

湖北省武汉华中师大一附中 2023 届高三最新原创信息试卷数学试题（二）

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若实数 x, y 满足条件
$$\begin{cases} x+2y-5 \leq 0 \\ 2x+y-4 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$$
，目标函数 $z = 2x - y$ ，则 z 的最大值为()

- A. $\frac{5}{2}$ B. 1 C. 2 D. 0

2. 下列函数中，在定义域上单调递增，且值域为 $[0, +\infty)$ 的是 ()

- A. $y = |\lg(x+1)|$ B. $y = x^{\frac{1}{2}}$ C. $y = 2^x$ D. $y = \ln|x|$

3. 若复数 $(2a+i)(1+i)$ (i 为虚数单位) 在复平面内所对应的点在虚轴上，则实数 a 为 ()

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

4. $\tan 570^\circ =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $g(x) = 2^x + a$ ，若 $\forall x_1 \in [\frac{1}{2}, 3], \exists x_2 \in [2, 3]$ ，使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

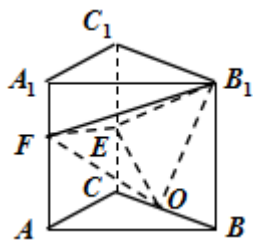
- A. $a \leq 1$ B. $a \geq 1$
C. $a \leq 0$ D. $a \geq 0$

6. 已知函数 $f(x) = x^3 + \sin x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ，若 $f(2a-1) > f(0)$ ，则 a 的取值范围为 ()

- A. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $(0, 1)$ C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

7. 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = AC = 1$ ， $BC = AA_1 = \sqrt{2}$ ，点 E, O 分别是线段 C_1C, BC 的中点，

$\vec{A_1F} = \frac{1}{3}\vec{A_1A}$, 分别记二面角 $F-OB_1-E$, $F-OE-B_1$, $F-EB_1-O$ 的平面角为 α, β, γ , 则下列结论正确的是 ()



- A. $\gamma > \beta > \alpha$ B. $\alpha > \beta > \gamma$ C. $\alpha > \gamma > \beta$ D. $\gamma > \alpha > \beta$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 的中点, E 为 AB 上靠近点 B 的三等分点, 且 BD , CE 相交于点 P , 则 $\vec{AP} =$ ()

- A. $\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ B. $\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$
 C. $\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ D. $\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

9. 已知 $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin \alpha$ 的值等于 ()

- A. $-\frac{7}{9}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{7}{9}$

10. 已知 i 为虚数单位, 若复数 z 满足 $\frac{5}{1+2i} = \bar{z} - i$, 则 $z =$ ()

- A. $1+i$ B. $-1+i$ C. $1-2i$ D. $1+2i$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{3}{4}x$, 且其右焦点为 $(5, 0)$, 则双曲线 C 的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(2-x), & x \leq 1, \\ -x^2 + 1, & x > 1, \end{cases}$ 若 $|f(x)| - ax + a \leq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ B. $[0, 1]$ C. $[1, +\infty)$ D. $[0, 2]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在椭圆 C 上移动时, $\triangle PF_1F_2$ 的内心 I 的轨迹方程为 _____.

14. 对于任意的正数 a, b , 不等式 $(2ab + a^2)k \leq 4b^2 + 4ab + 3a^2$ 恒成立, 则 k 的最大值为 _____.

15. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (-2, m)$, 若 $(2\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则实数 $m =$ _____.

16. 已知 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x - y - 1 \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$
, 则 $z = 2x - y$ 的最小值为 _____

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在世界读书日期间，某地区调查组对居民阅读情况进行了调查，获得了一个容量为 200 的样本，其中城镇居民 140 人，农村居民 60 人.在这些居民中，经常阅读的城镇居民有 100 人，农村居民有 30 人.

