

第一章 函數、極限、連續

第1节 函數

- a) 反函數和原函數關於 $y=x$ 對稱。
- b) 只有定義域關於原點對稱的函數才能討論奇偶性。
- c) 多個奇函數之和為奇函數；多個偶函數之和為偶函數。
- d) $2k$ 個奇函數的乘積是偶函數； $2k+1$ 個奇函數的乘積是奇函數；任意個偶函數的乘積還是偶函數。 $(k=0,1,2,\dots)$ 。
- e) 如果 $f(x)$ 是周期函數，周期為 T ，則 $f(ax+b)$ 也是周期函數，周期為 $|T/a|$ 。
- f) 基本初等函數包括：冪函數、指數函數、對數函數、三角函數、反三角函數。初等函數即上述五大類函數，以及它們有限次的四則運算與複合而成的函數。
- g) 一切初等函數在其定義域內都是連續的。

第2节 極限

- a) 左右極限存在且相等 $\Leftrightarrow$ 極限存在。
- b) 如果函數在 x_0 極限為 A ，則可以將函數改寫為 $f(x)=A+\alpha(x)$ ，其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ 。
(等價無窮小)
- c) 極限存在 $\Leftrightarrow$ 極限唯一。(極限唯一性)
- d) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，且 $A > 0$ ，則在 x 的鄰域內， $f(x) > 0$ 。(保號性)
- e) 函數 $f(x)$ 在點 $x=x_0$ 存在極限，則存在該點的一個去心鄰域 U ，在 U 內 $f(x)$ 有界。(有界性)
- f) 當 $\lim f(x)=A$ ， $\lim g(x)=B$ ，那麼

$$\lim(f(x)+g(x))=\lim f(x)+\lim g(x)=A+B$$

$$\lim(f(x)-g(x))=\lim f(x)-\lim g(x)=A-B$$

$$\lim(f(x)*g(x))=\lim f(x)*\lim g(x)=A*B$$

$$\lim(f(x)/g(x))=\lim f(x)/\lim g(x)=A/B \quad \lim g(x) \text{ 不等於 } 0$$

$$\lim(f(x))^n=(\lim f(x))^n=A^n$$

$$\lim(f(x)^{g(x)})=A^b$$

(極限の四則運算)

- g) **有限個無窮小之和仍然是無窮小。有限個無窮小之積仍然是無窮小。無窮小和有界量乘積仍然是無窮小。**

h) $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=l$

i. $l=0$, $f(x)=o(g(x))$.

ii. $l=\infty$, $f(x)$ 是 $g(x)$ 低階.

iii. $0<l<\infty$ 或 $-\infty<l<0$, $l\neq 1$, 同階.

iv. $l=1$, 等價無窮小, 記作 $f(x) \sim g(x)$.

特別の, 如果 $\lim \frac{f(x)}{[g(x)]^k}=l (l\neq 0)$, 則稱 $f(x)$ 是 $g(x)$ の k 階無窮小。

- i) 等價無窮小代換:

$$x \rightarrow 0 \text{ 時, } x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \Rightarrow 1 - \cos^a x \sim \frac{a}{2} x^2$$

$$\sqrt[1+x]{1} - 1 \sim \frac{1}{2} x \Rightarrow (1+x)^a - 1 \sim a x$$

$$\tan x - x \sim \frac{1}{3} x^3$$

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6} x^3$$

特殊の, $x \rightarrow 0$ 時 $a^x - 1 \sim x \ln a$

- j) **只有因子才能進行等價無窮小の代換。**

- k) 要注重推廣形式。例如【 $x \rightarrow 0$ 時, $x \sim \sin x$ 】, 如果當 $x \rightarrow x^0$ 時, $f(x) \rightarrow 0$, 那麼將原式中 x 換成 $f(x)$ 也成立。

- l) 求極限の方法:

i. 利用函數の連續性(極限值等於函數值)。利用極限の四則運算性質。

ii. 抓頭公式(處理多項式比值的極限)。

1. 抓小頭公式。(x→0)
2. 抓大頭公式。(x→∞) (分子分母同除最高次項) (極限為【最高次項的係數比】)

iii. 兩個准則:

1. 夾逼准則
2. 單調有界必有極限

iv. 兩個重要極限:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (利用單位圓和夾逼准則進行證明)
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ (利用單調有界准則進行證明)

