B 相互独立，则 A 与 B 不互斥

D．若事件 A,B 互斥，则 A 与 B 相互独立

【答案】D

【分析】根据互斥，对立事件的定义，以及事件的相互独立性，即可判断选项.

【详解】A.两个事件是对立事件，则一定是互斥事件，故 A 正确；

B.若事件 A,B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$ 也相互独立，故 B 正确；

C.若事件 A,B 相互独立，则 A 与 B 可以同时发生，不互斥，故 C 正确；

D. 若事件 A,B 互斥，则 A 与 B 不能同时发生，即事件 $A(B)$ 是否发生，对另一个事件 $B(A)$ 是有影响的，所以两个事件不相互独立，故 D 错误.

故选：D

例 2．假设 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，且 A 与 B 相互独立，则下列说法正确的个数为（　　）

①$P(AB)=0.6$　②$P(A\cup B)=1.3$　③$P(AB)=0.42$　④$P(\overline{A}B)=0.28$　⑤$P(\overline{AB})=0.5$

A．1　B．2　C．3　D．4

【答案】B

【分析】根据相互独立事件的概念和乘法公式，以及互斥事件的概念，逐个判定，即可求解.

【详解】由$P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，且事件A与B相互独立，则$\overline{A}$与B相互独立，$\overline{A}$与$\overline{B}$相互独立，则

$P(AB)=P(A)P(B)=0.6\times0.7=0.42$，所以①不正确，③正确；

又由$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=(1-0.6)\times0.7=0.28$，所以④正确；

由$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-0.6)(1-0.7)=0.12$，所以⑤不正确；

又由事件A与B不一定时互斥事件，所以$P(A\cup B)$与$P(A)+P(B)$不一定相等，

所以②不正确.

故选：B.

例3．下列关于互斥事件、对立事件、独立事件（上述事件的概率都大于零）的说法中正确的是（　）

A．互斥事件一定是对立事件　B．对立事件一定是互斥事件

C．互斥事件一定是独立事件　D．独立事件一定是互斥事件

【答案】B

【分析】根据互斥事件、对立事件、独立事件的概念进行判断即可.

【详解】互斥事件不一定是对立事件，对立事件一定是互斥事件，故A错误，B正确；

互斥事件一定不能同时发生，而独立事件可以同时发生，所以互斥事件一定不是独立事件，独立事件可能互斥也可能不互斥，故C，D均错误.

故选：B.

变式训练

4．抛掷一颗质地均匀的骰子，有如下随机事件：$A_i=$“向上的点数为i”，其中$i=1,2,3,4,5,6$，$B=$“向上的点数为奇数”，则下列说法正确的是（　）

A．$\overline{A_1}$与B互斥　B．$A_2+B=\Omega$　C．A_3与$\overline{B}$相互独立　D．$A_4 \cap B=\varnothing$

【答案】D

【分析】对于选项中的事件，分别写出对应的基本事件构成的集合，依次分析，即可.

【详解】对于A，$\overline{A_1}=\{2,3,4,5,6\}$，$B=\{1,3,5\}$，$\overline{A_1}$与$B$不互斥，故A错误；

对于B，$A_2+B=\{2\}\cup\{1,3,5\}=\{1,2,3,5\}\neq\Omega$，故B错误；

对于C，A_3与$\overline{B}$不能同时发生，是互斥事件，不是相互独立事件，故C错误；

对于D，$A_4=\{4\}$，$B=\{1,3,5\}$，$A_4 \cap B=\varnothing$，故D正确.

故选：D.

5．甲袋中有20个红球．10个白球，乙袋中红球、白球各有10个，两袋中的球除了颜色有差别外，再没有其他差别．现在从两袋中各换出1个球，下列结论正确的是（　）

A．2 个球都是红球的概率为$\frac{1}{3}$

B．2 个球中恰有 1 个红球的概率为$\frac{1}{2}$

C．不都是红球的概率为$\frac{2}{3}$

D．都不是红球的概率为$\frac{2}{3}$

【答案】ABC

【分析】设出事件，得到$P(A_1)=\frac{2}{3}$，$P(A_2)=\frac{1}{2}$，A 选项，$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{3}$；B 选项，求事件$A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$的概率即可；C 选项，根据对立事件概率公式得到 C 正确；D 选项，$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$.

