

2024 届北京市海淀区人大附中高考数学考前最后一卷预测卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 与双曲线 C 有相

同的焦点. 设 P 为抛物线与双曲线 C 的一个交点，且 $\cos \angle PF_1F_2 = \frac{5}{7}$ ，则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ 或 3 C. 2 或 $\sqrt{3}$ D. 2 或 3

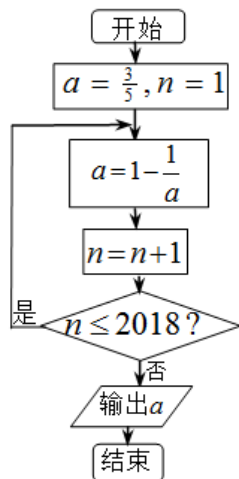
2. 已知函数 $f(x) = \frac{m^x}{m^x + 1} + 2018 \tan x + x^2 (m > 0, m \neq 1)$ ，若 $f(1) = 3$ ，则 $f(-1)$ 等于 ()

- A. -3 B. -1 C. 3 D. 0

3. 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ ， $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$ ， $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 且在 $(0, \pi)$ 上是单调函数，则下列说法正确的是 ()

- A. $\omega = \frac{1}{2}$ B. $f\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$
- C. 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减 D. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$ 对称

4. 阅读如图的程序框图，运行相应的程序，则输出的 a 的值为 ()

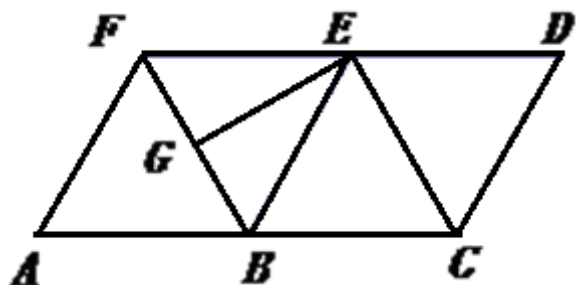


- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{2}{5}$

5. 设全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $M = \{x | x < 1\}$, $N = \{x | x > 2\}$, 则 $(\complement_U M) \cap N =$ ()

- A. $\{x | x > 2\}$ B. $\{x | x \geq 1\}$ C. $\{x | 1 < x < 2\}$ D. $\{x | x \geq 2\}$

6. 下图为一个正四面体的侧面展开图, G 为 BF 的中点, 则在原正四面体中, 直线 EG 与直线 BC 所成角的余弦值为 ()

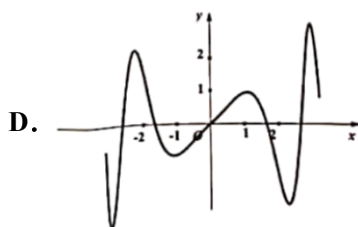
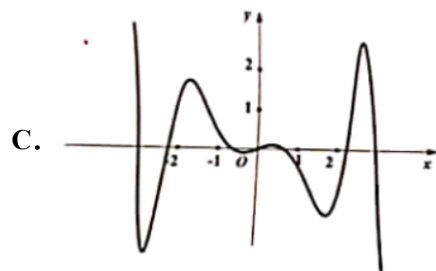
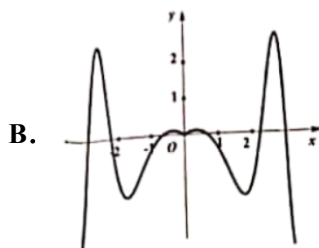


- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{33}}{6}$

7. 已知 $\sin(\pi + \alpha) = \frac{4}{5}$, 且 $\sin 2\alpha < 0$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 ()

- A. 7 B. -7 C. $\frac{1}{7}$ D. $-\frac{1}{7}$

8. 函数 $f(x) = x \cos 2^{|x|}$ 的图象可能为 ()



9.

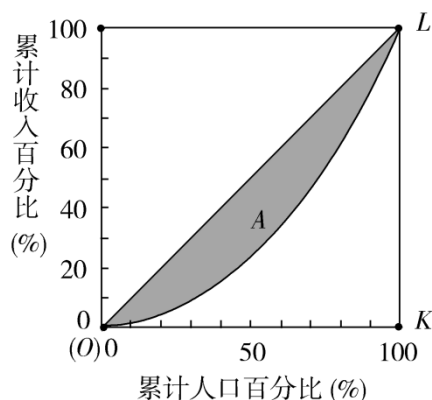
在明代程大位所著的《算法统宗》中有这样一首歌谣，“放牧人粗心大意，三畜偷偷吃苗青，苗主扣住牛马羊，要求赔偿五斗粮，三畜户主愿赔偿，牛马羊吃得异样。马吃了牛的一半，羊吃了马的一半。”请问各畜赔多少？它的大意是放牧人放牧时粗心大意，牛、马、羊偷吃青苗，青苗主人扣住牛、马、羊向其主人要求赔偿五斗粮食（1斗=10升），三畜的主人同意赔偿，但牛、马、羊吃的青苗量各不相同。马吃的青苗是牛的一半，羊吃的青苗是马的一半。问羊、马、牛的主人应该分别向青苗主人赔偿多少升粮食？（ ）

