

湖南省岳阳县第一中学 2024 届高三下学期联合考试数学试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 记 $f_1(x) = f'(x)$, $f_2(x) = f'_1(x)$, $\dots$, $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}^*$). 若

$$f(x) = x \sin x, \text{ 则 } f_{2019}(x) + f_{2021}(x) = (\quad)$$

- A. $-2 \cos x$ B. $-2 \sin x$ C. $2 \cos x$ D. $2 \sin x$

2. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 满足 $(1-x) \cdot f(x) + x \cdot f'(x) > 0$, 若 $y = f(x+2) - e^3$ 是奇函数, 则不等式

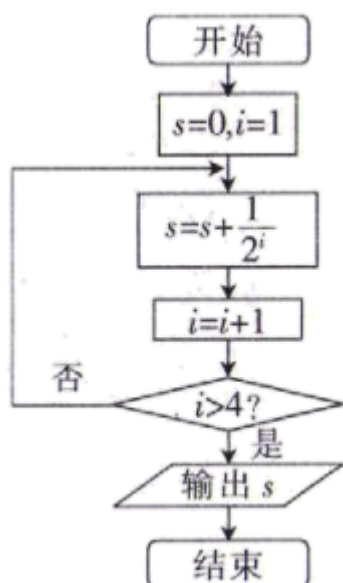
$$x \cdot f(x) - 2e^{x+1} < 0 \text{ 的解集是 } (\quad)$$

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

3. 复数 $z = (a^2 - 1) + (a - 1)i$ ($a \in \mathbb{R}$) 为纯虚数, 则 $z = (\quad)$

- A. i B. $-2i$ C. $2i$ D. $-i$

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的结果为 ()



- A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{15}{8}$ C. $\frac{31}{16}$ D. $\frac{15}{16}$

5. 已知 m, n 是两条不重合的直线, α, β 是两个不重合的平面, 则下列命题中错误的是 ()

A. 若 $m \parallel \alpha, \alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel \beta$ 或 $m \subset \beta$

B. 若 $m \parallel n, m \parallel \alpha, n \not\subset \alpha$, 则 $n \parallel \alpha$

C. 若 $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

D. 若 $m \perp n, m \perp \alpha$, 则 $n \parallel \alpha$

6. 设实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - y + 3 \geq 0 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$ 则 $x + y + 1$ 的最大值为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

7. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $y = f(x-1)$ 的图象关于 $x=1$ 对称, 若实数 a 满足

$f\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right) < f(-2)$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ B. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ C. $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ D. $(4, +\infty)$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x, & x > 0 \\ a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f[f(x)] = 0$ 有且只有一个实数根, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x)$, 当 $x \in [-3, -2]$ 时, $f(x) = -x-2$, 则 ()

A. $f\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) > f\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)$ B. $f(\sin 3) < f(\cos 3)$

C. $f\left(\sin \frac{4\pi}{3}\right) < f\left(\cos \frac{4\pi}{3}\right)$ D. $f(2020) > f(2019)$

10. 已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = (2m+3)x + n$, 若 $\forall x \in (0, +\infty)$ 总有 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立. 记 $(2m+3)n$ 的最小值为 $F(m, n)$, 则 $F(m, n)$ 的最大值为 ()

A. 1 B. $\frac{1}{e}$ C. $\frac{1}{e^2}$ D. $\frac{1}{e^3}$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 点 $P(x_0, y_0)$ 是直线 $bx - ay + 4a = 0$ 上任意一点, 若圆

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点，则双曲线的离心率取值范围是 ()。

- A. $(1,2]$ B. $(1,4]$ C. $[2,+\infty)$ D. $[4,+\infty)$

12. i 是虚数单位，复数 $z=1-i$ 在复平面上对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线经过点 $(1,2)$ ，则该双曲线的离心率为_____。

14. 已知直角坐标系中起点为坐标原点的向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ， $\vec{c}=(m,1-m)$ ， $\vec{d}=(n,1-n)$ ，存在 $\vec{a}, \vec{b}$ ，对于任意的实数 m, n ，不等式 $|\vec{a}-\vec{c}|+|\vec{b}-\vec{d}| \geq T$ ，则实数 T 的取值范围是_____。

