

第 09 练 利用导数研究双变量问题

【基础练】

1. (2023·陕西宝鸡·统考二模) 已知函数 $f(x) = x \ln x + \frac{a}{2}x^2 - x (a \in \mathbf{R})$, 且 $f(x)$ 在内有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 求证: $a + \frac{2}{x_1 + x_2} < 0$.

2. (2020 秋·四川内江·高三四川省内江市第六中学校考阶段练习) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}(a-2)x^2 + b, g(x) = 2a \ln x.$$

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 与曲线在它们的交点 $(1, c)$ 处的切线互相垂直, 求 a, b 的值;

(2) 设 $F(x) = f'(x) - g(x)$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有

$F(x_1) - F(x_2) > a(x_1 - x_2)$, 求 a 的取值范围.

3. (2023 春·山东威海·高二校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ (e 为自然对数的底数).

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设函数 $\varphi(x) = xf(x) + tf(x) + \frac{1}{e^x}$, 存在实数 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 使得 $2\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ 成立, 求实数 t 的取值范围.

4. (2022 秋·新疆乌鲁木齐·高三乌市八中校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = ax - \frac{a}{x} - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 是定义域上的增函数, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $a > \frac{2}{5}$, 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求的取值范围.

5. (2023·全国·高三专题练习) 已知对于不相等的正实数 a, b , 有 $\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$

成立, 我们称其为对数平均不等式. 现有函数 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 若方程 $f(x) = m$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

① 证明: $1 < x_1 x_2 < \frac{1}{m^2}$;

② 证明: $|x_1 - x_2| < \frac{2}{m} \sqrt{(\ln m)^2 - 2 \ln m}$.

6. (2022·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = x - a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2 , 求证: $x_1 \cdot x_2 > e^2$.

7. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 0, x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 为函数的两个零点, 证明:

$$e^{x_2} - e \ln x_1 > 2.$$

8. (2021 秋·河南南阳·高三南阳中学校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1 - 2ax \ln x}{x}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $\ln m - \frac{1}{m} = \ln n + \frac{1}{n}$, 求证: $m - n > 2$.

9. (2023·海南海口·校考模拟预测) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2\ln x + 1$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点处的切线方程;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - 2ax$ ($a \in \mathbf{R}$) 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2 < e$, 求 $g(x_1) - g(x_2)$ 的取值范围.

10. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = \ln x$.

(1) 求函数的单调区间;

(2) 证明: $\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, .

【提升练】

11. (2023·福建宁德·福建省宁德第一中学校考一模) 已知函数

$$f(x) = \frac{3}{2}ax^2 - 2\ln x + (2a - 3)x.$$

(1) 求 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 的最小值;

(2) 若方程 $f(x) = k$ 有两个不同的解 x_1, x_2 , 且 x_1, x_0, x_2 成等差数列, 试探究 $f'(x_0)$ 值的符号.

12. (2023·安徽六安·安徽省舒城中学校考模拟预测) 已知 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

($a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$), $g(x) = \cos x + x \sin x$.

(1) 求 $g(x)$ 在上的最小值;

(2)如果对任意的 $x_1 \in [-\pi, \pi]$, 存在 $x_2 \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, 使得成立, 求实数 a 的取值范围.

13. (2023·全国·高二专题练习) 已知函数 $g(x) = e^x - ax^2 - ax$, $h(x) = e^x - 2x - \ln x$. 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 若 $f(x) = h(x) - g(x)$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 已知 $a > 0$, 函数 $g(x)$ 恰有两个不同的极值点 x_1, x_2 , 证明: .

14. (2021 春·全国·高二期末) 已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{(x-2)^2} (x > 1)$, 函数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若对于任意 $x_1 \in (1, +\infty)$, 都存在 $x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

15. (2022·浙江·高三专题练习) 已知函数.

(1) 若 $a = 5$, 求曲线 $y = f(x)$ 单调递增区间及 $y = f(x)$ 在点处的切线方程;

(2) 若不等式 $f(x) \leq \sqrt{x}$ 在 $x \in (0, 1]$ 上恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$. 记 $g(a) = f(x_1) - f(x_2)$, 求 a 的取值范围, 使得 $0 < g(a) \leq \frac{15}{4} - 4 \ln 2$.

16. (2004·重庆·高考真题) 设函数 $f(x) = x(x-1)(x-a)$, .

(1) 求导数 $f'(x)$, 并证明 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 ;

(2) 若不等式 $f(x_1) + f(x_2) \leq 0$ 成立, 求 a 的取值范围.

17. (2022 春·浙江宁波·高二效实中学校考期中) 已知函数 $g(x) = \ln x - \frac{2x}{e^2} + t (t \in \mathbf{R})$ 有两个零点 x_1, x_2 .

(1) 求实数 t 的取值范围;

(2) 求证: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{4}{e^2}$.

18. (2022 秋·甘肃·高二统考期中) 函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} + mx$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x_1) - mx_1 = f(x_2) - mx_2 (0 < x_1 < x_2)$, 求证: $x_1 + x_2 > 2$.

【能力练】

19. (2022·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{ax^2 + bx + 1}$, 其中 $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, e

为自然对数的底数.

(1)若 $b=1$, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$ 总成立, 求实数 a 的取值范围;

(2)若 $b=0$, 且 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 求证: $f(x_1) + f(x_2) < \frac{e^2 + 1}{2}$

20. (2022 春·福建宁德·高二福建省福安市第一中学校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = x - a \ln x$

(1)求函数 $f(x)$ 的极值点;

(2)若方程 $f(x) = k$ 有 2 个不等的实根 x_1, x_2 , 证明: $x_1 + x_2 > 2a$.

