

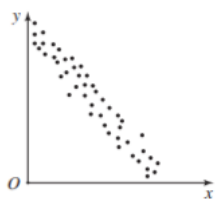
2024 届炎德英才大联考高三第一次联考（数学试题理）试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 为研究某咖啡店每日的热咖啡销售量 y 和气温 x 之间是否具有线性相关关系，统计该店 2017 年每周六的销售量及当天气温得到如图所示的散点图（ x 轴表示气温， y 轴表示销售量），由散点图可知 y 与 x 的相关关系为（ ）



- A. 正相关，相关系数 r 的值为 0.85
B. 负相关，相关系数 r 的值为 0.85
C. 负相关，相关系数 r 的值为 -0.85
D. 正相关，相关系数 r 的值为 -0.85
2. 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F ，且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M (M 在 x 轴的上方)， l 为 C 的准线，点 N 在 l 上且 $MN \perp l$ ，则 M 到直线 NF 的距离为（ ）
- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$
3. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ，准线为 l ，点 M, N 分别在抛物线 C 上，且 $\overrightarrow{MF} + 3\overrightarrow{NF} = \vec{0}$ ，直线 MN 交 l 于点 P ， $NN' \perp l$ ，垂足为 N' ，若 $\triangle MN'P$ 的面积为 $24\sqrt{3}$ ，则 F 到 l 的距离为（ ）
- A. 12 B. 10 C. 8 D. 6
4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 13 项和为 52，则 $(-2)^{a_6 + a_8} =$ （ ）
- A. 256 B. -256 C. 32 D. -32
5. 已知命题 p : 直线 $a \parallel b$ ，且 $b \subset$ 平面 α ，则 $a \parallel \alpha$ ；命题 q : 直线 $l \perp$ 平面 α ，任意直线 $m \subset \alpha$ ，则 $l \perp m$ 。下列命题为真命题的是（ ）
- A. $p \wedge q$ B. $p \vee (\text{非 } q)$ C. $(\text{非 } p) \wedge q$ D. $p \wedge (\text{非 } q)$
6. 已知 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 所对的边分别是 a ， b ，则“ $a > b$ ”是“ $A > B$ ”的（ ）
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 既不充分也不必要条件

D. 充分必要条件

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=7$, $a_4=15$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10}=(\quad)$

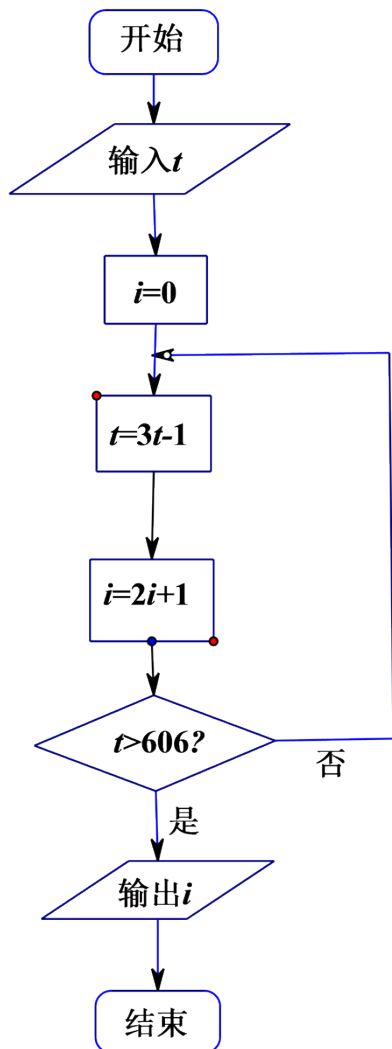
A. 100

B. 210

C. 380

D. 400

8. 执行如图所示的程序框图, 若输入的 $t=3$, 则输出的 $i=(\quad)$



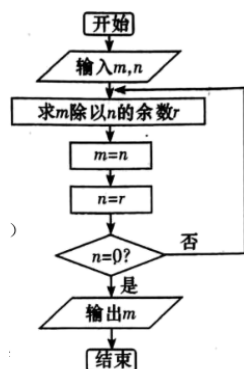
A. 9

B. 31

C. 15

D. 63

9. 执行下面的程序框图, 如果输入 $m=1995$, $n=228$, 则计算机输出的数是 $(\quad)$



- A. 58 B. 57 C. 56 D. 55

10. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 15 > 0\}$, $B = \{x | 0 < x < 7\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B$ 等于()

- A. $[-5, 7)$ B. $[-3, 7)$ C. $(-3, 7)$ D. $(-5, 7)$

11. 已知复数 z 满足 $z(1-i) = 2$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z-1 =$ ().