(1) 填写下面列联表，并判断能否有 99%的把握认为经常阅读与居民居住地有关？

	城镇居民	农村居民	合计
经常阅读	100	30	
不经常阅读			
合计			200

(2) 调查组从该样本的城镇居民中按分层抽样抽取 7 人，参加一次阅读交流活动，若活动主办方从这 7 位居民中随机选取 2 人作交流发言，求被选中的 2 位居民都是经常阅读居民的概率.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

18. (12 分) 已知抛物线 C 的顶点为原点，其焦点 $F(0, c)$, $(c > 0)$ 关于直线 $l: x - y - 2 = 0$ 的对称点为 M ，且 $|FM| = 3\sqrt{2}$.若点 P 为 C 的准线上的任意一点，过点 P 作 C 的两条切线 PA, PB ，其中 A, B 为切点.

- (1) 求抛物线 C 的方程；
- (2) 求证：直线 AB 恒过定点，并求 $\triangle PAB$ 面积的最小值.

19. (12 分) 设前 n 项积为 T_n 的数列 $\{a_n\}$, $a_n = \lambda - T_n$ (λ 为常数), 且 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 是等差数列.

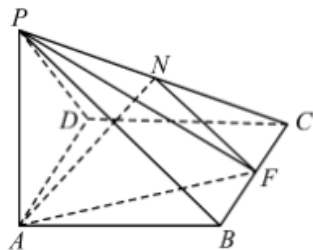
- (I) 求 λ 的值及数列 $\{T_n\}$ 的通项公式；
- (II) 设 S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，且 $b_n = (2n + 3)T_n$ ，求 $S_{2n} - S_n - 2n$ 的最小值.

20. (12 分) 已知 a, b, c 为正数，且 $abc = 1$ ，证明：

$$(1) (2a+1)(2b+1)(2c+1) \geq 27;$$

$$(2) \frac{1}{a(b+c)^2} + \frac{1}{b(a+c)^2} + \frac{1}{c(a+b)^2} \leq \frac{3}{4}.$$

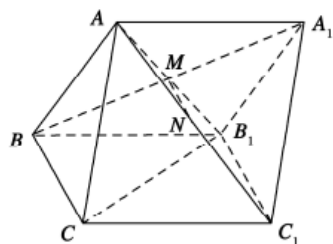
21. (12分) 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp AB$, $PA=6$, $AB=8$, $PD=10$, N 为 PC 的中点, F 为棱 BC 上的一点.



(1) 证明: 面 $PAF \perp$ 面 $ABCD$;

(2) 当 F 为 BC 中点时, 求二面角 $A-NF-C$ 余弦值.

22. (10分) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 四边形 A_1B_1BA 是菱形, $AB=4$, $\angle ABB_1=60^\circ$, $B_1C_1=3$, $BC \perp AB$, 点 M 、 N 分别是 A_1B 、 AC_1 的中点, 且 $MN \perp AB_1$.



(1) 求证: 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 A_1B_1BA ;

(2) 求四棱锥 $A-BCC_1B_1$ 的体积.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. C

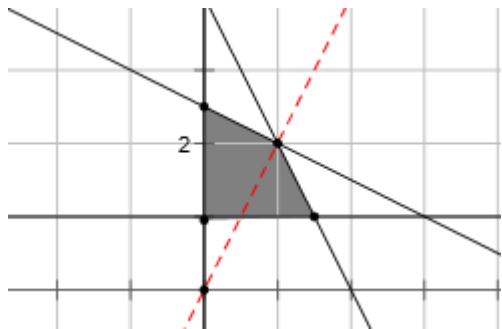
【解析】

画出可行域和目标函数, 根据平移得到最大值.

【详解】

若实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x+2y-5 \leq 0 \\ 2x+y-4 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$ ，目标函数 $z = 2x - y$

如图：



当 $x = \frac{3}{2}, y = 1$ 时函数取最大值为 2

故答案选 C

【点睛】

求线性目标函数 $z = ax + by (ab \neq 0)$ 的最值：

当 $b > 0$ 时，直线过可行域且在 y 轴上截距最大时， z 值最大，在 y 轴截距最小时， z 值最小；

当 $b < 0$ 时，直线过可行域且在 y 轴上截距最大时， z 值最小，在 y 轴上截距最小时， z 值最大.

