

## 一、单选题

D. 既不充分也不必要

1 / 12

【详解】分两步：

第一步：先对除 1 以外的 3 位数字进行全排列，有  $A_3^3 = 6$  种方法；

第二步：将两个 1 选两个空插进去有  $C_4^2 = 6$ ，

由分步计数原理可得：小明可以设置的不同密码有  $6 \times 6 = 36$  种，

故选：B

3. 已知直线  $a$ 、 $b$  和平面  $\alpha$ ，则下列命题正确的是（ ）

A. 若  $a \parallel b$ ， $b \subset \alpha$ ，则  $a \parallel \alpha$

B. 若  $a \perp b$ ， $b \parallel \alpha$ ，则  $a \parallel \alpha$

C. 若  $a \parallel b$ ， $a \perp \alpha$ ，则  $b \perp \alpha$

D. 若  $a \perp b$ ， $b \perp \alpha$ ，则  $a \subset \alpha$

【答案】C

【解析】

【分析】

逐一分析各选项的正误，即可得出结论.

【详解】对于 A 选项，若  $a \parallel b$ ， $b \subset \alpha$ ，则  $a \parallel \alpha$  或  $a \subset \alpha$ ，A 选项错误；

对于 B 选项，若  $a \perp b$ ， $b \parallel \alpha$ ，则  $a \parallel \alpha$  或  $a \subset \alpha$  或  $a$  与  $\alpha$  相交，B 选项错误；

对于 C 选项，若  $a \parallel b$ ， $a \perp \alpha$ ，则  $b \perp \alpha$ ，C 选项正确；

对于 D 选项，若  $a \perp b$ ， $b \perp \alpha$ ，则  $a \subset \alpha$  或  $a \parallel \alpha$ ，D 选项错误.

故选：C.

【点睛】本题考查有关线面位置关系命题真假的判断，考查推理能力，属于中等题.

4. 已知  $m < 1$  且  $m \neq 0$ ，则二次曲线  $\frac{x^2}{1-m} - \frac{y^2}{m} = 1$  与  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  必有（ ）

A. 不同的顶点

B. 不同的焦距

C. 相同的离心率

D. 相同的焦点

【答案】D

【解析】

【分析】

分  $0 < m < 1$  和  $m < 0$  两种情况讨论，确定二次方程  $\frac{x^2}{1-m} - \frac{y^2}{m} = 1$  所表示的曲线的形状，并求出焦点坐标，

从而得出结论.

【详解】若  $0 < m < 1$ ，则  $0 < 1 - m < 1$ ，此时，二次方程  $\frac{x^2}{1-m} - \frac{y^2}{m} = 1$  所表示的曲线为焦点在  $x$  轴上的双

曲线，焦距为  $2\sqrt{1-m+m} = 2$ ，焦点坐标为  $(\pm 1, 0)$ ，而椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的焦点坐标为  $(\pm 1, 0)$ ，此时两曲线的焦点重合；

若  $m < 0$ ，则  $1 - m > -m > 0$ ，二次曲线  $\frac{x^2}{1-m} + \frac{y^2}{-m} = 1$  表示焦点在  $x$  轴上的椭圆，且焦距为

$2\sqrt{(1-m)-(-m)} = 2$ ，焦点坐标为  $(\pm 1, 0)$ ，此时，两曲线的焦点重合。

综上所述，二次曲线  $\frac{x^2}{1-m} - \frac{y^2}{m} = 1$  与  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  必有相同的焦点。

故选：D.