口訣: 倒倒抄。(結合抓頭公式)

v. 無窮小的運算性質、等價無窮小的代換

1. 有限個無窮小之和為無窮小。有限個無窮小之積為無窮小。無窮小與有界量乘積為無窮小。
2. 12 種等價無窮小的代換。

vi. 左右極限: 求分段函數分段點的極限值。

vii. 利用導數的定義求極限。導數定義: 增量比, 取極限。構造出“增量比”的形式, 則極限就是導數。

viii. 定積分的定義求極限。(處理多項求和的形式)

ix. 泰勒公式

1. 泰勒公式中係數表達式: $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$
2. 當 $x_0=0$ 的時候, 泰勒公式則稱為麥克勞林公式。

常用的麥克勞林公式:

$$e^x \quad \sin x \quad \cos x \quad \ln(x+1) \quad (1+x)^m$$

x. 洛必達法則

使用前提：（1）分子分母都趨向於 0。（2）分子分母の極限都存在。（3）
分子分母導數の比值為一個定值或為無窮。

第一層次

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

第二層次

$0 \cdot \infty$ ：轉換成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$

$\infty - \infty$ ：通分化為 $\frac{0}{0}$ （常用換元の方法求解）

第三層次

$$1^{\infty} \qquad \infty^0 \qquad 0^0$$

使用 $e^{\ln}$ 進行轉化。

第3节 連續與間斷

a) 連續

某點：極限值=函數值 $\Leftrightarrow$ 函數在該點連續

開區間：在該區間中每個點都是連續の，則在開區間連續。

閉區間：開區間連續切在端點連續

b) 間斷

第一類間斷點（左右極限都存在）

可去間斷點：左右極限相等

跳躍間斷點：左右極限不相等

第二類間斷點（左右極限至少有一個不存在）

無窮間斷點：因趨於無窮而造成の不存在。

振蕩間斷點：因振蕩而不存在。

c) 初等函數の連續性

i. 基本初等函數在相應の定義域內連續。

ii. 區間 I 上の連續函數做四則運算形成の新函數在 I 上仍然是連續函數。

- iii. 連續函數經過有限次的複合仍為連續函數。
 - iv. 原函數連續且單調，反函數必為連續且單調。
 - v. 一切初等函數在相應定義區間內連續。
- d) 閉區間連續函數の性質

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 連續，則：

- 1. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界。
- 2. 有最大最小值
- 3. 介值定理
- 4. 零點定理： $f(a) \cdot f(b) < 0$ ， a 、 b 之間必有零點。

第二章 一元函數微分學

第1节 導數與微分

1 導數

- a) 導數定義：增量比，取極限。
- b) 左導數和右導數存在且相等 $\Leftrightarrow$ 導數存在
- c) 函數在某點的導數值即函數在該點的切線の斜率。
- d) 導數の物理意義：對路程函數中の t 求導為瞬時速度.etc
- e) 導數の經濟意義：邊際成本、邊際收益、邊際利潤。
- f) 函數の相對變化率（彈性）： $\frac{x}{y} * y'(x)$
- g) 可導與連續的關係：可導必連續，連續不一定可導。
- h) 偶函數の導數是奇函數。

2 微分

微分定義：自變量 Δx 沿著切線方向の增量 Δy 。

3 求導法則

- a) 導數微分表（4 組 16 個）。
- b) 導數的四則運算。
- c) 反函數的導數：原函數導數的倒數。
- d) 複合函數求導法則。
- e) 參數方程求導： $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$
- f) 隱函數求導：左右兩側同時求導，y 當作 x の函數處理。
- g) 對數求導法
 - i. 冪指函數：先將等式兩邊同時化為 $\ln$ の真數，再運用隱函數求導法則。
 - ii. 連乘函數：先將等式兩邊同事化為 $\ln$ の真數，變成連加，再運用隱函數求導法則。

4 高階導數

- a) 萊布尼茨公式： $[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$
- b) 反函數的二階導數： $-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$
- c) 參數方程的二階導數： $\frac{y''x' - y'x''}{(x')^3}$

第2节 微分中值定理

1 羅爾中值定理

條件：（1） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續。（2） $f(x)$ 在 (a,b) 可導。（3） $f(a)=f(b)$ 。

結論：在 a 和 b 之間必有一個值 ξ 使得 $f'(\xi)=0$ 。

幾何意義：在該條件下の函數，必可在在其區間內找到一點使得切線斜率為 0。

引申——費馬引理

$y=f(x)$ ，若 x_0 為 $y=f(x)$ の極值點，則 $f'(x_0)=0$ 。

2 拉格朗日中值定理

條件：（1） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續。（2） $f(x)$ 在 (a,b) 可導。