21. (2022 秋·天津河西·高三天津市第四中学校考期中) 已知函数 $f(x) = e^x, x \in R$,

$g(x) = \ln x, x \in (0, +\infty)$.

(1)若直线 $y = kx + 2$ 与 $g(x)$ 的图象相切, 求实数 k 的值;

(2)设 $x > 0$, 讨论曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = mx^2 (m > 0)$ 公共点的个数.

(3)设 $a < b$, 比较 $\frac{f(a) + f(b)}{2}$ 与 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 的大小, 并说明理由.

22. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = e^x - 2x - (a + 1)$,

$g(x) = x^2 + (a - 1)x - (a + 2)$ (其中 $e \approx 2.71828$ 是自然对数的底数)

(1)试讨论函数 $f(x)$ 的零点个数;

(2)当 $a > 1$ 时, 设函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的两个极值点为 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$, 求证:

$e^{x_2} - e^{x_1} < 4a + 2$.

23. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}ax^2$.

(1)若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 求实数 a 的取值范围.

(2)若 x_1, x_2 是方程 $f(x) = 0$ 的两个不相等的实数根, 证明: $x_1 + x_2 > \frac{1}{a}$.

24. (2023 春·广西桂林·高二校考阶段练习) 已知函数.

(1)证明: 曲线 $y = f(x)$ 在点处的切线 l 恒过定点;

(2)若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_2 > 2x_1$, 证明: $x_1 x_2 > \frac{8}{e^2}$.

【磨尖练】

25. (2022·天津和平·耀华中学校考模拟预测) 已知函数在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为.

(1)求 a, b ;

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴负半轴的交点为 P , 曲线在点 P 处的切线方程为 $y=h(x)$, 求证:

对于任意的实数 x , 都有 $f(x) \geq h(x)$;

(3) 若关于 x 的方程有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_2 - x_1 \leq 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}$.

26. (2022 秋·河南·高三安阳一中校联考阶段练习) 已知函数存在两个极值点 x_1, x_2 .

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 判断 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的符号, 并说明理由.

27. (2022 秋·天津和平·高三耀华中学校考阶段练习) 已知函数, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求 $y=f(x)$ 在处的切线方程;

(2) 若 $y=f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

① 求实数 a 的取值范围;

② 求证: $x_2^2 - x_1 < a+3$.

28. (2022 秋·黑龙江牡丹江·高三牡丹江一中校考期末) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数

$$f(x) = x \ln 2x - x + \frac{a}{2x} + 2.$$

(1) 当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 若 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) 证明: $\ln x_1 + 2 \ln x_2 < -\frac{e}{2} - 3 \ln 2$ ($e=2.71828 \dots$ 为自然对数的底数).

参考答案:

1. (1) $-\frac{1}{e} < a < 0$

(2) 见解析

【分析】(1) 转化为 $-a = \frac{\ln x}{x}$ 有两个根, 讨论单调性结合函数图象可求解; (2) 等价于证明 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$, 构造函数即可证明.

【详解】(1) 由题可知, $f'(x) = \ln x + ax$, 令 $f'(x) = 0$, 即 $\ln x + ax = 0$,

即 $-a = \frac{\ln x}{x}$ 有两个根 x_1, x_2 ,

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

由 $g'(x) > 0$ 得, $1 - \ln x > 0$, 解得 $0 < x < e$; 由 $g'(x) < 0$ 得, $1 - \ln x < 0$, 解得 $x > e$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 单调递增, 单调递减,

$f(1) = 0$, $x > e$ 时 $f(x) > 0$,

所以要使 $-a = \frac{\ln x}{x}$ 有两个根, 则 $0 < -a < f(e) = \frac{1}{e}$,

解得 $0 < -a < f(e) = \frac{1}{e}$, 所以 $-\frac{1}{e} < a < 0$.

(2) 由(1)可知 $\begin{cases} -a = \frac{\ln x_1}{x_1} \\ -a = \frac{\ln x_2}{x_2} \end{cases}$, 且 $1 < x_1 < e < x_2$, 所以

要证 $a + \frac{2}{x_1 + x_2} < 0$, 只用证 $a(x_1 + x_2) + 2 < 0$,

等价于证明 $-a(x_1 + x_2) > 2$,

而 $-a(x_2 - x_1) = \ln x_2 - \ln x_1$, 即 $-a = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}$,

故等价于证明 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} > \frac{2}{x_2 + x_1}$,

即证 $\ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{2(x_2 - x_1)}{x_2 + x_1}$.

令 $t = \frac{x_2}{x_1}$, 则 $t > 1$,

于是等价于证明 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ 成立,

设, $t > 1$

$$g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

所以 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $g(t) > g(1) = 0$, 即 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ 成立,

所以 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$, 结论得证.

2. (1) $a=1, b=\frac{1}{3}$, 或 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{7}{12}$; (2) $a \leq \frac{1}{2}$.

【详解】试题分析: (1) 由 $f'(1) \cdot g(1) = -1$ 得 $2a\left(a - \frac{3}{2}\right) = -1$ 可得 a 的值, 由 $(1, c)$ 在上得 $c=0$, 则 $(1, 0)$ 在 $y=f(x)$ 上可得 a, b 等式, 求得 b 的值; (2) 本题可转化为 $G(x) = F(x) - ax$ 在上是增函数, 求 $G'(x) > 0$ 转化为一元二次不等式恒成立问题, 可得 a 的取值范围.