【点睛】本题考查根据椭圆、双曲线的标准方程求焦点的坐标，解题时要对参数的取值进行分类讨论，并结合标准方程确定焦点的位置，考查分类讨论思想的应用，属于中等题。

5. 在平面直角坐标系中，坐标原点  $O$  到过点  $A(\cos 130^\circ, \sin 130^\circ)$ ， $B(\cos 70^\circ, \sin 70^\circ)$  的直线距离为 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】

求出直线  $AB$  的方程，然后利用点到直线的距离公式可计算出原点到直线  $AB$  的距离。

$$\begin{aligned} \text{【 详 解 】 } k_{AB} &= \frac{\sin 70^\circ - \sin 130^\circ}{\cos 70^\circ - \cos 130^\circ} = \frac{\cos 20^\circ - \cos 40^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ} = \frac{\cos 20^\circ - 2\cos^2 20^\circ + 1}{\sin 20^\circ + 2\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} = \frac{1 - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} \\ &= \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}, \end{aligned}$$

根据诱导公式可知：  $B(\sin 20^\circ, \cos 20^\circ)$ ，

所以经过  $A$ 、 $B$  两点的直线方程为：  $y - \cos 20^\circ = \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}(x - \sin 20^\circ)$ ，

即  $x \sin 10^\circ - y \cos 10^\circ + \cos 10^\circ \cos 20^\circ - \sin 10^\circ \sin 20^\circ = 0$ ,

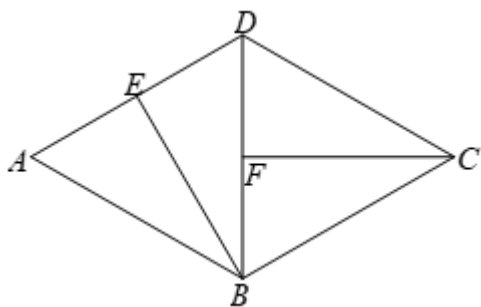
即  $x \sin 10^\circ - y \cos 10^\circ + \cos(10^\circ + 20^\circ) = 0$ , 即  $x \sin 10^\circ - y \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ ,

所以原点  $O$  到直线的距离为  $d = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

故选: C.

【点睛】本题考查点到直线距离的计算, 涉及二倍角公式和两角和的余弦公式的应用, 解题的关键就是求出直线的方程, 考查计算能力, 属于中等题.

6. 如图, 在菱形  $ABCD$  中,  $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ , 线段  $AD$ 、 $BD$  的中点分别为  $E$ 、 $F$ . 现将  $\triangle ABD$  沿对角线  $BD$  翻折, 当二面角  $A-BD-C$  的余弦值为  $\frac{1}{3}$  时, 异面直线  $BE$  与  $CF$  所成角的正弦值是 ( )



A.  $\frac{\sqrt{35}}{6}$

B.  $\frac{1}{6}$

C.  $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

D.  $\frac{1}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】

过  $E$  作  $EH \perp BD$ , 交  $BD$  于  $H$  点, 设二面角  $A-BD-C$  的大小为  $\alpha$ , 设  $BE$  与  $CF$  的夹角为  $\theta$ , 则

$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 由向量数量积的运算律得出  $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{HE}$ , 由题意可得出  $\left| \overrightarrow{HE} \right| = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BE} \right|$ , 利用数量积的

定义可求出  $\cos \langle \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{BE} \rangle$  的值, 即可求出  $\cos \theta$  的值, 进而利用同角三角函数的平方关系可求出  $\sin \theta$  的值.

【详解】如下图所示, 过  $E$  作  $EH \perp BD$ , 交  $BD$  于  $H$  点,

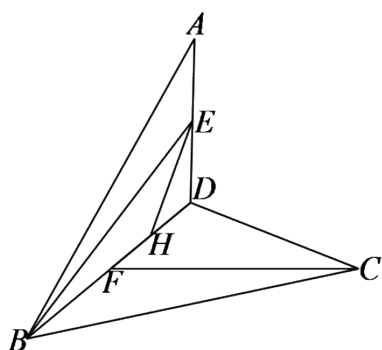
设  $BE$  与  $CF$  的夹角为  $\theta$ ，则  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，

记二面角  $A-BD-C$  的大小为  $\alpha$ ， $\vec{CF} \cdot \vec{BE} = \vec{CF} \cdot (\vec{BH} + \vec{HE}) = \vec{CF} \cdot \vec{HE}$ ，