- A. $\frac{25}{7}, \frac{50}{7}, \frac{100}{7}$ B. $\frac{25}{14}, \frac{25}{7}, \frac{50}{7}$ C. $\frac{100}{7}, \frac{200}{7}, \frac{400}{7}$ D. $\frac{50}{7}, \frac{100}{7}, \frac{200}{7}$

10. 已知盒中有 3 个红球，3 个黄球，3 个白球，且每种颜色的三个球均按 A, B, C 编号，现从中摸出 3 个球（除颜色与编号外球没有区别），则恰好不同时包含字母 A, B, C 的概率为（ ）

- A. $\frac{17}{21}$ B. $\frac{19}{28}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{23}{28}$

11. 为了研究国民收入在国民之间的分配，避免贫富过分悬殊，美国统计学家劳伦茨提出了著名的劳伦茨曲线，如图所示. 劳伦茨曲线为直线 OL 时，表示收入完全平等. 劳伦茨曲线为折线 OKL 时，表示收入完全不平等. 记区域 A 为不平等区域， a 表示其面积， S 为 $\triangle OKL$ 的面积，将 $Gini = \frac{a}{S}$ 称为基尼系数.



对于下列说法：

- ① Gini 越小，则国民分配越公平；
 ② 设劳伦茨曲线对应的函数为 $y = f(x)$ ，则对 $\forall x \in (0,1)$ ，均有 $\frac{f(x)}{x} > 1$ ；
 ③ 若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y = x^2 (x \in [0,1])$ ，则 $Gini = \frac{1}{4}$ ；
 ④ 若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y = x^3 (x \in [0,1])$ ，则 $Gini = \frac{1}{2}$.

其中正确的是：

- A. ①④ B. ②③ C. ①③④ D. ①②④

12. 设集合 $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{-2, 2, 4\}$, $C = \{x \in R \mid -2 < x < 6\}$ ，则 $(A \cup B) \cap C =$ ()

- A. $\{2\}$ B. $\{1, 2, 4\}$

C. $\{1, 2, 4, 6\}$

D. $\{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 递增的等比数列，若 $a_2 + a_3 = 12$ ， $a_1 a_4 = 27$ ，则 $a_n =$ _____.

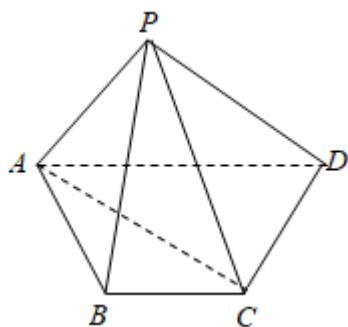
14. 若直线 $kx - y - k + 2 = 0$ 与直线 $x + ky - 2k - 3 = 0$ 交于点 P ，则 OP 长度的最大值为_____.

15. 在 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中，各项系数之和为 64，则展开式中的常数项为_____.

16. 设实数 $a > 0$ ，若函数 $f(x) = \begin{cases} a \ln x - x^2 & (x > 0) \\ x + \frac{1}{x} + a + 2 & (x < 0) \end{cases}$ 的最大值为 $f(-1)$ ，则实数 a 的最大值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是梯形. $BC \parallel AD$, $AB = BC = CD = 1$, $AD = 2$, $PB = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $PA = PC = \sqrt{3}$



(I) 证明: $AC \perp BP$;

(II) 求直线 AD 与平面 APC 所成角的正弦值.

18. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，且过点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过左焦点 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的 A, B 两点，若 $\angle AF_2B = \frac{\pi}{2}$ ，求直线 l 的斜率 k .

19. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，已知 $C_1: x^2 + y^2 - 2y = 0$,

$C_2: \sqrt{3}x + y = 6$, $C_3: kx - y = 0$ ($k > 0$).

(1) 求 C_1 与 C_2 的极坐标方程

(2) 若 C_1 与 C_3 交于点 A , C_2 与 C_3 交于点 B , $|OA| = \lambda |OB|$ ，求 λ 的最大值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = |2x + 1|$.

(1) 解不等式: $f(x) + f(x-2) \leq 6$;

(2) 求证: $f(x+a^2) - f(x-1) \leq |x+2a^2+3| + |x+2a-a^2|$.

21. (12 分) 设前 n 项积为 T_n 的数列 $\{a_n\}$, $a_n = \lambda - T_n$ (λ 为常数), 且 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 是等差数列.