试题解析: (1) $\because f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + (a-2)x, \therefore f'(1) = a - \frac{3}{2}, \because g'(x) = \frac{2a}{x}, \therefore g'(1) = 2a$, 依题意有

$$f'(1) = -1, \text{ 且 } f(1) = g(1), \text{ 可得 } \begin{cases} 2a\left(a - \frac{3}{2}\right) = -1 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a-2) + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a=1, b=\frac{1}{3}, \text{ 或 } a=\frac{1}{2}, b=\frac{7}{12}.$$

(2) $\because F(x) = \frac{1}{2}x^2 + (a-2)x - 2a \ln x$. 不妨设 $x_1 < x_2, F(x_1) - F(x_2) > a(x_1 - x_2)$,

等价于 $F(x_2) - ax_2 > F(x_1) - ax_1$. 设 $G(x) = F(x) - ax$, 则对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$,

都有 $\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} > a$, 等价于 $G(x) = F(x) - ax$ 在上是增函数.

$G(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2a \ln x - 2x$, 可得 $G'(x) = x - \frac{2a}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x - 2a}{x}$, 依题意有, 对任意 $x > 0$,

有 $x^2 - 2x - 2a \geq 0$ 恒成立. 由 $2a \leq x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, 可得 $a \leq \frac{1}{2}$.

考点: 导数的几何意义; 构造函数.

3. (1) 0; (2) $t < 3 - 2e$ 或 $t > 3 - \frac{e}{2}$.

【详解】试题分析: (1) 求导得 $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$, 根据导数的符号即可求出 $f(x)$ 的单调区间 (2) 如果存在

$x_1, x_2 \in [0, 1]$, 使得 $2\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ 成立, 那么 $2[\varphi(x)]_{\min} < [\varphi(x)]_{\max}$ 由题设得 $\varphi(x) = \frac{x^2 + (1-t)x + 1}{e^x}$, 求导得

$\varphi'(x) = -\frac{(x-t)(x-1)}{e^x}$ 由于含有参数 t , 故分情况讨论, 分别求出 $\varphi(x)$ 的最大值和最小值如何分类呢? 由

$-\frac{(x-t)(x-1)}{e^x} = 0$ 得 $x=t, x=1$, 又由于 $x \in [0, 1]$ 故以 0、1 为界分类 当 $t \geq 1$ 时, 在 $[0, 1]$ 上单调递减; 当

$t \leq 0$ 时, 在 $[0,1]$ 上单调递增以上两种情况都很容易求得 t 的范围当 $0 < t < 1$ 时, 在上单调递减, 在 $[t,1]$ 上单调递增, 所以最大值为 $\varphi(0), \varphi(1)$ 中的较大者, 最小值为 $\varphi(t)$, $\varphi(0)=1, \varphi(1)=\frac{3-t}{e}$, 一般情况下再分类是比较这两者的大小, 但 $2\varphi(t)=2\frac{t+1}{e}$, 由 (1) 可知 $\frac{4}{e} \leq 2\frac{t+1}{e^t} \leq 2$, 而 $\frac{2}{e} \leq \frac{3-t}{e} \leq \frac{3}{e}$, 显然 $\frac{3-t}{e} < 2\frac{t+1}{e^t}$, 所以 $2[\varphi(x)]_{\min} < [\varphi(x)]_{\max}$ 无解

试题解析: (1) $\because$ 函数的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

(2) 假设存在 $x_1, x_2 \in [0,1]$, 使得 $2\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ 成立, 则 $2[\varphi(x)]_{\min} < [\varphi(x)]_{\max}$.

$\therefore$

$$\therefore \varphi'(x) = \frac{-x^2 + (1+t)x + t}{e^x} = -\frac{(x-t)(x-1)}{e^x}$$

当 $t \geq 1$ 时, $\varphi'(x) \leq 0$, 在 $[0,1]$ 上单调递减, $\therefore 2\varphi(1) < \varphi(0)$, 即 $t > 3 - \frac{e}{2} > 1$

② 当 $t \leq 0$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 在 $[0,1]$ 上单调递增, $\therefore 2\varphi(0) < \varphi(1)$, 即 $t < 3 - 2e < 0$

③ 当 $0 < t < 1$ 时,

在 $x \in [0, t)$, $\varphi'(x) < 0$, 在上单调递减,

在 $x \in (t, 1]$, $\varphi'(x) > 0$, 在 $[t, 1]$ 上单调递增,

所以 $2\varphi(t) < \max\{\varphi(0), \varphi(1)\}$, 即 $2\frac{t+1}{e^t} < \max\{1, \frac{3-t}{e}\}$ ----- (*)

由 (1) 知, $g(t) = 2\frac{t+1}{e^t}$ 在 $[0,1]$ 上单调递减,

故 $\frac{4}{e} \leq 2\frac{t+1}{e^t} \leq 2$, 而 $\frac{2}{e} \leq \frac{3-t}{e} \leq \frac{3}{e}$, 所以不等式 (*) 无解

综上所述, 存在 $t \in (-\infty, 3-2e) \cup (3-\frac{e}{2}, +\infty)$, 使得命题成立

考点: 1、导数的应用; 2、不等关系

$$4. (1); (2) 0 < f(x_1) - f(x_2) < 2\ln 2 - \frac{6}{5}.$$

【分析】(1) 由题得 $f'(x) \geq 0$, 化为 $a \geq \frac{x}{x^2+1}$ 恒成立, 即得解;

(2) 先求出 $\frac{2}{5} < a < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x_1 < 1$, 再求出 $= 2\left(\frac{x_1^2-1}{x_1^2+1} - \frac{1}{2}\ln x_1^2\right)$, 令 $x_1^2 = t$, 则 $\frac{1}{4} < t < 1$, 得

$g(t) = \frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{2} \ln t$, 求出即得解.

