第 01 讲：一元二次方程

【考点梳理】

考点一：一元二次方程的概念问题

考点二：解一元二次方程（直接开平方、配方法）

考点三：解一元二次方程（因式分解）

考点四：解一元二次方程（公式法）

考点五：判别式的应用

考点六：根与系数的关系

考点七：实际问题

考点八：一元二次方程的综合

【知识梳理】

考点一、一元二次方程的定义：

(1)定义：只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 的整式方程.

(2)一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，其中 ax^2、bx、c 分别叫做二次项、一次项、常数项，a、b、c 分别称为二次项系数、一次项系数、常数项.

考点二、一元二次方程的一般形式：

一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.其中，ax^2 是二次项，a 是二次项系数；bx 是一次项，b 是一次项系数；c 是常数项。

考点三、一元二次方程的根：

使一元二次方程左右两边相等的未知数的值叫做一元二次方程的　　，也叫做一元二次方程的根．方程的解的定义是解方程过程中　　　的依据．将此数代入这个一元二次方程的左右两边，看是否相等，若相等，就是这个方程的根；若不相等，就不是这个方程的根.

考点四:降次——解一元二次方程

一元二次方程的解法	（1）直接开平方法：形如（x+m）^{2}=n(n≥0)的方程，可直接开平方求解. （2）因式分解法：可化为（ax+m）(bx+n)=0 的方程，用因式分解法求解. （3）公式法:一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（$b^2-4ac\geqslant 0$）. (4) 配方法：当一元二次方程的二次项系数为 1，一次项系数为偶数时，也可以考虑用配方法.
根的判别式	(1)当 $\varDelta=b^2-4ac\geq 0$ 时，原方程有两个不相等的实数根. (2)当 $\varDelta=b^2-4ac=0$ 时，原方程有两个相等的实数根. (3)当 $\varDelta=b^2-4ac\leq 0$ 时，原方程没有实数根.

考点五：根与系数的关系

（1）韦达定理：若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个根分别为 x_1、x_2，则 $x_1+x_2=$-b/a, $x_1x_2=$c/a. 注意运用根与系数关系的前提条件是△≥0.

（2）解题策略：已知一元二次方程，求关于方程两根的代数式的值时，先把所求代数式变形为含有 x_1+x_2、x_1x_2 的式子，再运用根与系数的关系求解.

例如：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$，注意 △=$b^2-4ac$≥0.

考点六：列一元二次方程解应用题

（1）解题步骤：

①审题；② 设未知数；③ 列一元二次方程；④解一元二次方程；⑤检验根是否有意义；⑥作答.

（2）应用模型：

一元二次方程经常在增长率问题、面积问题等方面应用.

①平均增长率（降低率）问题：公式：$b=a(1\pm x)^n$，a 表示基数，x 表示平均增长率（降低率），n 表示变化的次数，b 表示变化 n 次后的量；

②利润问题：利润=售价-成本；利润率=利润/成本×100%；

（期末必考一道大题）

③传播、比赛问题：

【题型归纳】

题型一：一元二次方程的概念问题

1．（2023 上·天津东丽·）关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2+x+a^2-1=0$ 的一个根是 0，则 a 的值为（　　）

A．1　　B．-1　　C．1 或 -1　　D．$\frac{1}{2}$

【答案】B

【分析】把$x=0$代入方程得，$a^2-1=0$，求得$a=\pm1$，再根据$a-1\neq0$，即可求解.

【详解】解：$\because x$的一元二次方程$(a-1)x^2+x+a^2-1=0$的一个根是0，

$\therefore$把$x=0$代入得，$a^2-1=0$，

解得$a=\pm1$，

$\because a-1\neq0$，即$a\neq1$，

$\therefore a=-1$，

故选：B.

【点睛】本题考查一元二次方程的定义、一元二次方程的解及解一元二次方程，根据一元二次方程的定义得出$a\neq1$是解题的关键.

2．（2023下·吉林长春·八年级校考期末）如果关于x的一元二次方程$ax^2+bx+2=0$的一个解是$x=1$，则代数式$2023-a-b$的值为（　）

A．-2021　　B．2021　　C．-2025　　D．2025

【答案】D

【分析】根据一元二次方程$ax^2+bx+2=0$的一个解是$x=1$，得到$a+b+2=0$即$a+b=-2$，代入计算即可.