15. $(3x^2-2x-1)^5$ 的展开式中， x^2 的系数是_____。(用数字填写答案)

16. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ ，对于任意 x 都有 $f(\frac{\pi}{6}+x)=f(\frac{\pi}{6}-x)$ ，则 $f(\frac{\pi}{6})$ 的值为_____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F ，直线 l 交 C 于 A, B 两点 (异于坐标原点 O)。

(1) 若直线 l 过点 F ， $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -12$ ，求 C 的方程；

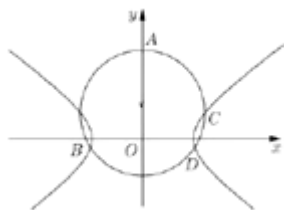
(2) 当 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ 时，判断直线 l 是否过定点，若过定点，求出定点坐标；若不过定点，说明理由。

18. (12 分) 已知圆 $O_1: (x+1)^2+y^2=8$ 上有一动点 Q ，点 O_2 的坐标为 $(1,0)$ ，四边形 QO_1O_2R 为平行四边形，线段 O_1R 的垂直平分线交 O_2R 于点 P 。

(I) 求点 P 的轨迹 C 的方程；

(II) 过点 O_2 作直线与曲线 C 交于 A, B 两点，点 K 的坐标为 $(2,1)$ ，直线 KA, KB 与 y 轴分别交于 M, N 两点，求证：线段 MN 的中点为定点，并求出 $\triangle KMN$ 面积的最大值。

19. (12 分) 如图，已知圆 $\Gamma_1: x^2+\left(y-\frac{r}{2}\right)^2=r^2(r>0)$ 和双曲线 $\Gamma_2: x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ ，记 Γ_1 与 y 轴正半轴、 x 轴负半轴的公共点分别为 A, B ，又记 Γ_1 与 Γ_2 在第一、第四象限的公共点分别为 C, D 。



(1) 若 $r=2$ ，且 B 恰为 Γ_2 的左焦点，求 Γ_2 的两条渐近线的方程；

(2) 若 $r = 2$ ，且 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (m, -5)$ ，求实数 m 的值；

(3) 若 B 恰为 Γ_2 的左焦点，求证：在 x 轴上不存在这样的点 P ，使得 $|PA| - |PC| = 2.019$ 。

20. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$
，以坐标原点 O 为极点，以 x 轴正

半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos\theta$ 。

(1) 写出直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

(2) 设直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点， $\triangle PAB$ 的顶点 P 也在曲线 C 上运动，求 $\triangle PAB$ 面积的最大值。

21. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(1, \frac{3}{2})$ 且椭圆的左、右焦点与短轴的端点构成的四边形的面积为 $2\sqrt{3}$ 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 设 A 是椭圆的左顶点，过右焦点 F 的直线 l_1 ，与椭圆交于 P, Q ，直线 AP, AQ 与直线 $l_2: x = 4$ 交于 M, N ，线段 MN 的中点为 E 。

①求证： $EF \perp PQ$ ；

②记 $\triangle VPQE, \triangle PME, \triangle VONE$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 ，求证： $\frac{S_1}{S_2 + S_3}$ 为定值。

22. (10 分) 设数阵 $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ，其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \{1, 2, \dots, 6\}$ 。设 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_l\} \subseteq \{1, 2, \dots, 6\}$ ，

其中 $e_1 < e_2 < \dots < e_l, l \in \mathbb{N}^*$ 且 $l \leq 6$ 。定义变换 φ_k 为“对于数阵的每一行，若其中有 k 或 $-k$ ，则将这一行中每个数都乘以 -1 ；若其中没有 k 且没有 $-k$ ，则这一行中所有数均保持不变” ($k = e_1, e_2, \dots, e_l$)。 $\varphi_S(A_0)$ 表示“将 A_0 经过 φ_{e_1} 变换得到 A_1 ，再将 A_1 经过 φ_{e_2} 变换得到 $A_2, \dots$ ，以此类推，最后将 A_{l-1} 经过 φ_{e_l} 变换得到 A_l ”，记数阵 A_l 中四个数的和为 $T_S(A_0)$ 。