【详解】(1) $f(x)$ 的定义域为, $f'(x) = a + \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - x + a}{x^2}$,

$\because f(x)$ 在定义域内单调递增,

$\therefore f'(x) \geq 0$, 即 $ax^2 - x + a \geq 0$ 对 $x > 0$ 恒成立.

则 $a \geq \frac{x}{x^2+1}$ 恒成立. $\therefore a \geq \left(\frac{x}{x^2+1} \right)_{\max}$,

$$\because \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}, \therefore a \geq \frac{1}{2}.$$

所以, a 的取值范围是.

(2) 设方程 $f'(x) = 0$, 即 $ax^2 - x + a = 0$ 得两根为 x_1, x_2 , 且.

由 $\Delta = 1 - 4a^2 > 0$ 且 $a > \frac{2}{5}$, 得 $\frac{2}{5} < a < \frac{1}{2}$,

$$\because x_1 x_2 = 1, x_1 + x_2 = \frac{1}{a}, \therefore 2 < x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{a} < \frac{5}{2}, \therefore \frac{1}{2} < x_1 < 1.$$

,

$\therefore$,

$$\therefore a = \frac{x_1}{x_1^2 + 1} \text{ 代入得,}$$

$$\text{令 } x_1^2 = t, \text{ 则 } \frac{1}{4} < t < 1, \text{ 得 } g(t) = \frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{2} \ln t, \frac{1}{4} < t < 1, g'(t) = \frac{-(t-1)^2}{2t(t+1)^2} < 0,$$

$\therefore g(t)$ 而且 $\left(\frac{1}{4}, 1 \right)$ 上递减, 从而,

$$\text{即 } 0 < g(t) < \ln 2 - \frac{3}{5}, \therefore 0 < f(x_1) - f(x_2) < 2 \ln 2 - \frac{6}{5}.$$

【点睛】本题主要考查利用导数研究函数的单调性, 考查利用导数研究函数的极值和双变量问题, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

5. (1) 极大值为1, 无极小值

(2) ①证明见解析; ②证明见解析

【分析】(1) 利用导数求单调区间, 由单调区间即可求出极值;

(2) 由 $mx_1 = \ln x_1 + 1$ 和 $mx_2 = \ln x_2 + 1$ 可得 $\frac{1}{m} = \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = \frac{x_1 + x_2}{\ln x_1 + \ln x_2 + 2}$, 由已知条件所给的不等式即可证得①;

由①可得 $x_1 + x_2 = \frac{1}{m}(\ln(x_1 x_2) + 2)$, 则 $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$, 令, 构造函数 $g(t) = \frac{1}{m^2}(\ln t + 2)^2 - 4t$, 利用二次求导根据单调性即可证得②.

【详解】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x + 1)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2},$$

则当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$; $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$.

即 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递增, 上递减,

故 $f(x)$ 的极大值为 $f(1) = 1$, 无极小值.

(2) 结合(1) 由 $x \rightarrow 0$, $\frac{\ln x + 1}{x} \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\ln x + 1}{x} \rightarrow 0$, 可得 $m \in (0, 1)$,

①由题意可得 $m = \frac{\ln x_1 + 1}{x_1} = \frac{\ln x_2 + 1}{x_2}$, 从而 $m = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + 2}{x_1 + x_2}$,

即 $\frac{1}{m} = \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = \frac{x_1 + x_2}{\ln x_1 + \ln x_2 + 2}$,

结合参考的公式可得: $\sqrt{x_1 x_2} < \frac{1}{m} = \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = \frac{x_1 + x_2}{\ln x_1 + \ln x_2 + 2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$,

故 $x_1 x_2 < \frac{1}{m^2}$,

且 $\ln x_1 + \ln x_2 + 2 > 2$, 即 $x_1 x_2 > 1$, 从而有 $1 < x_1 x_2 < \frac{1}{m^2}$.

②由①可得 $x_1 + x_2 = \frac{1}{m}(\ln(x_1 x_2) + 2)$, 令, 则,

所以 $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{1}{m^2}(\ln t + 2)^2 - 4t = g(t)$,

则 $g'(t) = \frac{2}{m^2} \left(\frac{\ln t + 2}{t} \right) - 4$,

则 $g''(t) = \frac{2}{m^2} \left(\frac{-1 - \ln t}{t^2} \right) < 0$, $\therefore g'(t)$ 递减,

又 $\because g' \left(\frac{1}{m^2} \right) = -4 \ln m > 0$, $\therefore g'(t) > 0$,

故 $g(t)$ 递增, $\therefore g(t) < g \left(\frac{1}{m^2} \right) = \frac{4(\ln m)^2 - 8 \ln m}{m^2}$,

$$\text{即 } |x_1 - x_2|^2 < \frac{4(\ln m)^2 - 8 \ln m}{m^2},$$

$$\text{即 } |x_1 - x_2| < \frac{2}{m} \sqrt{(\ln m)^2 - 2 \ln m}.$$

6. (1) $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在单调递增; $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 单调递增; (2) 证明见解析.

【分析】(1) 先求导, 再对 a 分两种情况讨论得解;

(2) 要证 $x_1 \cdot x_2 > e^2$, 等价于证明, 令 $\frac{x_1}{x_2} = t$, 则 $t > 1$, 等价于证明 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ 成立, 设函数

$$g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1), \text{ 求出函数 } g(t) \text{ 最小值即得证.}$$

【详解】解: 由题意得 $f'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x} (x > 0)$,

① $a \leq 0$ 时, $x - a > 0$ 恒成立,

所以 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在单调递增.