結論：在 a 和 b 之間必有一個值 ξ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 。

幾何意義 在該條件下の函數，必可在其區間內找到一點使得切線斜率與端點連線斜率相等。

拉格朗日中值定理是羅爾中值定理の推廣。

證明：使用曲線減去兩端點連線得出一個函數，再對該函數應用羅爾中值定理。

使用該定理の信號：要求證の式子中有一個端點處函數值之差。

3 柯西中值定理

條件：（1） $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 連續。（2） $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 (a,b) 可導。且 $g'(x)\neq 0$

結論：在 a 和 b 之間必有一個值 ξ 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 。

柯西中值定理是拉格朗日中值定理推廣。

證明 使用參數方程，將 $f(x)$ 和 $g(x)$ 作為參數表示。證明過程與拉格朗日中值定理相同。

使用該定理の信號：要求證の式子中有兩個端點處函數值之差。

4 泰勒中值定理

泰勒中值定理即帶有拉格朗日餘項の泰勒公式。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

拉格朗日中值定理是帶有拉格朗日餘項の泰勒中值定理の特例。

使用該定理の信號：高階導數。

使用方法：（1）確認 n の取值，一般根據高階導數の階數選取。（2）確認 x_0 の取值，一般選取題中已知導數值の點。（3）確認 x の取值，一般為題中所給已知値の點或端點和極值點。

第3节 微分學の應用

1 單調性、極值

單調性：

$f'(x)>0$ の區間， $f(x)$ 單調增の區間； $f'(x)<0$ の區間， $f(x)$ 單調減の區間。

極值：

極值點和導數為零の點沒有充要條件關係。

可導函數の極值點，對應の導數值為 0。（費馬引理）

駐點（導數為 0 の點）不一定是極值點。

第一判定法：若在 x_0 の鄰域內， x_0 左右導數異號，則 x_0 是一個極值點。

第二判定法： x_0 為駐點，且在 x_0 處， $f(x)$ の二階導數存在。通過二階導數の符號進行判定。

2 最值（閉區間）

最值可能出現在（1）極值點（2）區間端點。

3 凹凸、拐點

凹凸：

視覺定位：俯視

凹函數： $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 凸函數： $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

凹函數： $f''(x)>0$ 凸函數： $f''(x)<0$

拐點：可能出現在 $f''(x)=0$ 或 $f''(x)$ 不存在の點，但不一定是。

4 漸近線

水平漸近線：當 $f(x)$ 趨向於 ∞ 時，極限存在，則該極限為水平漸近線。

鉛直漸近線：當 $f(x)$ 趨向於 x_0 時，極限趨向於 ∞ ，則 x_0 為該函數の鉛直漸近線。

斜漸近線：當 $f(x)$ 趨向於 ∞ 時， $f(x)-(kx+b)=0$ ，則 $(kx+b)$ 為該函數的斜漸近線。其中， $k=\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ， $b=\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$ 。

5 函數圖像の描繪

利用極值點、拐點、與坐標軸交點、單調性、凹凸性、漸近線進行描繪。

6 曲率

弧微分： $ds=\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$

曲率即：角度在單位弧長の變化。

曲率： $K=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\alpha/dx}{ds/dx}=\frac{|y''|}{[(1+(y')^2)]^{3/2}}$

曲率半徑： $\rho=\frac{1}{K}$

曲率圓：從弧上某點出發，向凹側沿法線方向移動の即得到曲率圓の圓心。

第三章 一元函數積分學

第1节 不定積分

(一) 定義

1. $F'(x)=f(x)$ ，稱 $F(x)$ 為 $f(x)$ の原函數。 $[F(x)+C]'=f(x)$ ，稱 $F(x)+C$ 為 $f(x)$ の原函數組。2. $\int f(x)dx = F(x) + C$ 為 $f(x)$ の不定積分。

(二) 性質

$$1. \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

$$2. \int [f(x)dx]' = [F(x) + C]' = f(x)$$

$$3. \int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$4. \int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

(三) 基本幾分公式

24 個公式=13（基本導數表）+11（常用公式）

(四) 積分方法

1. 湊微分法（第一換元法）

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C$$

有 13 個常用公式。

2. 換元法（第二換元法）

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt = F(t) + C = F[\varphi^{-1}(x)] + C$$

$\varphi(t)$ 可導且存在反函數。（根式換元、三角換元、倒代換）

3. 分部積分法

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$$

口訣：反對幂指三，誰先出現誰留下。

第2节 定積分

(一) 定義：分割，近似，求和，取極限。

幾何意義：曲線與 x 軸所圍面積的代數和。

(二) 性質：

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$4. \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$6. \text{ 若 } f(x) \geq 0, x \in [a, b], \text{ 則 } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$7. \text{ 若 } f(x) \geq g(x), x \in [a, b], \text{ 則 } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

$$8. m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b], \text{ 則 } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/688024022053006073>