(1) 若 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ，写出 A_0 经过 φ_2 变换后得到的数阵 A_1 ；

(2) 若 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ， $S = \{1, 3\}$ ，求 $T_S(A_0)$ 的值；

(3) 对任意确定的一个数阵 A_0 ，证明： $T_S(A_0)$ 的所有可能取值的和不超过 -4 。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

通过计算 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)$ ，可得 $f_{4k-3}(x), f_{4k-2}(x), f_{4k-1}(x), f_{4k}(x)$ ，最后计算可得结果。

【详解】

由题可知： $f(x) = x \sin x$

所以 $f_1(x) = \sin x + x \cos x, f_2(x) = 2 \cos x - x \sin x$

$f_3(x) = -3 \sin x - x \cos x, f_4(x) = -4 \cos x + x \sin x$

$f_5(x) = 5 \sin x + x \cos x, \dots$

所以猜想可知： $f_{4k-3}(x) = (4k-3) \sin x + x \cos x$

$f_{4k-2}(x) = (4k-2) \cos x - x \sin x$

$f_{4k-1}(x) = -(4k-1) \sin x - x \cos x$

$f_{4k}(x) = -4k \cos x + x \sin x$

由 $2019 = 4 \times 505 - 1, 2021 = 4 \times 506 - 3$

所以 $f_{2019}(x) = -2019 \sin x - x \cos x$

$f_{2021}(x) = 2021 \sin x + x \cos x$

所以 $f_{2019}(x) + f_{2021}(x) = 2 \sin x$

故选：D

【点睛】

本题考查导数的计算以及不完全归纳法的应用，选择题、填空题可以使用取特殊值，归纳猜想等方法的使用，属中档题。

2、A

【解析】

构造函数 $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{e^x}$ ，根据已知条件判断出 $g(x)$ 的单调性. 根据 $y = f(x+2) - e^3$ 是奇函数，求得 $f(2)$ 的值，

由此化简不等式 $x \cdot f(x) - 2e^{x+1} < 0$ 求得不等式的解集.

【详解】

构造函数 $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{e^x}$ ，依题意可知 $g'(x) = \frac{(1-x) \cdot f(x) + x \cdot f'(x)}{e^x} > 0$ ，所以 $g(x)$ 在 R 上递增. 由于

$y = f(x+2) - e^3$ 是奇函数，所以当 $x=0$ 时， $y = f(2) - e^3 = 0$ ，所以 $f(2) = e^3$ ，所以 $g(2) = \frac{2 \times e^3}{e^2} = 2e$.

由 $x \cdot f(x) - 2e^{x+1} < 0$ 得 $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{e^x} < 2e = g(2)$ ，所以 $x < 2$ ，故不等式的解集为 $(-\infty, 2)$.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查构造函数法解不等式，考查利用导数研究函数的单调性，考查化归与转化的数学思想方法，属于中档题.

3、B

【解析】

复数 $z = (a^2 - 1) + (a - 1)i$ ($a \in R$) 为纯虚数，则实部为 0，虚部不为 0，求出 a ，即得 z .

【详解】

$\because z = (a^2 - 1) + (a - 1)i$ ($a \in R$) 为纯虚数，

$$\therefore \begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ a - 1 \neq 0 \end{cases}, \text{解得 } a = -1.$$

$$\therefore z = -2i.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查复数的分类，属于基础题.

4、D

【解析】

由程序框图确定程序功能后可得出结论.

【详解】

执行该程序可得 $S = 0 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查程序框图. 解题可模拟程序运行, 观察变量值的变化, 然后可得结论, 也可以由程序框图确定程序功能, 然后求解.

5、D

【解析】

根据线面平行和面面平行的性质, 可判定 A; 由线面平行的判定定理, 可判断 B; C 中可判断 α, β 所成的二面角为 90° ; D 中有可能 $n \subset \alpha$, 即得解.

【详解】

选项 A: 若 $m \parallel \alpha, \alpha \parallel \beta$, 根据线面平行和面面平行的性质, 有 $m \parallel \beta$ 或 $m \subset \beta$, 故 A 正确;

选项 B: 若 $m \parallel n, m \parallel \alpha, n \not\subset \alpha$, 由线面平行的判定定理, 有 $n \parallel \alpha$, 故 B 正确;

选项 C: 若 $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 故 α, β 所成的二面角为 90° , 则 $\alpha \perp \beta$, 故 C 正确;

选项 D, 若 $m \perp n, m \perp \alpha$, 有可能 $n \subset \alpha$, 故 D 不正确.