(I) 求 λ 的值及数列 $\{T_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且 $b_n = (2n + 3)T_n$, 求 $S_{2n} - S_n - 2n$ 的最小值.

22. (10 分) 某工厂的机器上有一种易损元件 A , 这种元件在使用过程中发生损坏时, 需要送维修处维修. 工厂规定当日损坏的元件 A 在次日早上 8:30 之前送到维修处, 并要求维修人员当日必须完成所有损坏元件 A 的维修工作. 每个工人独立维修 A 元件需要时间相同. 维修处记录了某月从 1 日到 20 日每天维修元件 A 的个数, 具体数据如下表:

日期	1 日	2 日	3 日	4 日	5 日	6 日	7 日	8 日	9 日	10 日
元件 A 个数	9	15	12	18	12	18	9	9	24	12
日期	11 日	12 日	13 日	14 日	15 日	16 日	17 日	18 日	19 日	20 日
元件 A 个数	12	24	15	15	15	12	15	15	15	24

从这 20 天中随机选取一天, 随机变量 X 表示在维修处该天元件 A 的维修个数.

(I) 求 X 的分布列与数学期望;

(II) 若 $a, b \in N^*$, 且 $b - a = 6$, 求 $P(a \leq X \leq b)$ 最大值;

(III) 目前维修处有两名工人从事维修工作, 为使每个维修工人每天维修元件 A 的个数的数学期望不超过 4 个, 至少需要增加几名维修工人? (只需写出结论)

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

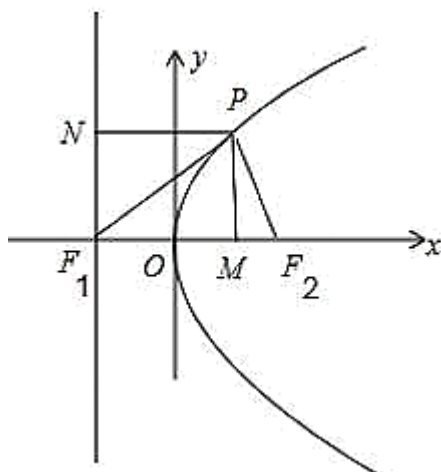
1、D

【解析】

设 $|PF_1| = m$, $|PF_2| = n$, 根据 $\cos \angle PF_1F_2 = \frac{5}{7}$ 和抛物线性质得出 $|PF_2| = \frac{5}{7}m$, 再根据双曲线性质得出 $m = 7a$, $n = 5a$, 最后根据余弦定理列方程得出 a 、 c 间的关系, 从而可得出离心率.

【详解】

过 P 分别向 x 轴和抛物线的准线作垂线, 垂足分别为 M 、 N , 不妨设 $|PF_1| = m$, $|PF_2| = n$,



则 $|MF_1| = |PN| = |PF_2| = |PF_1| \cos \angle PF_1F_2 = \frac{5m}{7}$,

P 为双曲线上的点, 则 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, 即 $m - \frac{5m}{7} = 2a$, 得 $m = 7a$, $\therefore n = 5a$,

又 $|F_1F_2| = 2c$, 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理可得 $\frac{5}{7} = \frac{49a^2 + 4c^2 - 25a^2}{2 \times 7a \times 2c}$,

整理得 $c^2 - 5ac + 6a^2 = 0$, 即 $e^2 - 5e + 6 = 0$, $Qe > 1$, 解得 $e = 2$ 或 $e = 3$.

故选: D.

【点睛】

本题考查了双曲线离心率的求解, 涉及双曲线和抛物线的简单性质, 考查运算求解能力, 属于中档题.

2、D

【解析】

分析: 因为题设中给出了 $f(1)$ 的值, 要求 $f(-1)$ 的值, 故应考虑 $f(x)$ 、 $f(-x)$ 两者之间满足的关系.

详解: 由题设有 $f(-x) = \frac{m^{-x}}{m^{-x} + 1} - 2018 \tan x + x^2 = \frac{1}{m^x + 1} - 2018 \tan x + x^2$,

故有 $f(x) + f(-x) = 1 + 2x^2$, 所以 $f(1) + f(-1) = 3$,

从而 $f(-1) = 0$, 故选 D.

点睛：本题考查函数的表示方法，解题时注意根据问题的条件和求解的结论之间的关系去寻找函数的解析式要满足的关系。

3、B

【解析】

根据函数 $f(x)$ ，在 $(0, \pi)$ 上是单调函数，确定 $0 < \omega \leq 1$ ，然后一一验证，

A. 若 $\omega = \frac{1}{2}$ ，则 $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \varphi\right)$ ，由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ，得 $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ，但 $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{4}\right) \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 由

$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$ ， $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ，确定 $f(x) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ，再求解 $f\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ 验证. C. 利用整体法根据正弦函数的单调

性判断. D. 计算 $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ 是否为 0.