- A. i B. $-i$ C. $1+i$ D. $1-i$

12. 已知随机变量 X 的分布列如下表:

X	-1	0	1
P	a	b	c

其中 $a, b, c > 0$. 若 X 的方差 $D(X) \leq \frac{1}{3}$ 对所有 $a \in (0, 1-b)$ 都成立, 则 ()

- A. $b \leq \frac{1}{3}$ B. $b \leq \frac{2}{3}$ C. $b \geq \frac{1}{3}$ D. $b \geq \frac{2}{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $a = (-2, 1)$, $b = (1, m)$, 若向量 $a+b$ 与向量 a 平行, 则实数 $m =$ _____.

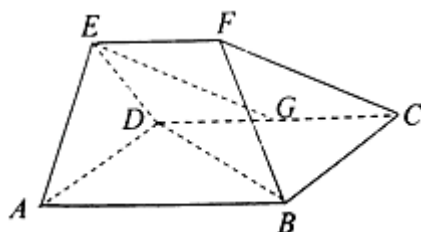
14. 若 $\tan \alpha = 2$, 则 $\frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} =$ _____.

15. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F , 过点 F 且倾斜角为 45° 的直线与双曲线 C 的两条渐近线顺次交于 A, B 两点若 $\overrightarrow{FB} = 3\overrightarrow{FA}$, 则 C 的离心率为_____.

16. 已知 $\alpha, \beta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$, $\cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{5}{13}$, 则 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在以 $ABCDEF$ 为顶点的五面体中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = AE = ED = 2EF$, $EF \parallel AB$, 点 G 为 CD 中点, 平面 $EAD \perp$ 平面 $ABCD$.



(1) 证明: $BD \perp EG$;

(2) 若三棱锥 $V_{E-FBC} = \frac{1}{2}$, 求菱形 $ABCD$ 的边长.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} - a$, $g(x) = \frac{a-1}{x} + \frac{a+|a|}{2} \cdot \frac{x}{e^{x-1}}$, ($a \in R$)

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 在定义域内有且仅有一个零点, 且此时 $f(x) \geq g(x) + m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + ax}{e^x}$, $a \in R$

(1) 若函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ ($\ln 2 < x_0 < \ln 3$) 处取得极值 1, 证明: $2 - \frac{1}{\ln 2} < a < 3 - \frac{1}{\ln 3}$

(2) 若 $f(x) \geq x - \frac{1}{e^x}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}m(x^2 - 1) - \ln x$ ($m \in R$).

(1) 若 $m = 1$, 求证: $f(x) \geq 0$.

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的极值;

(3) 是否存在实数 m , 使得不等式 $f(x) > \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{x-1}}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立? 若存在, 求出 m 的最小值; 若不存在, 请说明理由.

21. (12 分) 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴, 且在两种坐标系中取相同的长度单位, 建立极坐标系, 判断

直线 $l: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ (t 为参数) 与圆 $C: \rho^2 + 2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta = 0$ 的位置关系.

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1: \begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为

极轴且取相同的单位长度建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = -2 \sin \theta$.

(1) 求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的普通方程;

(2) 若 P, Q 分别为曲线 C_1, C_2 上的动点, 求 $|PQ|$ 的最大值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

根据正负相关的概念判断。

【详解】

由散点图知 y 随着 x 的增大而减小，因此是负相关。相关系数为负。

故选：C。

【点睛】

本题考查变量的相关关系，考查正相关和负相关的区别。掌握正负相关的定义是解题基础。

2、C

【解析】

联立方程解得 $M(3, 2\sqrt{3})$ ，根据 $MN \perp l$ 得 $|MN| = |MF| = 4$ ，得到 $\triangle MNF$ 是边长为 4 的等边三角形，计算距离得到答案。

【详解】

依题意得 $F(1,0)$ ，则直线 FM 的方程是 $y = \sqrt{3}(x-1)$ 。由 $\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = 3$ 。

由 M 在 x 轴的上方得 $M(3, 2\sqrt{3})$ ，由 $MN \perp l$ 得 $|MN| = |MF| = 3 + 1 = 4$

又 $\angle NMF$ 等于直线 FM 的倾斜角，即 $\angle NMF = 60^\circ$ ，因此 $\triangle MNF$ 是边长为 4 的等边三角形

点 M 到直线 NF 的距离为 $4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

故选：C。

【点睛】

本题考查了直线和抛物线的位置关系，意在考查学生的计算能力和转化能力。

3、D

【解析】

作 $MM' \perp l$ ，垂足为 M' ，过点 N 作 $NG \perp MM'$ ，垂足为 G ，设 $|NF| = m (m > 0)$ ，则 $|MF| = 3m$ ，结合图形可得 $|MG| = 2m$ ， $|MN| = 4m$ ，从而可求出 $\angle NMG = 60^\circ$ ，进而可求得 $|MP| = 6m$ ， $|N'P| = \sqrt{3}m$ ，由 $\triangle MN'P$ 的面积 $S_{\triangle MN'P} = \frac{1}{2} \cdot |MM'| \cdot |N'P| = 24\sqrt{3}$ 即可求出 m ，再结合 F 为线段 MP 的中点，即可求出 F 到 l 的距离。

【详解】

如图所示，

【解析】

首先判断出 p 为假命题、 q 为真命题，然后结合含有简单逻辑联结词命题的真假性，判断出正确选项.