即  $\vec{CF} \cdot \vec{BE} = |\vec{CF}| \cdot |\vec{HE}| \cos(\pi - \alpha)$ ，即  $|\vec{CF}| \cdot |\vec{BE}| \cos \langle \vec{CF}, \vec{BE} \rangle = \frac{1}{2} |\vec{CF}| \cdot |\vec{BE}| \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ ，

$\therefore \cos \langle \vec{CF}, \vec{BE} \rangle = -\frac{1}{6}$ ，所以  $\cos \theta = \frac{1}{6}$ ，即  $\sin \theta = \frac{\sqrt{35}}{6}$ ，

故选：A.



【点睛】本题考查异面直线所成角的计算，同时也考查了二面角的定义，涉及利用空间向量数量积的计算，考查计算能力，属于中等题.

7. 已知中心在原点的椭圆和双曲线有共同的左、右焦点  $F_1$ 、 $F_2$ ，两曲线在第一象限的交点为  $P$ ，

$\triangle PF_1F_2$  是以  $PF_1$  为底边的等腰三角形，若  $|PF_1| = 8$ ，椭圆和双曲线的离心率分别为  $e_1$ 、 $e_2$ ，则  $\frac{2}{e_1} + \frac{1}{e_2}$  的

取值范围是 ( )

A.  $(4, +\infty)$

B.  $(4, 7)$

C.  $(2, 4)$

D.  $(2\sqrt{2}, 4)$

【答案】B

【解析】

【分析】

设椭圆的长半轴长为  $a_1$ ，双曲线的实半轴长为  $a_2$ ，焦距为  $2c$ ，则  $|PF_2| = 2c$ ，利用双曲线的定义和三角形三边关系求得  $2 < c < 4$ ，然后利用

【详解】设椭圆的长半轴长为  $a_1$ ，双曲线的实半轴长为  $a_2$ ，焦距为  $2c$ ，则  $|PF_2| = 2c$ ，

由椭圆和双曲线的定义可得  $\begin{cases} 8+2c=2a_1 \\ 8-2c=2a_2 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} a_1=4+c \\ a_2=4-c>0 \end{cases}$ ,

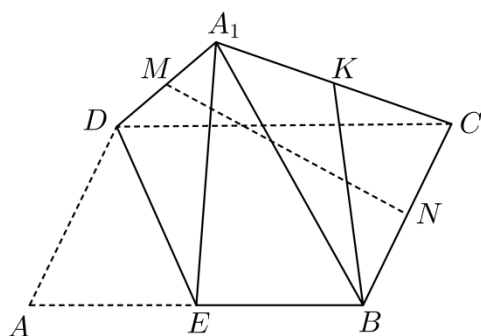
又因为  $|PF_2|+|F_1F_2|>|PF_1|$ , 即  $4c>8$ , 解得  $c>2$ , 即  $2<c<4$ ,

所以  $\frac{2}{e_1}+\frac{1}{e_2}=\frac{2a_1+a_2}{c}=\frac{8+2c+4-c}{c}=\frac{12}{c}+1\in(4,7)$ ,

故选: B.

【点睛】本题主要考查椭圆和双曲线离心率倒数和取值范围的计算, 根据题意得出半焦距的取值范围是解题的关键, 考查计算能力, 属于中等题.