【详解】

因为函数 $f(x)$ ，在 $(0, \pi)$ 上是单调函数，

所以 $\frac{T}{2} \geq \pi$ ，即 $\frac{2\pi}{\omega} \geq 2\pi$ ，所以 $0 < \omega \leq 1$ ，

若 $\omega = \frac{1}{2}$ ，则 $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \varphi\right)$ ，又因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ，即 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 0$ ，解得 $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ，而

$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{4}\right) \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故 A 错误.

由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\omega\pi}{2} + \varphi\right) = 0$ ，不妨令 $\frac{\omega\pi}{2} + \varphi = \pi$ ，得 $\varphi = \pi - \frac{\pi\omega}{2}$

由 $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\omega \times \frac{\pi}{8} + \varphi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，得 $\omega \times \frac{\pi}{8} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ 或 $\omega \times \frac{\pi}{8} + \varphi = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$

当 $\omega \times \frac{\pi}{8} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ 时， $\omega = \frac{2k\pi}{3} + 2$ ，不合题意.

当 $\omega \times \frac{\pi}{8} + \varphi = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ 时， $\omega = \frac{2k\pi}{3} + \frac{2}{3}$ ，此时 $f(x) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right)$

所以 $f\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\left(\frac{2}{3} \times \left(-\frac{\pi}{8}\right) + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{2}{3} \times \left(-\frac{\pi}{8}\right) + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ ，故 B 正确.

因为 $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ ， $\frac{2}{3}x + \frac{2\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ，函数 $f(x)$ ，在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上是单调递增，故 C 错误.

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{2}{3} \times \frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{3\pi}{2} = \sqrt{3} \neq 0, \text{ 故 D 错误.}$$

故选：B

【点睛】

本题主要考查三角函数的性质及其应用，还考查了运算求解的能力，属于较难的题.

4、C

【解析】

根据给定的程序框图，计算前几次的运算规律，得出运算的周期性，确定跳出循环时的 n 的值，进而求解 a 的值，得到答案.

【详解】

由题意， $a = \frac{3}{5}, n = 1$,

第 1 次循环， $a = -\frac{2}{3}, n = 2$ ，满足判断条件；

第 2 次循环， $a = \frac{5}{2}, n = 3$ ，满足判断条件；

第 3 次循环， $a = \frac{3}{5}, n = 4$ ，满足判断条件；

L L

可得 a 的值满足以 3 项为周期的计算规律，

所以当 $n = 2019$ 时，跳出循环，此时 n 和 $n = 3$ 时的值对应的 a 相同，即 $a = \frac{5}{2}$.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了循环结构的程序框图的计算与输出问题，其中解答中认真审题，得出程序运行时的计算规律是解答的关键，着重考查了推理与计算能力.

5、A

【解析】

先求出 $\complement_U M$ ，再与集合 N 求交集.

【详解】

由已知， $\complement_U M = \{x | x \geq 1\}$ ，又 $N = \{x | x > 2\}$ ，所以 $\complement_U M \cap N = \{x | x > 2\}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查集合的基本运算，涉及到补集、交集运算，是一道容易题.

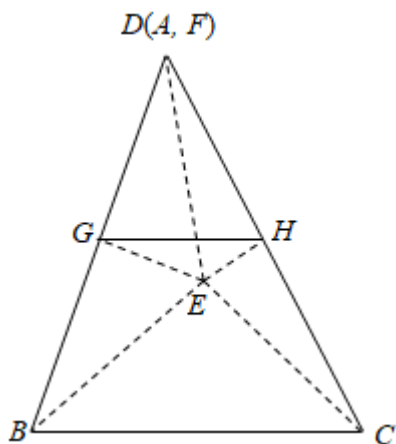
6、C

【解析】

将正四面体的展开图还原为空间几何体， A, D, F 三点重合，记作 D ，取 DC 中点 H ，连接 EG, EH, GH ， $\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角，表示出三角形 EGH 的三条边长，用余弦定理即可求得 $\cos \angle EGH$ 。

【详解】

将展开的正四面体折叠，可得原正四面体如下图所示，其中 A, D, F 三点重合，记作 D ：



则 G 为 BD 中点，取 DC 中点 H ，连接 EG, EH, GH ，设正四面体的棱长均为 a ，

由中位线定理可得 $GH \parallel BC$ 且 $GH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$ ，

所以 $\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角，

$$EG = EH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

由余弦定理可得 $\cos \angle EGH = \frac{EG^2 + GH^2 - EH^2}{2EG \cdot GH}$

$$= \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

所以直线 EG 与直线 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ，

故选：C.

【点睛】

本题考查了空间几何体中异面直线的夹角，将展开图折叠成空间几何体，余弦定理解三角形的应用，属于中档题.

7、A

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/686233140221011042>