② $a > 0$ 时, 在上 $f'(x) < 0$, 在上 $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 单调递增.

综上, $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在单调递增.

$a > 0$ 时, $f(x)$ 在单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 单调递增.

(2) 因为 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2 , 由 (1) 可知, $a > 0$,

不妨设 $x_1 > x_2 > 0$, 因为 $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$,

所以, $x_2 - a \ln x_2 = 0$,

所以 $x_1 - x_2 = a(\ln x_1 - \ln x_2)$,

要证 $x_1 \cdot x_2 > e^2$,

即证 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$,

等价于证明 $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{a} > 2$, 而 $\frac{1}{a} = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$,

所以等价于证明 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2}$,

也就是. (*)

令 $\frac{x_1}{x_2} = t$ ，则 $t > 1$ ，

于是欲证 (*) 成立，等价于证明 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ 成立，

设函数 $g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1)$ ，

求导得，

所以函数 $g(t)$ 是上的增函数，

所以，

即 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ 成立，

所以 $x_1 \cdot x_2 > e^2$ 成立.

7. (1)极小值为，无极大值

(2)证明见解析

【分析】(1) 首先求函数的导数 $f'(x) = \frac{x-a}{x^2}$ ，分 $a \leq 0$ 和 $a > 0$ 两种情况讨论函数的单调性，再求函数的极值；

(2) 首先由函数的最小值，确定 $\ln a + b + 1 = 0$ ，再结合零点存在性定理确定 $\frac{a}{e} < x_1 < \frac{a}{2}$ ， $ea < x_2 < 4a$ ，可得 $e^{x_2} - e \ln x_1 > e^{ea} - e \ln \frac{a}{2}$ ，再通过构造函数求函数的最小值.

【详解】(1) $Q f(x) = \ln x + \frac{a}{x} + b$ ($x > 0$)， $\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x-a}{x^2}$ ，

若 $a \leq 0$ 时，则 $f'(x) > 0$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在上单调递增，故 $f(x)$ 没有极值；

若 $a > 0$ ，则当 $x \in (0, a)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，

当 $x \in (a, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(x)$ 有极小值，极小值为 $f(a) = \ln a + b + 1$ ，无极大值.

(2) 证明：由 (1) 可知，当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 有最小值， $f(x)_{\min} = \ln a + b + 1$ ，

由函数 $f(x)$ 的最小值为 0，得 $\ln a + b + 1 = 0$ ，

由题知 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2} = \ln x + \frac{a}{x} + b - \frac{1}{2}$,

,,

$$\therefore \frac{a}{e} < x_1 < \frac{a}{2},$$

$$g(ea) = 1 + \ln a + \frac{1}{e} + b - \frac{1}{2} = \frac{1}{e} - \frac{1}{2} < 0, \quad g(4a) = \ln 4 + \ln a + \frac{1}{4} + b - \frac{1}{2} = \ln 4 - \frac{5}{4} > 0,$$

$$\therefore ea < x_2 < 4a, \quad \therefore e^{x_2} - e \ln x_1 > e^{ea} - e \ln \frac{a}{2} \quad (a > 0),$$

$$\text{令 } h(x) = e^{ex} - e \ln \frac{x}{2}, \text{ 则 } h'(x) = e \left(e^{ex} - \frac{1}{x} \right),$$

$$\text{令 } p(x) = e^{ex} - \frac{1}{x}, \text{ 则 } p(x) \text{ 在上单调递增},$$

$$\text{又 } p\left(\frac{1}{e}\right) = 0, \text{ 在上, } p(x) < 0, \quad h'(x) < 0, \quad h(x) \text{ 单调递减},$$

$$\text{在上, } p(x) > 0, \quad h'(x) > 0, \quad h(x) \text{ 单调递增},$$

$$\therefore h(x)_{\min} = h\left(\frac{1}{e}\right) = e^{e \cdot \frac{1}{e}} - e \ln \frac{\frac{1}{e}}{2} = e - e \ln \frac{1}{2e} = e + e \ln 2e > 2,$$

$$\therefore e^{x_2} - e \ln x_1 > 2 \text{ 得证}.$$

8. (1) 答案见解析; (2) 证明见解析.

【分析】(1) 先求导, 然后方程 $x^2 - 2ax + 1 = 0$ 的判别式 $\Delta = 4a^2 - 4 = 4(a+1)(a-1)$, 再根据判别式分类讨论

(2) 将条件变形为 $\ln m - \ln n = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \Rightarrow \ln \frac{m}{n} = \frac{m+n}{mn} = \frac{\frac{m}{n} + 1}{\frac{m}{n}}$, 令 $\frac{m}{n} = t$, 将问题转化为证明 $t - \frac{1}{t} > 2 \ln t (t > 1)$.

【详解】(1) 解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2a}{x} = \frac{x^2 - 2ax + 1}{x^2}$.

$$\text{令 } g(x) = x^2 - 2ax + 1, \text{ 方程 } x^2 - 2ax + 1 = 0 \text{ 的判别式 } \Delta = 4a^2 - 4 = 4(a+1)(a-1),$$

(i) 当 $\Delta \leq 0$, 即 $-1 \leq a \leq 1$ 时, $g(x) = x^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 恒成立,

即对任意,

所以 $f(x)$ 在上单调递增.

(ii) 当 $\Delta > 0$, 即 $a < -1$ 或 $a > 1$.