8. 如图, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB=2$ ,  $BC=1$ ,  $E$ 、 $N$  分别为边  $AB$ 、 $BC$  的中点, 沿  $DE$  将  $\triangle ADE$  折起, 点  $A$  折至  $A_1$  处 ( $A_1$  与  $A$  不重合), 若  $M$ ,  $K$  分别为线段  $A_1D$ 、 $A_1C$  的中点, 则在  $MDE$  折起过程中, 下列选项正确的是 ( )



- A.  $DE$  可以与  $A_1C$  垂直
- B. 不能同时做到  $MN \parallel$  平面  $A_1BE$  且  $BK \parallel$  平面  $A_1DE$
- C. 当  $MN \perp A_1D$  时,  $MN \perp$  平面  $A_1DE$
- D. 直线  $A_1E$ 、 $BK$  与平面  $BCDE$  所成角分别  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ ,  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  能够同时取得最大值

【答案】D

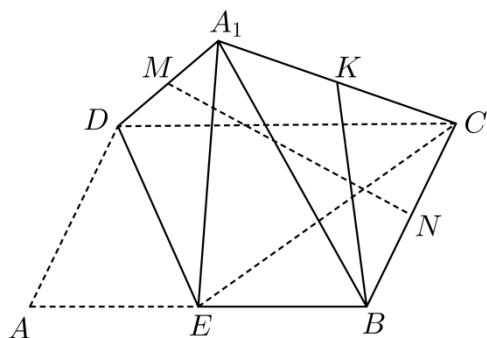
【解析】

【分析】A 假设  $DE \perp A_1C$ , 利用线面垂直的判定有  $DE \perp$  面  $A_1EC$ , 进而可得  $DE \perp A_1E$  得矛盾即可判断; B 取  $DE$ ,  $DC$  中点  $G$ ,  $F$ , 连接  $GM$ ,  $GN$ ,  $FK$ ,  $FB$ , 由线面平行的判定有  $MG \parallel$  面  $A_1BE$ ,  $GN \parallel$  面  $A_1BE$ , 再由面面垂直的判定、性质得  $MN \parallel$  面  $A_1BE$ , 同理判断  $BK \parallel$  平面  $A_1DE$  是否成立; C

: 连接  $ME$ ,  $EN$ , 利用勾股定理判断  $ME^2 + EN^2 = MN^2$  是否成立; D 根据题设确定  $A_1$  的轨迹, 连接

$EC$ , 取  $EC$  中点  $T$ , 连接  $TK$ ,  $TB$ , 应用余弦定理求得  $BK = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 由线面角的定义研究  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  是否能够同时取最大值.

【详解】A: 连接  $EC$ , 假设  $DE \perp A_1C$ ,

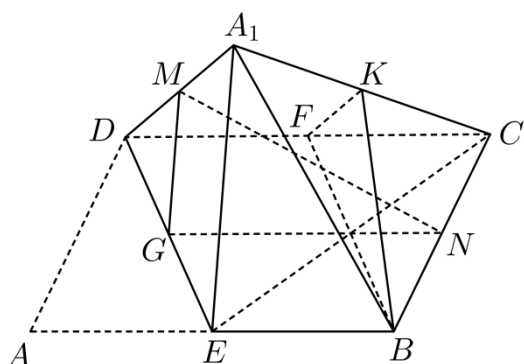


因为  $\angle AED = \angle BEC = 45^\circ$ ,  $\angle DEC = 90^\circ$ , 所以  $DE \perp EC$ ,

因为  $A_1C \cap EC = C$ ,  $A_1C, EC \subset \text{面 } A_1EC$ , 所以  $DE \perp \text{面 } A_1EC$ ,

因为  $AE \subset \text{面 } A_1EC$ , 所以  $DE \perp A_1E$ , 与  $\angle AED = 45^\circ$  矛盾, 错误;

B: 取  $DE$ ,  $DC$  中点  $G$ ,  $F$ , 连接  $GM$ ,  $GN$ ,  $FK$ ,  $FB$ , 则  $MG \parallel A_1E$ ,



因为  $MG \not\subset \text{面 } A_1BE$ ,  $A_1E \subset \text{面 } A_1BE$ , 所以  $MG \parallel \text{面 } A_1BE$ ,

因为  $BE \parallel CD$ ,  $BE = \frac{1}{2}CD$ , 则四边形  $BEDC$  为梯形, 且  $BE$ ,  $CD$  为底,