【详解】记事件A_1：从甲袋中任取 1 个球为红球，事件A_2：从乙袋中任取 1 个球为红球，

则$P(A_1)=\frac{2}{3}$，$P(A_2)=\frac{1}{2}$，

对于 A 选项，即求事件A_1A_2的概率，$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{3}$，所以 A 正确；

对于 B 选项，即求事件$A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$的概率，

$P\left(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2\right)=P\left(A_1\right)P\left(\overline{A_2}\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P\left(A_2\right)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. 所以 B 正确，

对于 C 选项，由于“都是红球”与“不都是红球”互为对立事件，

所以概率为$1-P(A_1A_2)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，C 正确；

对于 D 选项，即求事件$\overline{A_1}\,\overline{A_2}$的概率，$P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$，所以 D 错误.

故选：ABC

6．分别掷两枚质地均匀的硬币，“第一枚为正面”记为事件A，“第二枚为正面”记为事件B，“两枚结果相同”记为事件C，那么事件A与B，A与C间的关系是（　）

A．A与B，A与C均相互独立　　B．A与B相互独立，A与C互斥

C．A与B，A与C均互斥　　D．A与B互斥，A与C相互独立

【答案】A

【分析】利用互斥事件，独立事件的定义即得.

【详解】由题意得$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{1}{4},P(AC)=\frac{1}{4}$，

所以$P(AB)=P(A)P(B)\neq 0, P(AC)=P(A)P(C)\neq 0$.

所以A与B，A与C均相互独立，A与B，A与C均不互斥.

故选：A.

7．下列说法不正确的是（　）

A．事件 A 与事件B的和事件的概率一定大于事件 A 的概率

B．若事件 A 与事件B互斥，则事件 A 与事件B对立

C. 假如$P(A)>0$，$P(B)>0$，若事件A，B相互独立，则A与B不互斥

D. 假如$P(A)>0$，$P(B)>0$，若事件A，B互斥，则A与B相互独立

【答案】ABD

【分析】根据和事件、互斥事件、对立事件、独立事件的知识对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】A选项，若A是必然事件，则事件A与事件B的和事件的概率等于事件A的概率，A选项说法不正确.

B选项，互斥事件不一定是对立事件，所以B选项说法不正确.

C选项，如果A,B相互独立，则A,B可以同时发生，故A,B不互斥，C选项说法正确.

D选项，若事件A,B互斥，则A,B不能同时发生，所以A,B不是相互独立事件，D选项说法错误.

故选：ABD

8. 已知$P(A\cup B)=\frac{25}{32}$，$P(\overline{A})=\frac{7}{8}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，则事件A与$B$的关系是（　）

A. A与B互斥不对立　　B. A与B对立

C. A与B相互独立　　D. A与B既互斥又独立

【答案】C

【分析】利用$P(\overline{A})=\frac{7}{8}$计算出$P(A)=\frac{1}{8}$，可得到$P(A)+P(B)=\frac{7}{8}\neq P(A\cup B)$则能得到A与$B$不互斥，不对立；再利用$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\text{I } B)$算出$P(A\cap B)=\frac{3}{32}$即可得到答案

【详解】由$P(\overline{A})=\frac{7}{8}$可得$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$，

因为$P(A)+P(B)=\frac{7}{8}\neq P(A\cup B)$，则A与$B$不互斥，不对立，

由$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\text{I } B)$可得$P(A\cap B)=\frac{3}{32}$，

因为$P(A)\times P(B)=\frac{3}{32}=P(A\cap B)$，所以A与$B$相互独立

故选：C

题型四：独立事件的综合应用

解题思路：理解独立事件的概念及计算公式；

例1．抛掷一枚质地均匀的正四面骰子（骰子为正四面体，四个面上的数字分别为1，2，3，4），若骰子与桌面接触面上的数字为1或2，则再抛郑一次，否则停止抛掷（最多抛掷2次）．则抛掷骰子所得的点数之和至少为4的概率为（　）

A. $\frac{9}{16}$　　B. $\frac{7}{16}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{5}{16}$

【答案】A

【分析】分抛掷次数为1及抛掷次数为2，利用列举法及概率乘法公式计算即可得.