① 当 $a < -1$ 时, $g(x) = x^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 恒成立, 即对任意,

所以 $f(x)$ 在上单调递增.

②当 $a > 1$ 时, 由 $x^2 - 2ax + 1 = 0$, 解得 $\alpha = a - \sqrt{a^2 - 1}, \beta = a + \sqrt{a^2 - 1}$.

所以当 $0 < x < \alpha$ 时, $g(x) > 0$; 当 $\alpha < x < \beta$ 时, $g(x) < 0$; 当 $x > \beta$ 时, $g(x) > 0$,

所以在 $(0, a - \sqrt{a^2 - 1}) \cup (a + \sqrt{a^2 - 1}, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$,

在上, $f'(x) < 0$

所以函数 $f(x)$ 在和 $(a + \sqrt{a^2 - 1}, +\infty)$ 上单调递增;

在上单调递减.

综上, 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在上单调递增;

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在和 $(a + \sqrt{a^2 - 1}, +\infty)$ 上单调递增, 在上单调递减.

(2) 证明:

由 $\ln m - \frac{1}{m} = \ln n + \frac{1}{n}$, 可得 $\ln m - \ln n = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} (m, n > 0)$

得 $\ln m - \ln n > 0$, 因此 $m > n > 0$,

因为 $\ln m - \ln n = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \Rightarrow \ln \frac{m}{n} = \frac{m+n}{mn} = \frac{\frac{m}{n} + 1}{\frac{m}{n}}$,

令 $\frac{m}{n} = t$, 则 $t > 1, \ln t = \frac{t+1}{m}$,

所以 $m = \frac{t+1}{\ln t}, n = \frac{t+1}{t \ln t}$, 所以 $m - n = \frac{t^2 - 1}{t \ln t}$,

要证明 $m - n > 2$, 只需证 $\frac{t^2 - 1}{t \ln t} > 2, \left(t = \frac{m}{n} > 1 \right)$

即证: $t - \frac{1}{t} > 2 \ln t (t > 1)$

由 (1) 可知, $a = 1$ 时, $f(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$ 在上是增函数, 所以当 $t > 1$ 时, $f(t) > f(1)$, 而 $f(1) = 0$, 因此

$t - \frac{1}{t} > 2 \ln t (t > 1)$ 成立所以 $m - n > 2$.

【点睛】关键点睛: 解决第 (1) 问的关键是根据判别式来分类讨论, 第 (2) 问的关键是将不等式等价转化并统一变量.

9. (1) $4x - y - 2 = 0$

(2) $\left(0, e^2 - \frac{1}{e^2} - 4 \right)$

【分析】(1) 根据导数的几何意义求出切线的斜率，进而根据点斜式即可得出结果；

(2) 求出 $g'(x)$ ，可得 $x_1 + x_2 = a > 0, x_1 x_2 = 1$ ，化简 $g(x_1) - g(x_2) = \frac{1}{x_1^2} - x_1^2 + 4\ln x_1 \left(\frac{1}{e} < x_1 < 1 \right)$ ，构造函数，利用 $h(t)$ 单调性即可求得答案。

【详解】(1) $f(x) = x^2 + 2\ln x + 1, f'(x) = 2x + \frac{2}{x}$ ，

$$\therefore f(1) = 2, f'(1) = 4,$$

曲线 $y = f(x)$ 在点处的切线方程为 $y - 2 = 4(x - 1)$ ，即 $4x - y - 2 = 0$ 。

(2) $g(x) = x^2 - 2ax + 2\ln x + 1$ ，

则函数 $g(x)$ 的定义域为，

若函数 $g(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2 < e$ 。

则方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 的判别式 $\Delta = a^2 - 4 > 0$ ，且 $x_1 + x_2 = a > 0, x_1 x_2 = 1$ ，

$$\therefore x_2 = \frac{1}{x_1} < e, \frac{1}{e} < x_1 < 1.$$

$$\therefore g(x_1) - g(x_2) = x_1^2 - 2ax_1 + 2\ln x_1 - x_2^2 + 2ax_2 - 2\ln x_2$$

$$= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - 2a(x_1 - x_2) + 2\ln x_1 - 2\ln x_2$$

$$= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 2\ln x_1 - 2\ln \frac{1}{x_1}$$

$$= -(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 4\ln x_1$$

$$= \frac{1}{x_1^2} - x_1^2 + 4\ln x_1 \left(\frac{1}{e} < x_1 < 1 \right).$$

设，

则 $h'(t) = -\frac{2}{t^3} - 2t + \frac{4}{t} = -\frac{2(t^2 - 1)^2}{t^3} < 0$ 在 $t \in \left(\frac{1}{e}, 1 \right)$ 上恒成立。

故 $h(t)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, 1 \right)$ 单调递减，从而 $h(t) > h(1) = 0, h(t) < h\left(\frac{1}{e}\right) = e^2 - \frac{1}{e^2} - 4$ 。

因此， $g(x_1) - g(x_2)$ 的取值范围是 $\left(0, e^2 - \frac{1}{e^2} - 4 \right)$ 。

10. (1) 单调递减区间，单调递增区间为 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty \right)$ ；(2) 证明见解析。

【分析】(1) 求出 $g'(x)$ ，令 $g'(x) > 0$ 和 $g'(x) < 0$ 可得答案.

(2) 即证明： $\ln x_1 + \ln x_2 \leq x_1 + x_2 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ ，设 $h(x) = \ln x - x + \frac{1}{x}$ ，可得 $h(x)$ 为上的减函数，可得，

$h(x_2) \leq h(1) = 0$ 从而得证.