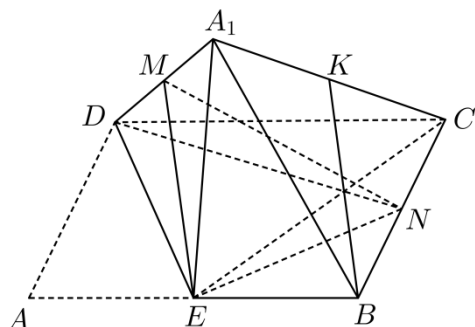
又  $G$ ,  $N$  分别为  $DE$ ,  $BC$  的中点, 所以  $GN \parallel BE$ ,

因为  $GN \not\subset \text{面 } A_1BE$ ,  $BE \subset \text{面 } A_1BE$ , 所以  $GN \parallel \text{面 } A_1BE$ ,

因为  $MG \perp GN = G$ ,  $MG, GN \subset \text{面 } MGN$ , 所以面  $MGN \parallel \text{面 } A_1BE$ ,

因为  $MN \subset \text{面 } MGN$ , 所以  $MN \parallel \text{面 } A_1BE$ , 同理  $BK \parallel \text{面 } A_1DE$ , 错误;

C: 连接  $ME, EN, DN$ , 当  $MN \perp A_1D$  时,  $MN^2 = DN^2 - DM^2 = CD^2 + CN^2 - DM^2 = CD^2 = 4$ ,



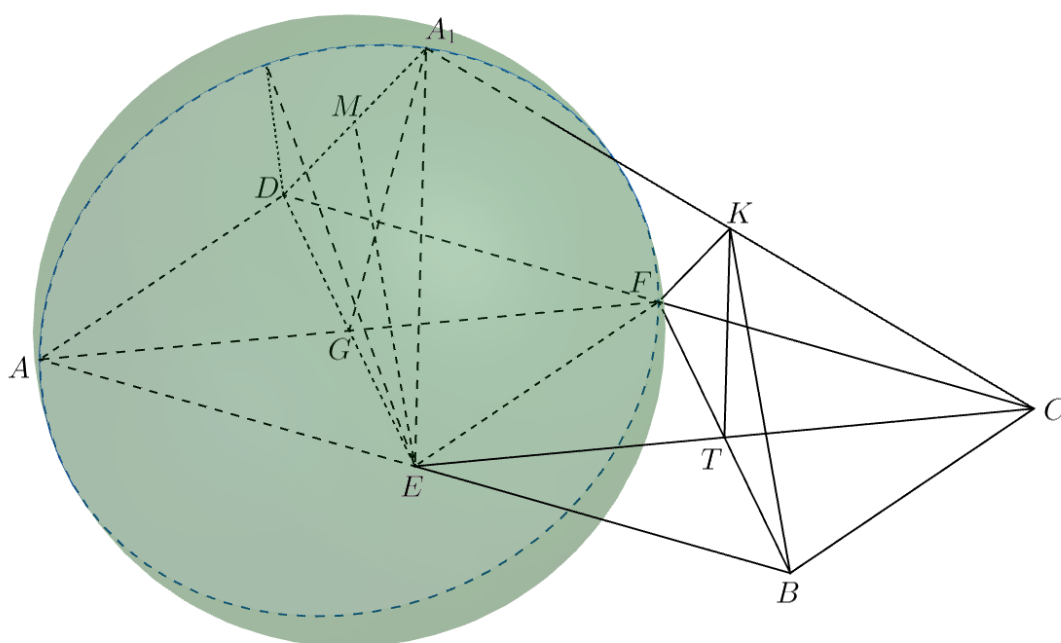
又  $ME^2 = EN^2 = \frac{5}{4}$ , 所以  $ME^2 + MN^2 \neq EN^2$ , 故  $MN$  与  $ME$  不垂直, 从而  $MN$  不垂直于平面  $A_1DE$ , 错误;