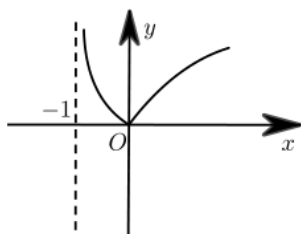
2. B

【解析】

分别作出各个选项中的函数的图象，根据图象观察可得结果.

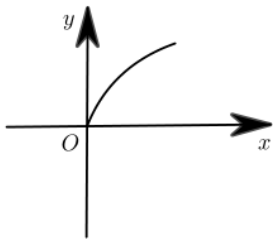
【详解】

对于 A， $y = |\lg(x+1)|$ 图象如下图所示：



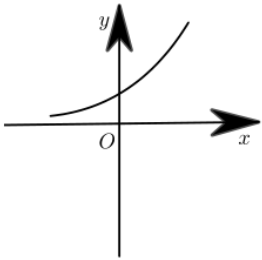
则函数 $y = |\lg(x+1)|$ 在定义域上不单调，A 错误；

对于 B， $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 的图象如下图所示：



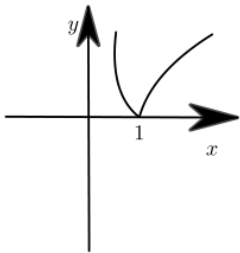
则 $y = \sqrt{x}$ 在定义域上单调递增，且值域为 $[0, +\infty)$ ， B 正确；

对于 C ， $y = 2^x$ 的图象如下图所示：



则函数 $y = 2^x$ 单调递增，但值域为 $(0, +\infty)$ ， C 错误；

对于 D ， $y = \ln|x|$ 的图象如下图所示：



则函数 $y = \ln|x|$ 在定义域上不单调， D 错误.

故选： B .

【点睛】

本题考查函数单调性和值域的判断问题，属于基础题.

3. D

【解析】

利用复数代数形式的乘除运算化简，再由实部为 0 求得 a 值.

【详解】

解： $Q(2a+i)(1+i) = (2a-1) + (2a+1)i$ 在复平面内所对应的点在虚轴上，

$\therefore 2a-1=0$ ，即 $a = \frac{1}{2}$.

故选 D .

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的代数表示法及其几何意义，是基础题.

4. A

【解析】

直接利用诱导公式化简求解即可.

【详解】

$$\tan 570^\circ = \tan (360^\circ + 210^\circ) = \tan 210^\circ = \tan (180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查三角函数的恒等变换及化简求值，主要考查诱导公式的应用，属于基础题.

5. C

【解析】

试题分析: 由题意知, 当 $x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 时, 由 $f(x) = x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$, 当且仅当 $x = \frac{4}{x}$ 时, 即 $x = 2$ 等号是成立,

所以函数 $f(x)$ 的最小值为 4, 当 $x_2 \in [2, 3]$ 时, $g(x) = 2^x + a$ 为单调递增函数, 所以 $g(x)_{\min} = g(2) = a + 4$, 又因

为 $\forall x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 3\right], \exists x_2 \in [2, 3]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 即 $f(x)$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 的最小值不小于 $g(x)$ 在 $x \in [2, 3]$ 上的最小

值, 即 $a + 4 \leq 4$, 解得 $a \leq 0$, 故选 C.

考点: 函数的综合问题.

【方法点睛】 本题主要考查了函数的综合问题, 其中解答中涉及到基本不等式求最值、函数的单调性及其应用、全称命题与存在命题的应用等知识点的综合考查, 试题思维量大, 属于中档试题, 着重考查了学生分析问题和解决问题的能力, 以及转化与化归思想的应用, 其中解答中转化为 $f(x)$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 的最小值不小于 $g(x)$ 在 $x \in [2, 3]$ 上的最小

值是解答的关键.

6. C

【解析】

求出函数定义域, 在定义域内确定函数的单调性, 利用单调性解不等式.

