第七章 连续时间下的期权定价

金融数学

中国人民大学出版社

简介

自从期权交易产生以来，人们就一直致力于对期权定价问题的探讨。1973 年美国芝加哥大学教授费希尔·布莱克（Fischer Black, 1938—1995）和迈伦·斯科尔斯（Myron Scholes, 1941— ）发表了《期权定价与公司负债》一文，提出了有史以来的第一个期权定价模型，在学术界和实务界引起了强烈的反响。

在布莱克和斯科尔斯研究的基础上，罗伯特·默顿（Robert Merton, 1944— ）独立地使用随机微积分的相关方法对期权定价问题进行了研究，于同年在《贝尔经济与管理科学杂志》上发表了名为《期权的理性定价理论》的论文。

三位学者

这两篇论文奠定了期权定价的理论基础。他们所提出的期权定价模型称作布莱克-斯科尔斯（Black-Scholes）期权定价模型（后文简称为 B-S 模型）。由于这三位学者的突出贡献，最终默顿和斯科尔斯于 1997 年获得诺贝尔经济学奖。

Fischer Black

Myron Scholes

Robert C. Merton

本章内容

1. 期权的价格分析
2. 期权与标的资产的对冲
3. 期权的风险中性定价法
   - 欧式期权的定价
   - 两类二元期权的定价
   - 欧式看涨期权与二元期权的关系
   - 障碍期权的定价
4. B-S 模型的不足及拓展
   - B-S 模型的假设条件
   - B-S 模型的不足和改进

看涨期权的价格分析

看涨期权 (call option) 的买方在未来具有按照行权价买入标的资产的权利。假设 S 表示标的资产在未来期权到期时的市价；K 表示期权的行权价。因此对于看涨期权买方而言，其未来到期时的回报数额 (payoff) 如下：

$$V_C = (S-K)^+ = \max[S-K,0] = \begin{cases} S-K, & S \geq K \\ 0, & S < K \end{cases}$$

对于看涨期权而言，只有当 $S \geq K$ 时，期权才有必要行权，因此行权后的回报数额即为标的资产高价与行权价之差；否则期权将放弃行权，相应的回报数额为零。

看涨期权的价格分析 (cont.)

$$V_C = (S-K)^+ = \max[S-K, 0] = \begin{cases} S-K, & S \geq K \\ 0, & S < K \end{cases}$$

- 当 $S = K$ 时，看涨期权是平值 (in-the-money, ITM) 期权；
- 当 $S > K$ 时，看涨期权是实值 (at-the-money, ATM) 期权；
- 当 $S < K$ 时，看涨期权是虚值 (out-of-the-money, OTM) 期权。
- 对于看涨期权而言，实值期权的回报数额为正；虚值和平值期权的回报数额则为零。

看跌期权的价格分析

看跌期权 (put option) 的买方在未来具有按照行权价卖出标的资产的权利。因此其未来到期时的回报数额如下：

$$V_P = (K-S)^+ = \max[K-S, 0] = \begin{cases} 0, & S > K \\ K-S, & S \leq K \end{cases}$$

类似地，当 $S = K$ 时，看跌期权是平值期权；当 $S < K$ 时，看跌期权是实值期权；当 $S > K$ 时，看跌期权是虚值期权。

总结：期权的回报数额与实虚值对应关系

	看涨期权	回报额	看跌期权	回报额
实值	$S > K$	$S - K$	$S < K$	$K - S$
虚值	$S < K$	0	$S > K$	0
平值	$S = K$	0	$S = K$	0

B-S 模型与几何布朗运动

在 B-S 模型当中，假设期权标的资产价格的演化服从几何布朗运动，即：

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

其中：μ 和 σ 均是常数，分别是标的资产 S 的漂移率和波动率；$W(t)$ 是标准布朗运动。

由于期权是由标的资产衍生而来，因此其价格变动受到标的资产价格的影响。记期权的价格为 $f[S(t)]$。

期权价格的随机偏微分方程 (SPDE)

根据伊藤引理可得：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S}\,\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}[\,\mathrm{d}S]^2 \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]\mathrm{d}t + \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}\,\mathrm{d}W(t)
\end{aligned}
$$

在 B-S 模型的原始文献中，采用将期权与标的资产构成的组合进行对冲的方式，并基于无套利原理，最终得到求解期权价格的方程。

资产组合的构建

假设构造的组合中包含了一份期权，以及 Δ 份标的资产，并将该组合的总价值记为 Π，因此：

$$\Pi = f + \Delta S$$

于是该资产组合的价值变动为：

$$\mathrm{d}\Pi = \mathrm{d}f + \Delta\,\mathrm{d}S$$

将下式代入上式

$$\begin{cases} \mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t) \\ \mathrm{d}f = \left[\dfrac{\partial f}{\partial t} + \mu S\dfrac{\partial f}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]\mathrm{d}t + \sigma S\dfrac{\partial f}{\partial S}\,\mathrm{d}W(t) \end{cases}$$