D: 因为  $A_1$  在以  $DE$  为直径的球面上, 球心为  $G$ ,

所以  $A_1$  的轨迹为  $\triangle A_1AF$  的外接圆 ( $A_1$  与  $F$  不重合,  $F$  为  $CD$  的中点),

连接  $EC$ , 取  $EC$  中点  $T$ , 连接  $TK, TB$ , 则  $TK \parallel A_1E$ ,  $BT \parallel DE$ , 且  $\angle KTB + \angle A_1ED = 180^\circ$ , 则

$\angle KTB = 180^\circ - \angle A_1ED = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ ,



在 $\triangle KTB$ 中,  $KT = \frac{1}{2}A_1E = \frac{1}{2}$ ,  $BT = \frac{1}{2}CE = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

由余弦定理得  $BK^2 = BT^2 + KT^2 - 2BT \cdot KT \cos 135^\circ = \frac{5}{4}$ , 所以  $BK = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,

当直线  $BK$  与面  $BCDE$  所成角取最大值时,  $K$  到面  $BCDE$  距离最大,

由  $K$  为  $A_1C$  的中点, 此时  $A_1$  到面  $BCDE$  距离最大,

由  $A_1E = 1$ , 当直线  $A_1E$  与面  $BCDE$  所成角取最大值时,  $A_1$  到面  $BCDE$  距离最大,

所以直线  $A_1E$ 、 $BK$  与面  $BCDE$  所成角  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  能够同时取得最大值, 正确.

故选: D

## 二、多选题

9. 已知直线  $l_1: ax - 3y + 1 = 0$ ,  $l_2: x - by + 2 = 0$ , 则 ( )

A. 若  $l_1 \perp l_2$ , 则  $\frac{a}{b} = -3$

B. 若  $l_1 \parallel l_2$ , 则  $ab = 3$

C. 若  $l_1$  与坐标轴围成的三角形面积为 1, 则  $a = \pm \frac{1}{6}$

D. 当  $b < 0$  时,  $l_2$  不经过第一象限

【答案】BCD

【解析】

【分析】对于 AB, 根据线线位置关系判断即可; 对于 C, 由题得  $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left| -\frac{1}{a} \right| = 1$  即可解决; 对于 D, 数形结合即可.

【详解】由题知, 直线  $l_1: ax - 3y + 1 = 0$ ,  $l_2: x - by + 2 = 0$

对于 A, 当  $l_1 \perp l_2$  时,  $a + 3b = 0$ , 解得  $\frac{a}{b} = -3$  或  $a = b = 0$ , 故 A 错误;

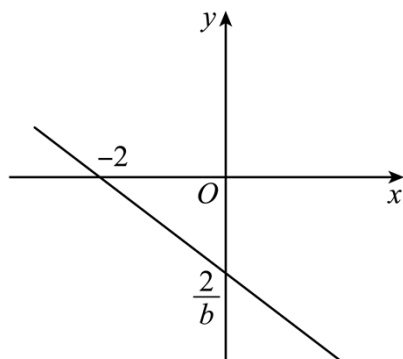
对于 B, 当  $l_1 \parallel l_2$  时,  $-ab + 3 = 0$ , 解得  $ab = 3$ , 故 B 正确;

对于 C, 在直线  $l_1: ax - 3y + 1 = 0$  中,

当  $x = 0$  时,  $y = \frac{1}{3}$ , 当  $y = 0$  时,  $x = -\frac{1}{a}$ ,

所以  $l_1$  与坐标轴围成的三角形面积为  $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left| -\frac{1}{a} \right| = 1$ , 解得  $a = \pm \frac{1}{6}$ , 故 C 正确;

对于 D, 由题知当  $b < 0$  时,  $l_2: y = \frac{1}{b}x + \frac{2}{b}$  的图象为



故 D 正确;

故选: BCD

10. 已知空间中三点  $A(-1, 2, 1)$ ,  $B(1, 3, 1)$ ,  $C(-2, 4, 2)$ , 则 ( )