【详解】抛掷次数为1的概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，点数可能为3或4，

抛掷次数为2的概率为$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

此时基本事件有$(1,1)$、$(1,2)$、$(1,3)$、$(1,4)$、$(2,1)$、$(2,2)$、$(2,3)$、$(2,4)$共八种，

其中点数之和至少为4的情况有$(1,3)$、$(1,4)$、$(2,2)$、$(2,3)$、$(2,4)$共五种，

故抛掷骰子所得的点数之和至少为4的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{1}{4}+\frac{5}{16}=\frac{9}{16}$.

故选：A.

例2．已知A，B，C，D四名选手参加某项比赛，其中A，B为种子选手，C，D为非种子选手，种子选手对非种子选手种子选手获胜的概率为$\frac{3}{4}$，种子选手之间的获胜的概率为$\frac{1}{2}$，非种子选手之间获胜的概率为$\frac{1}{2}$．比赛规则：第一轮两两对战，胜者进入第二轮，负者淘汰；第二轮的胜者为冠军.

(1)若你是主办方，则第一轮选手的对战安排一共有多少不同的方案？

(2)选手A与选手D相遇的概率为多少？

(3)以下两种方案，哪一种种子选手夺冠的概率更大？

方案一：第一轮比赛种子选手与非种子选手比赛；

方案二：第一轮比赛种子选手与种子选手比赛.

【答案】(1)$\frac{1}{3}$；

(2)$\frac{23}{48}$

(3)方案一种子选手夺冠的概率更大

【分析】（1）由题意分析知第一轮选手的对战情况分别为$\{AB,CD\}$，$\{AC,BD\}$，$\{AD,BC\}$，即可得出答案；

（2）设事件$M=$“选手A与选手D相遇”，分为对战情况分别为$\{AB,CD\}$，$\{AC,BD\}$，$\{AD,BC\}$，求出其概率，相加即可得出答案.

（3）设采用方案一，二种子选手夺冠的概率分别为P_1，P_2，由独立事件的乘法公式求出P_1、P_2，比较P_1，P_2的大小即可得出答案.

【详解】（1）第一轮选手的对战情况分别为$\{AB,CD\}$，$\{AC,BD\}$，$\{AD,BC\}$，故总方案数3；

（2）设事件$M=$“选手A与选手D相遇”，

当对战为$\{AD,BC\}$时，A，D两选手相遇的概率为1；

当对战为$\{AB,CD\}$时，A，D两选手相遇的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

当对战为$\{AC,BD\}$时，A，D两选手相遇的概率为$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$；

抽到三种对战的概率均为$\frac{1}{3}$，则$P(M)=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{16}=\frac{23}{48}$.

综上可知选手A与选手D相遇的概率为$\frac{23}{48}$.

（3）设采用方案一，二种子选手夺冠的概率分别为P_1，P_2，则

采用方案一，假设分组为$\{AC,BD\}$，

第一轮两种子选手获胜，则第二轮种子选手一定夺冠：$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$，

第一轮选手A,D获胜，第二轮A获胜：$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$，

第一轮选手C,B获胜，第二轮B获胜：$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$，

第一轮选手C,D获胜，则种子选手不能获胜，

所以$P_1=\frac{9}{16}\times\frac{9}{64}\times2=\frac{27}{32}$；

采用方案二：假设分组为$\{AB,CD\}$，

第一轮选手A,C获胜，第二轮A获胜：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$，

第一轮选手A,D获胜，第二轮A获胜：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$，

第一轮选手B,C获胜，第二轮B获胜：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$，

第一轮选手B,D获胜，第二轮B获胜：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$，

则$P_2=\frac{3}{16}\times4=\frac{3}{4}$，所以$P_1>P_2$，

因此方案一种子选手夺冠的概率更大.