【详解】

根据线面平行的判定，我们易得命题 p : 若直线 $a \parallel b$ ，直线 $b \subset$ 平面 α ，则直线 $a \parallel$ 平面 α 或直线 a 在平面 α 内，命题 p 为假命题；

根据线面垂直的定义，我们易得命题 q : 若直线 $l \perp$ 平面 α ，则若直线 l 与平面 α 内的任意直线都垂直，命题 q 为真命题.

故: A 命题“ $p \wedge q$ ”为假命题；B 命题“ $p \vee (\neg q)$ ”为假命题；C 命题“ $(\neg p) \wedge q$ ”为真命题；D 命题“ $p \wedge (\neg q)$ ”为假命题.

故选: C.

【点睛】

本小题主要考查线面平行与垂直有关命题真假性的判断，考查含有简单逻辑联结词的命题的真假性判断，属于基础题.

6、D

【解析】

由大边对大角定理结合充分条件和必要条件的定义判断即可.

【详解】

$\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 所对的边分别是 a 、 b ，由大边对大角定理知“ $a > b$ ” $\Rightarrow$ “ $A > B$ ”，

“ $A > B$ ” $\Rightarrow$ “ $a > b$ ”.

因此，“ $a > b$ ”是“ $A > B$ ”的充分必要条件.

故选: D.

【点睛】

本题考查充分条件、必要条件的判断，考查三角形的性质等基础知识，考查逻辑推理能力，是基础题.

7、B

【解析】

设 $\{a_n\}$ 公差为 d ，由已知可得 a_3 ，进而求出 $\{a_n\}$ 的通项公式，即可求解.

【详解】

设 $\{a_n\}$ 公差为 d ， $a_2 = 7$ ， $a_4 = 15$ ，

$$\therefore a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = 11, d = a_3 - a_2 = 4,$$

$$\therefore a_n = 4n - 1, \therefore S_{10} = \frac{10 \times (3 + 39)}{2} = 210.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查等差数列的基本量计算以及前 n 项和，属于基础题.

8、B

【解析】

根据程序框图中的循环结构的运算，直至满足条件退出循环体，即可得出结果.

【详解】

执行程序框 $t=3, i=0$ ； $t=8, i=1$ ； $t=23, i=3$ ；

$t=68, i=7$ ； $t=203, i=15$ ； $t=608, i=31$ ，

满足 $t > 606$ ，退出循环，因此输出 $i=31$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查循环结构输出结果，模拟程序运行是解题的关键，属于基础题.

9、B

【解析】

先明确该程序框图的功能是计算两个数的最大公约数，再利用辗转相除法计算即可.

【详解】

本程序框图的功能是计算 m, n 中的最大公约数，所以 $1995 = 228 \times 8 + 171$ ，

$228 = 171 \times 1 + 57$ ， $171 = 3 \times 57 + 0$ ，故当输入 $m=1995$ ， $n=228$ ，则计算机输出的数是 57.

故选：B.

【点睛】

本题考查程序框图的功能，做此类题一定要注意明确程序框图的功能是什么，本题是一道基础题.

10、B

【解析】

解不等式确定集合 A ，然后由补集、并集定义求解.

【详解】

由题意 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 15 > 0\} = \{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 5\}$ ，

$\therefore \complement_R A = \{x \mid -3 \leq x \leq 5\}$ ，

$(\complement_R A) \cup B = \{x \mid -3 \leq x < 7\}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查集合的综合运算，以及一元二次不等式的解法，属于基础题型.

11、A

【解析】

先化简求出 z ，即可求得答案.

【详解】

因为 $z(1-i)=2$ ，

$$\text{所以 } z = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

所以 $z-1=1+i-1=i$

故选：A

【点睛】

此题考查复数的基本运算，注意计算的准确度，属于简单题目.

12、D

【解析】

根据 X 的分布列列式求出期望,方差,再利用 $a+b+c=1$ 将方差变形为 $D(X) = -4\left(a - \frac{1-b}{2}\right)^2 + 1-b$,从而可以利用二

次函数的性质求出其最大值为 $1-b \leq \frac{1}{3}$,进而得出结论.

【详解】

由 X 的分布列可得 X 的期望为 $E(X) = -a+c$,

又 $a+b+c=1$,

所以 X 的方差 $D(X) = (-1+a-c)^2 a + (a-c)^2 b + (1+a-c)^2 c$

$$= (a-c)^2 (a+b+c) - 2(a-c)^2 + a+c$$

$$= -(a-c)^2 + a+c$$

$$= -(2a-1+b)^2 + 1-b$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/688025122040006117>