故选：D

【点睛】

本题考查了空间中的平行垂直关系判断, 考查了学生逻辑推理, 空间想象能力, 属于中档题.

6、C

【解析】

画出可行域和目标函数, 根据目标函数的几何意义平移得到答案.

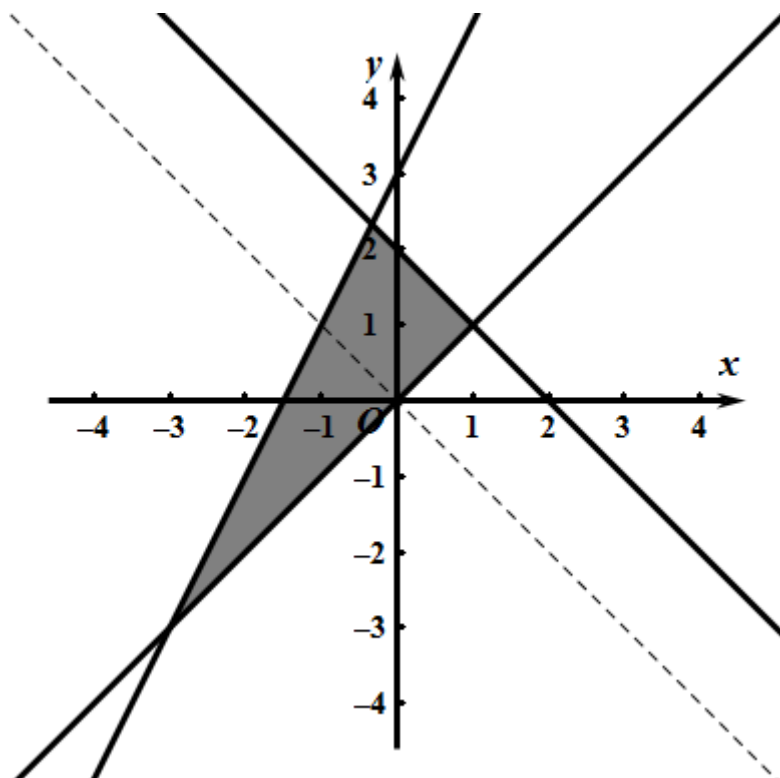
【详解】

如图所示: 画出可行域和目标函数,

$\square = \square + \square + 1$, 即 $\square = -\square + \square - 1$, $\square$ 表示直线在 $\square$ 轴的截距加上 1,

根据图像知, 当 $\square + \square = 2$ 时, 且 $\square \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ 时, $\square = \square + \square + 1$ 有最大值为 3.

故选：C.



【点睛】

本题考查了线性规划问题，画出图像是解题的关键.

7、C

【解析】

根据题意，由函数的图象变换分析可得函数 $y = f(x)$ 为偶函数，又由函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，分

析可得 $f\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right) < f(-2) \Rightarrow f(|\log_2 a|) < f(2) \Rightarrow |\log_2 a| < 2$ ，解可得 a 的取值范围，即可得答案.

【详解】

将函数 $y = f(x-1)$ 的图象向左平移1个单位长度可得函数 $y = f(x)$ 的图象，

由于函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则函数 $y = f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，

即函数 $y = f(x)$ 为偶函数，由 $f\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right) < f(-2)$ ，得 $f(|\log_2 a|) < f(2)$ ，

Q 函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，则 $|\log_2 a| < 2$ ，得 $-2 < \log_2 a < 2$ ，解得 $\frac{1}{4} < a < 4$.

因此，实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$.

故选：C.