例3．某场知识竞赛比赛中，甲、乙、丙三个家庭同时回答一道有关环保知识的问题.已知甲家庭回答正确这道题的概率是$\frac{3}{4}$，甲、丙两个家庭都回答错误的概率是$\frac{1}{12}$，乙、丙两个家庭都回答正确的概率是$\frac{1}{4}$，若各家庭回答是否正确互不影响.

(1)求乙、丙两个家庭各自回答正确这道题的概率；

(2)求甲、乙、丙三个家庭中不少于2个家庭回答正确这道题的概率.

【答案】(1)$\frac{3}{8}$，$\frac{2}{3}$；

(2)$\frac{21}{32}$

【分析】（1）令甲、乙、丙家庭回答正确分别为事件A、B、C，由$P(A)=\frac{3}{4}$，$P(\overline{A}\overline{C})=\frac{1}{12}$，$P(BC)=\frac{1}{4}$根据相互独立事件性质可求解；

（2）令甲、乙、丙三个家庭中不少于2个家庭回答正确这道题为事件D，即三个家庭中有一个家庭回答错误或者三个家庭都回答正确

则：$P(D)=P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})+P(ABC)$，代入第一问数据即可.

【详解】（1）设甲、乙、丙家庭回答正确分别为事件A、B、C，

根据题意，则有 $P(A)=\frac{3}{4}$，则 $P(\overline{A})=\frac{1}{4}$，

又 $P(\overline{A}\overline{C})=\frac{1}{12}$，所以 $P(\overline{C})=\frac{1}{3}$，即 $P(C)=\frac{2}{3}$，

又 $P(BC)=\frac{1}{4}$，所以 $P(B)=\frac{3}{8}$.

所以乙、丙两个家庭各自回答正确这道题的概率分别为 $\frac{3}{8}$ 和 $\frac{2}{3}$.

（2）设甲、乙、丙三个家庭中不少于 2 个家庭回答正确这道题为事件 D，

则有 $P(D)=P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})+P(ABC)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{21}{32}$，

所以甲、乙、丙三个家庭中不少于 2 个家庭回答正确这道题的概率为 $\frac{21}{32}$.

变式训练

4．Matlab 是一种数学软件，用于数据分析、无线通信、深度学习、图象处理与计算机视觉、信号处理、量化金融与风险管理、人工智能机器人和控制系统等领域，推动了人类基础教育和基础科学的发展.某学校举行了相关 Matlab 专业知识考试，试卷中只有两道题目，已知甲同学答对每题的概率都为 p，乙同学答对每题的概率都为 $q\left(p>q\right)$，且在考试中每人各题答题结果互不影响．已知每题甲、乙同时答对的概率为 $\frac{1}{2}$，恰有一人答对的概率为 $\frac{5}{12}$.

(1)求 p 和 q 的值；

(2)试求两人共答对 3 道题的概率.

【答案】(1) $p=\frac{3}{4},q=\frac{2}{3}$

(2) $\frac{5}{12}$.

【分析】（1）根据题意列出关于 p,q 的方程解得即可.

（2）两人共答对 3 道题，只可能为甲答对 2 道题乙答对 1 道题或甲答对 1 道题乙答对 2 道题，列式解得即可.

【详解】（1）由题意可得 $\begin{cases}pq=\frac{1}{2},\\ p(1-q)+q(1-p)=\frac{5}{12},\end{cases}$

即 $\begin{cases}pq=\frac{1}{2},\\ p+q=\frac{17}{12}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=\frac{3}{4},\\ q=\frac{2}{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=\frac{2}{3},\\ q=\frac{3}{4}.\end{cases}$

由于 $p>q$，所以 $p=\frac{3}{4},q=\frac{2}{3}$.

（2）设 $A_i=\{$甲同学答对了 i 道题$\},B_i=\{$乙同学答对了 i 道题$\},i=0,1,2$.

由题意得，$P\left(A_1\right)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8},P\left(A_2\right)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$，$P\left(B_1\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9},P\left(B_2\right)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.