【详解】

由 $\frac{1+x}{1-x} > 0$ 得 $-1 < x < 1$,

在 $x \in (-1, 1)$ 时, $y = x^3$ 是增函数, $y = \sin x$ 是增函数, $y = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(-1 + \frac{2}{1-x})$ 是增函数, $\therefore$

$f(x) = x^3 + \sin x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 是增函数,

$\therefore$ 由 $f(2a-1) > f(0)$ 得 $0 < 2a-1 < 1$, 解得 $\frac{1}{2} < a < 1$.

故选: C.

【点睛】

本题考查函数的单调性, 考查解函数不等式, 解题关键是确定函数的单调性, 解题时可先确定函数定义域, 在定义域内求解.

7. D

【解析】

过点 C 作 $Cy \parallel AB$, 以 C 为原点, CA 为 x 轴, Cy 为 y 轴, CC_1 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 利用向量法求解二面角的余弦值得答案.

【详解】

解: 因为 $AB = AC = 1$, $BC = AA_1 = \sqrt{2}$, 所以 $AB^2 + AC^2 = BC^2$, 即 $AB \perp AC$

过点 C 作 $Cy \parallel AB$, 以 C 为原点, CA 为 x 轴, Cy 为 y 轴, CC_1 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $F(1, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3})$, $O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $E(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $B_1(1, 1, \sqrt{2})$,

$\overrightarrow{OB_1} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{OE} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$,

$\overrightarrow{OF} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$, $\overrightarrow{EB_1} = (1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\overrightarrow{EF} = (1, 0, \frac{\sqrt{2}}{6})$,

设平面 OB_1E 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \sqrt{2}z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{OE} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \end{cases}, \text{取 } x = 1, \text{ 得 } \vec{m} = (1, -1, 0),$$

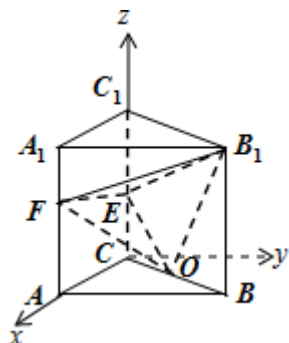
同理可求平面 OB_1F 的法向量 $\vec{n} = (-5\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3)$,

平面 OEF 的法向量 $\vec{p} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}, 3)$, 平面 EFB_1 的法向量 $\vec{q} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, 3)$.

$$\therefore \cos \alpha = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{4\sqrt{61}}{61}, \quad \cos \beta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{p}|}{|\vec{m}| |\vec{p}|} = \frac{4\sqrt{34}}{34}, \quad \cos \gamma = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{q}|}{|\vec{m}| |\vec{q}|} = \frac{\sqrt{46}}{46}.$$

$$\therefore \gamma > \alpha > \beta.$$

故选：D.



【点睛】

本题考查二面角的大小的判断，考查空间中中线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，属于中档题.

8. B

【解析】

$$\text{设 } \vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}, \text{ 则 } \vec{AP} = x\vec{AB} + 2y\vec{AD}, \quad \vec{AP} = \frac{3x}{2}\vec{AE} + y\vec{AC},$$

由 B, P, D 三点共线, C, P, E 三点共线, 可知 $x + 2y = 1$, $\frac{3x}{2} + y = 1$, 解得 x, y 即可得出结果.

【详解】

$$\text{设 } \vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}, \text{ 则 } \vec{AP} = x\vec{AB} + 2y\vec{AD}, \quad \vec{AP} = \frac{3x}{2}\vec{AE} + y\vec{AC},$$

因为 B, P, D 三点共线, C, P, E 三点共线,

$$\text{所以 } x + 2y = 1, \quad \frac{3x}{2} + y = 1, \text{ 所以 } x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{4}.$$

故选:B.

【点睛】

本题考查了平面向量基本定理和向量共线定理的简单应用,属于基础题.

9. A

【解析】

由余弦公式的二倍角可得, $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = 1 - 2\sin^2(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) = \frac{7}{9}$, 再由诱导公式有

$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha, \text{ 所以 } \sin \alpha = -\frac{7}{9}$$

【详解】

$$\therefore \sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/687144024056006164>