【点睛】

本题考查利用函数的单调性与奇偶性解不等式，注意分析函数 $y = f(x)$ 的奇偶性，属于中等题。

8、B

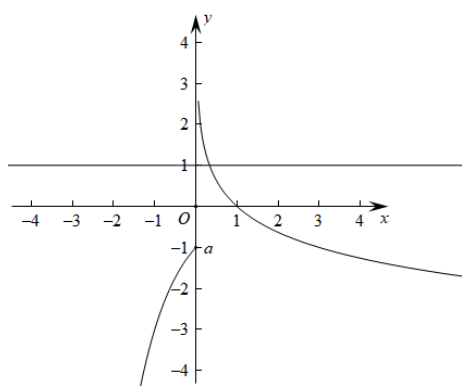
【解析】

利用换元法设 $t = f(x)$ ，则等价于 $f(t) = 0$ 有且只有一个实数根，分 $a < 0, a = 0, a > 0$ 三种情况进行讨论，结合函数的图象，求出 a 的取值范围。

【详解】

解：设 $t = f(x)$ ，则 $f(t) = 0$ 有且只有一个实数根。

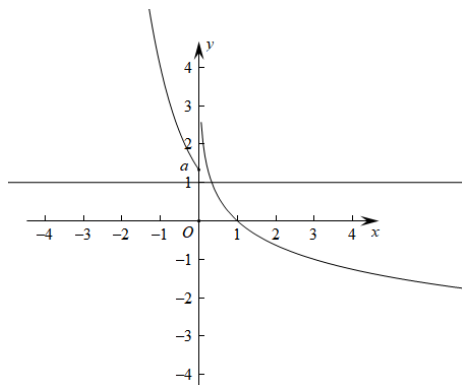
当 $a < 0$ 时，当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$ ，由 $f(t) = 0$ 即 $\log_{\frac{1}{3}} t = 0$ ，解得 $t = 1$ ，



结合图象可知，此时当 $t = 1$ 时，得 $f(x) = 1$ ，则 $x = \frac{1}{3}$ 是唯一解，满足题意；

当 $a = 0$ 时，此时当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$ ，此时函数有无数个零点，不符合题意；

当 $a > 0$ 时，当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \in [a, +\infty)$ ，此时 $f(x)$ 最小值为 a ，



结合图象可知，要使得关于 x 的方程 $f[f(x)] = 0$ 有且只有一个实数根，此时 $a > 1$ 。

综上所述： $a < 0$ 或 $a > 1$ 。

故选:A.

【点睛】

本题考查了函数方程根的个数的应用.利用换元法,数形结合是解决本题的关键.

9、B

【解析】

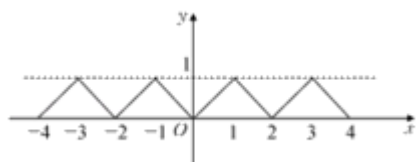
根据函数的周期性以及 $x \in [-3, -2]$ 的解析式,可作出函数 $f(x)$ 在定义域上的图象,由此结合选项判断即可.

【详解】

由 $f(x+2) = f(x)$, 得 $f(x)$ 是周期函数且周期为 2,

先作出 $f(x)$ 在 $x \in [-3, -2]$ 时的图象,然后根据周期为 2 依次平移,

并结合 $f(x)$ 是偶函数作出 $f(x)$ 在 R 上的图象如下,



选项 A, $0 < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} < 1$,

所以 $f\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) < f\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)$, 选项 A 错误;

选项 B, 因为 $\frac{3\pi}{4} < 3 < \pi$, 所以 $0 < \sin 3 < \frac{\sqrt{2}}{2} < -\cos 3 < 1$,

所以 $f(\sin 3) < f(-\cos 3)$, 即 $f(\sin 3) < f(\cos 3)$, 选项 B 正确;

选项 C, $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}, 1 > -\sin \frac{4\pi}{3} > -\cos \frac{4\pi}{3} > 0$,

所以 $f\left(-\sin \frac{4\pi}{3}\right) > f\left(-\cos \frac{4\pi}{3}\right)$, 即 $f\left(\sin \frac{4\pi}{3}\right) > f\left(\cos \frac{4\pi}{3}\right)$,

选项 C 错误;

选项 D, $f(2020) = f(0) < f(1) = f(2019)$, 选项 D 错误.

故选: B.

【点睛】

本题考查函数性质的综合运用,考查函数值的大小比较,考查数形结合思想,属于中档题.

10、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/688014060027006062>