- A. 向量  $\vec{AB}$  与  $\vec{AC}$  互相垂直
- B. 与  $\vec{BC}$  方向相反的单位向量的坐标是  $\left( \frac{3\sqrt{11}}{11}, -\frac{\sqrt{11}}{11}, -\frac{\sqrt{11}}{11} \right)$
- C.  $\vec{AC}$  与  $\vec{BC}$  夹角的余弦值是  $\frac{\sqrt{66}}{11}$
- D.  $\vec{BC}$  在  $\vec{AB}$  上的投影向量的模为  $\sqrt{6}$

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据空间向量数量积的坐标表示公式, 结合投影向量的定义、空间向量夹角公式逐一判断即可.

【详解】由已知可得  $\vec{AB} = (2, 1, 0)$ ,  $\vec{AC} = (-1, 2, 1)$ ,  $\vec{BC} = (-3, 1, 1)$ . 因为  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2 + 2 = 0$ , 所以  $\vec{AB}$  与  $\vec{AC}$  互相垂直, 故 A 正确;  $|\vec{BC}| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$ ,

所以与  $\vec{BC}$  方向相反的单位向量的坐标是  $-\frac{1}{\sqrt{11}}(-3, 1, 1) = \left( \frac{3\sqrt{11}}{11}, -\frac{\sqrt{11}}{11}, -\frac{\sqrt{11}}{11} \right)$ , 故 B 正确;

$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 3 + 2 + 1 = 6$ ,  $|\vec{BC}| = \sqrt{11}$ ,  $|\vec{AC}| = \sqrt{6}$ , 所以

$\cos \langle \vec{AC}, \vec{BC} \rangle = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AC}| |\vec{BC}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \times \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{66}}{11}$ , 故 C 正确;  $\vec{BC}$  在  $\vec{AB}$  上的投影向量的模为

$$\left| \frac{BC \cdot AB}{AB} \right| = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \text{ 故 D 错误.}$$

故选: ABC

11. 在  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2x}\right)^9$  的展开式中 ( )

A. 常数项为  $\frac{21}{2}$

B.  $x^3$  项的系数为  $-\frac{9}{2}$

C. 系数最大项为第 3 项

D. 有理项共有 5 项

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据二项展开式的通项公式可得  $T_{r+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot C_9^r \cdot x^{\frac{9-3r}{2}}$ , 对 A、B: 分别令  $\frac{9-3r}{2} = 0$ 、 $\frac{9-3r}{2} = 3$ ,

运算求解即可; 对于 C: 可得第  $r+1$  项的系数为  $a_r = \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot C_9^r$ , 结合数列单调性分析运算; 对于 D: 令

$\frac{9-3r}{2} \in \mathbf{Z}$ , 分析运算即可.

【详解】 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2x}\right)^9$  的展开式的通项公式

$$T_{r+1} = C_9^r (\sqrt{x})^{9-r} \left(-\frac{1}{2x}\right)^r = \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot C_9^r \cdot x^{\frac{9-3r}{2}}, r=0,1,2,\dots,9,$$

对于 A: 令  $\frac{9-3r}{2} = 0$ , 解得  $r=3$ , 可得  $T_4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot C_9^3 = -\frac{21}{2}$ ,

即常数项为  $-\frac{21}{2}$ , 故 A 错误;

对于 B: 令  $\frac{9-3r}{2} = 3$ , 解得  $r=1$ , 可得  $T_2 = -\frac{1}{2} \times C_9^1 \cdot x^3 = -\frac{9}{2}x^3$ ,

即  $x^3$  项的系数为  $-\frac{9}{2}$ , 故 B 正确;

对于 C: 由通项公式可得: 第  $r+1$  项的系数为  $a_r = \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot C_9^r$ ,

当  $r$  为偶数时,  $a_r > 0$ ; 当  $r$  为奇数时,  $a_r < 0$ ;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/687016123022010024>