【详解】解：(1) 由 $f(x) = \ln x$ ，则 $g(x) = x^2 f(x) = x^2 \ln x$ ， $x \in (0, +\infty)$ ，

令 $g'(x) < 0$ ，解得 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$ ；令 $g'(x) > 0$ ，解得 $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$.

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间，单调递增区间为 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$.

(2) 证明： $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ ，要证明.

即证明： $\ln x_1 + \ln x_2 \leq x_1 + x_2 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$.

即证明： $\ln x_1 - x_1 + \frac{1}{x_1} + \ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2} \leq 0$.

令 $h(x) = \ln x - x + \frac{1}{x}$ ， $x \in [1, +\infty)$ ，且 $h(1) = 0$.

$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{-(x^2 - x + 1)}{x^2} < 0$ ，所以函数 $h(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上单调递减，

则，由 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ ，则， $h(x_2) \leq h(1) = 0$

所以 $h(x_1) + h(x_2) \leq 0$ ，

即： $\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ ，成立.

【点睛】关键点睛：本题考查利用导数求函数的单调区间和利用导数证明不等式，解答本题的关键是设

$h(x) = \ln x - x + \frac{1}{x}$ ，求出其导数得 $h(x)$ 为上的减函数，从而， $h(x_2) \leq h(1) = 0$ ，属于中档题.

11. (1) 答案见解析；

(2) 正，理由见解析

【分析】(1) 由导数法求最值，对 $a \leq 0$ 、 $0 < a \leq 1$ 、 $a > 1$ 分类讨论即可；

(2) 由 (1) 得只有 $a > 0$ 时方程 $f(x) = k$ 有两个不同的解且可设 $0 < x_1 < \frac{1}{a} < x_2$ ，则由列等式整理得

$$\frac{2\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{3}{2}a(x_1 + x_2) + (2a - 3),$$

结合等差中项性质可变形整理得, 令 $\frac{x_2}{x_1} = t > 1$, 由导数法讨论最值得, 即可进一步证明 $f'(x_0) > 0$

【详解】(1) $f'(x) = \frac{3ax^2 + (2a-3)x - 2}{x} = \frac{(ax-1)(3x+2)}{x} (x > 0).$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 在 单调递减, ;

当 $0 < a \leq 1$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 在 单调递减, ;

当 $a > 1$ 时, $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$; $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 单调递增,

$$f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{3}{2a} + 2\ln a + 2.$$

综上, 当 $a \leq 1$ 时, $f(x)_{\min} = \frac{7}{2}a - 3$; 当 $a > 1$ 时, $f(x)_{\min} = -\frac{3}{2a} + 2\ln a + 2.$

(2) $f'(x_0)$ 值的符号为正, 理由如下:

由 (1) 知, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 不符合题意.

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 单调递增.

不妨设 $0 < x_1 < \frac{1}{a} < x_2$, 由方程 $f(x) = k$ 有两个不同的解 x_1, x_2 ,

则 $\frac{3}{2}ax_1^2 - 2\ln x_1 + (2a-3)x_1 = \frac{3}{2}ax_2^2 - 2\ln x_2 + (2a-3)x_2$, 整理得 $\frac{2\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{3}{2}a(x_1 + x_2) + (2a-3).$

$$f'(x_0) = 3ax_0 - \frac{2}{x_0} + (2a-3) = \frac{3}{2}a(x_1 + x_2) + (2a-3) - \frac{4}{x_1 + x_2} = \frac{2\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} - \frac{4}{x_1 + x_2}.$$

令 $\frac{x_2}{x_1} = t > 1$, 则 $\frac{2}{x_2 - x_1} > 0$, 令 $\varphi(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, \varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$

$\varphi(t)$ 在 单调递增, 故 $\ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 + x_2} > 0, f'(x_0) > 0$ 得证

12. (1)-1

(2) $\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$

【分析】(1) 对 $g(x)$ 求导, 因为 $g(x)$ 为偶函数, 求出 $g(x)$ 在 $x \in (0, \pi)$ 的单调性, 即可求出上的最小值;

(2) 由 (1) 知, $g(x)$ 在上的最小值为 -1 , 所以 $\exists x_2 \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, 使得 $\frac{f(x_2)}{x_2} - a \leq -1$ 成立, 即

$$a(x_2 - \ln x_2) \geq \frac{1}{2}x_2^2 - x_2 \text{ 成立, 即 } a \geq \frac{\frac{1}{2}x_2^2 - x_2}{x_2 - \ln x_2}, \text{ 设 } \varphi(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 - x}{x - \ln x}, x \in \left[\frac{1}{e}, e\right], \text{ 即只需 } a \geq \varphi(x)_{\min} \text{ 即可.}$$

【详解】(1) $g'(x) = -\sin x + \sin x + x \cos x = x \cos x$,

显然 $g(x)$ 为偶函数, 当 $x > 0$ 时,

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $x \cos x > 0$, $g'(x) > 0$, $\therefore g(x)$ 在单调递增;

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $x \cos x < 0$, $g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 单调递减;

$g(0) = 1$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, $g(\pi) = -1$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的最小值为 -1 .

由偶函数图象的对称性可知 $g(x)$ 在上的最小值为 -1 .

(2) 先证, 设 $h(x) = \ln x - x + 1$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,

令 $h'(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$, 令 $h'(x) < 0 \Rightarrow x > 1$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在上单调递减.

故①恒成立.

由题意可得 $\exists x_2 \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, 使得 $\frac{f(x_2)}{x_2} - a \leq -1$ 成立,

即 $a(x_2 - \ln x_2) \geq \frac{1}{2}x_2^2 - x_2$ 成立.