资产组合的构建 (cont.)

$$\mathrm{d}\Pi=\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\mu S\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+\Delta\mu S\right]\ \mathrm{d}t+\left[\sigma S\frac{\partial f}{\partial S}+\Delta\sigma S\right]\ \mathrm{d}W(t)$$

接下来，令上式中的 $\mathrm{d}W(t)$ 项取值为零，则意味着：

$$\Delta=-\frac{\partial f}{\partial S}$$

此时，组合 Π 的价格变动不受随机因素的影响，对应地：

$$\mathrm{d}\Pi=\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]\ \mathrm{d}t$$

投资组合的价值变动仅与时间 t 的变动有关，该组合已经消除了随机因素带来的不确定性。

无风险资产组合

根据无套利定价原理，该投资组合的收益率应该等于无风险利率 r。因此在连续复利计息下，下式成立：

$$\Pi(T) = \Pi(t)e^{r(T-t)}$$

与之对应的微分方程如下：

$$\mathrm{d}\Pi = r\Pi\ \mathrm{d}t$$

与 $\mathrm{d}\Pi = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]\ \mathrm{d}t$ 联立，可得：

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]\ \mathrm{d}t = r\left[f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right]\ \mathrm{d}t$$

B-S 偏微分方程

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]\ \mathrm{d}t=r\left[f-\frac{\partial f}{\partial S}S\right]\ \mathrm{d}t$$

整理可得：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf$$

上式就是著名的 B-S 偏微分方程 (Partial Differential Equation, PDE) 。求解该方程，最终得到的 $f[S(t)]$ 就是期权的合理价格。

B-S 偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

这个偏微分方程有很多解，为此需要添加必要的边界条件 (Boundary Condition) 才有可能得到唯一的解。

- 对于到期时间为 T 的欧式看涨期权来说，该边界条件是 $f[S(t)] = \max\left[S(T) - K, 0\right]$；
- 对于欧式看跌期权来说，边界条件则为 $f[S(t)] = \max\left[K - S(T), 0\right]$。

倒向偏微分方程

这个偏微分方程的边界条件与自然科学领域常见问题的边界条件有所区别。从严格意义上说，B-S 偏微分方程是一种倒向偏微分方程（backward PDE）。

物理学领域： 初始条件已知 $\rightarrow$? $\rightarrow \cdots \rightarrow$? 时间

$0 \qquad t \qquad T$

衍生品定价领域： ? $\leftarrow$? $\leftarrow \cdots \leftarrow$ 终值条件已知

风险中性定价法

风险中性概率测度 $\mathbb{Q}$ 下，资产价格的贴现值是鞅。基于这一结论，我们使用风险中性方法对欧式看涨期权进行定价。

对于服从几何布朗运动的标的资产而言，在测度 $\mathbb{Q}$ 下，其价格演化的随机微分方程当中的漂移项即为无风险利率 r，因此：

$$\mathrm{d}S(t) = rS(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}(t)$$

其中：$\widetilde{W}(t)$ 是测度 $\mathbb{Q}$ 下的标准布朗运动。根据伊藤引理可得：

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0)\exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\widetilde{W}(t)\right] \\ &= S(0)\exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}Z\right] \end{aligned}$$

其中：$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$。

欧式看涨期权的定价

对于欧式看涨期权而言，其未来到期时的回报数额为 $\max[S(T)-K,0]$，也常常简写为 $[S(T)-K]^+$，根据风险中性测度的性质，可得：

$$V(0)=e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V(T)|S(0)=S]=e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(S(T)-K)^+\middle|S(0)=S\right]$$

于是：

$$\begin{aligned}V(0)&=e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\left(S\exp\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma z\sqrt{T}\right]-K\right)^+ f_Z(z)\,\mathrm{d}z\\&=e^{-rT}\int_{z_0}^{\infty}\left(S\exp\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma z\sqrt{T}\right]-K\right)f_Z(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

欧式看涨期权的定价 (cont.)

$f_Z(z)$ 是标准正态分布的概率密度函数，即：

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]$$

z_0 计算过程如下：

$$S\exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma z_0\sqrt{T}\right] = K \Rightarrow z_0 = \frac{\ln(K/S) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

欧式看涨期权的定价 (cont.)

$$V(0) = e^{-rT}\int_{z_0}^{\infty}\left(S\exp\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma z\sqrt{T}\right]-K\right)f_Z(z)\,\mathrm{d}z$$

$V(0)$ 可进一步拆分成两项:

$$\begin{aligned} V(0) &= Se^{-rT}\int_{z_0}^{\infty}\exp\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma z\sqrt{T}\right]f_Z(z)\,\mathrm{d}z - Ke^{-rT}\int_{z_0}^{\infty}f_Z(z)\,\mathrm{d}z \\ &= Se^{-rT}I_1 - Ke^{-rT}N(-z_0) \end{aligned}$$