由①可知 $x_2 - \ln x_2 \geq 1 > 0$,

参变分离得 $a \geq \frac{\frac{1}{2}x_2^2 - x_2}{x_2 - \ln x_2}$,

设 $\varphi(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 - x}{x - \ln x}$, $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$,

即只需 $a \geq \varphi(x)_{\min}$ 即可.

$$\varphi'(x) = \frac{(x-1)(x-\ln x) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) \cdot \frac{x-1}{x}}{(x-\ln x)^2} = \frac{(x-1)\left(\frac{1}{2}x - \ln x + 1\right)}{(x-\ln x)^2}$$

由①知得 $-\ln x \geq 1-x$,

$$\therefore \frac{1}{2}x - \ln x + 1 \geq \frac{1}{2}x + 1 - x + 1 = 2 - \frac{1}{2}x = \frac{4-x}{2} > 0$$

$$\text{令 } \varphi'(x) > 0 \Rightarrow 1 < x < e, \text{ 令 } \varphi'(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{e} < x < 1,$$

$\therefore \varphi(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 上单调递减, 在 $(1, e)$ 上单调递增.

$$\therefore \varphi(x)_{\min} = \varphi(1) = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore a \geq -\frac{1}{2},$$

又已知 $a \neq 0$

故 a 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

13. (1) 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增; (2) 证明见解析.

【分析】(1) 先化简计算 $f(x) = h(x) - g(x)$, 并求导, 再讨论 $a \leq 0$ 和 $a > 0$ 时导数的正负, 即得 $f(x)$ 的单调性;

(2) 不妨设 $x_1 < x_2$, 依题意得 $2a = \frac{e^{x_1} - e^{x_2}}{x_1 - x_2}$, 先分析需证 $(x_1 - x_2)e^{\frac{x_1+x_2}{2}} > e^{x_1-x_2} - 1$, 再构造函数

$h(t) = te^{\frac{t}{2}} - e^t + 1 (t < 0)$, 利用导数研究其单调性和函数取值情况, 证得 $te^{\frac{t}{2}} - e^t + 1 > 0$, 即证结论.

【详解】解: (1) $f(x) = h(x) - g(x) = e^x - 2x - \ln x - e^x + ax^2 + ax = ax^2 + (a-2)x - \ln x (x > 0)$,

$$f'(x) = 2ax + (a-2) - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 + (a-2)x - 1}{x} = \frac{(2x+1)(ax-1)}{x} (x > 0),$$

(i) 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减;

(ii) 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > \frac{1}{a}$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < \frac{1}{a}$,

函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上递增;

综上, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增;

(2) 证明: $g'(x) = e^x - 2ax - a$, 依题意, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $\begin{cases} e^{x_1} - 2ax_1 - a = 0 \\ e^{x_2} - 2ax_2 - a = 0 \end{cases}$,

$$\text{两式相减得, } 2a = \frac{e^{x_1} - e^{x_2}}{x_1 - x_2},$$

因为 $a > 0$ ，要证，即证 $\frac{x_1+x_2}{2} < \ln 2a$ ，即证 $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$ ，

两边同除以 e^{x_2} ，即证 $(x_1-x_2)e^{\frac{x_1-x_2}{2}} > e^{x_1-x_2}-1$ 。

令 $t = x_1 - x_2$ ，即证 $te^{\frac{t}{2}} - e^t + 1 > 0$ ，

令 $h(t) = te^{\frac{t}{2}} - e^t + 1 (t < 0)$ ，则 $h'(t) = -e^{\frac{t}{2}} \left[e^{\frac{t}{2}} - \left(\frac{t}{2} + 1 \right) \right]$ ，

令 $p(t) = e^{\frac{t}{2}} - \left(\frac{t}{2} + 1 \right)$ ，则 $p'(t) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{t}{2}} - 1 \right)$ ，

当时， $p'(t) < 0$ ，所以 $p(t)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递减，

$p(t) > p(0) = 0$ ， $h'(t) < 0$ ， $h(t)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递减，

$h(t) > h(0) = 0$ ，即 $te^{\frac{t}{2}} - e^t + 1 > 0$ ，

故。

【点睛】思路点睛：

证明不等恒成立（或能成立）时常对不等式变形，构造函数，由导数的方法求出函数的单调性和最值，即证得结果。

14. (1) 5；(2) $a < \frac{7}{2}$ 。

【分析】(1) 求 $f(x)$ 的导函数，判断 $f(x)$ 的单调性，确定单调区间，从而确定最小值点以及最小值；(2)

由题意可知 $f(x)$ 值域为 $g(x)$ 值域的子集且 $f(x) \in [5, +\infty)$ ，求出 $g(x)$ 的值域进行运算即可。

【详解】(1)，则 $x > 1$ 且 $x \neq 2$ ，所以 $f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-2)^3} = \frac{(x-2)^3 - 8}{(x-2)^3}$

$f'(x) > 0$ 时 $x > 4$ 或 $1 < x < 2$ ， $f'(x) < 0$ ， $2 < x < 4$

则 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 和 $(4, +\infty)$ 上单调递增，在 $(2, 4)$ 上单调递减，

又 $f(1) = 5$ ， $f(4) = 5$ ，所以当 $x = 4$ 时， $f(x)$ 有最小值 5。

(2) 由题意可知 $f(x)$ 值域为 $g(x)$ 值域的子集且 $f(x) \in [5, +\infty)$

则 $a > 0$ ， $\therefore g(x)$ 在单调递增

$\therefore g(x) > g(1) = 2a - 2$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/688043044024006136>