【详解】$\because$一元二次方程$ax^2+bx+2=0$的一个解是$x=1$，

$\therefore a+b+2=0$，

$\therefore a+b=-2$，

$\therefore 2023-a-b=2023+2=2025$，

故选D.

【点睛】本题考查了一元二次方程的根，熟练掌握定义是解题的关键.

3．（2023上·云南昭通·九年级统考期末）若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0\left(a\neq 0\right)$ 的一个解是 $x=1$，则 $2022-a-b$ 的值是（　）

A．2025　　B．2014　　C．2023　　D．2022

【答案】C

【分析】直接把 $x=1$ 代入方程 $ax^2+bx+1=0\left(a\neq 0\right)$ 中得到 $-a-b=1$，再把 $-a-b=1$ 整体代入所求式子中求解即可.

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0\left(a\neq 0\right)$ 的一个解是 $x=1$，

$\therefore a+b+1=0$，

$\therefore -a-b=1$，

$\therefore 2022-a-b=2022+1=2023$，

故选C.

题型二：解一元二次方程（直接开平方、配方法）

4．（2022·广东广州·统考一模）方程 $\left(x+1\right)^2=9$ 的解为（　）

A．$x_1=2$，$x_2=-4$　B．$x_1=-2$，$x_2=4$　C．$x_1=4$，$x_2=2$　D．$x_1=-2$，$x_2=-4$

【答案】A

【分析】把方程两边开方得到 $x+1=\pm 3$，然后解两个一次方程即可.

【详解】解：$(x+1)^2=9$，

$x+1=\pm 3$，

所以 $x_1=2$，$x_2=-4$.

故选：A．

【点睛】本题考查了解一元二次方程 - 直接开平方法：形如 $x^2=p$ 或（$nx+m$）$^2=p$（$p\geqslant 0$）的一元二次方程可采用直接开平方的方法解一元二次方程．

5．（2023 上·山东聊城·九年级统考期末）小明在学习一元二次方程时，解方程 $2x^2-8x+3=0$ 的过程如下：

①$2x^2-8x=-3$；②$x^2-4x=-\frac{3}{2}$；③$x^2-4x+4=-\frac{3}{2}+4$；④$(x-2)^2=\frac{5}{2}$；

⑤$x-2=\frac{\sqrt{10}}{2}$；⑥$x=2+\frac{\sqrt{10}}{2}$．

小明的解答从第______步开始出错．

A．①　　B．③　　C．④　　D．⑤

【答案】D

【分析】根据配方法解一元二次方程的步骤逐步判断即可．

【详解】解：$2x^2-8x=-3$

$x^2-4x=-\frac{3}{2}$

$x^2-4x+4=-\frac{3}{2}+4$

$(x-2)^2=\frac{5}{2}$

$x-2=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x_1=2+\frac{\sqrt{10}}{2}$，$x_2=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$

故第⑤步开始出错．

故选 D．

【点睛】本题考查了配方法解一元二次方程，正确的计算是解题的关键.

6．（2023 下·浙江绍兴·八年级校考期中）用配方法解一元二次方程 $x^2+4x+1=0$，则方程可变形为（　）

A．$\left(x-2\right)^2-3=0$ B．$\left(x+4\right)^2-15=0$ C．$\left(x+2\right)^2=3$ D．$\left(x-4\right)^2=15$

【答案】C

【分析】方程常数项移到右边，两边加上 4 变形即可得到结果.

【详解】解：方程变形得：$x^2+4x=-1$，

配方得：$x^2+4x+4=-1+4$，即$\left(x+2\right)^2=3$.

故选：C.

【点睛】此题考查了解一元二次方程□配方法，熟练掌握解方程的步骤与方法是解决问题的关键.

题型三：解一元二次方程（因式分解）

7．（2023 上·山西太原·九年级期末）将$\left(2x-1\right)^2=10x-5$转化为两个一元一次方程，这两个方程是（　）

A．$2x-1=0,2x+1=-5$　　B．$2x+1=5,2x-1=0$

C．$2x-1=0,2x-1=5$　　D．$2x+1=0,2x-1=-5$

【答案】C

【分析】先移项，然后利用因式分解得到$\left(2x-1-5\right)\left(2x-1\right)=0$，据此即可得到答案.

【详解】解：$\because\left(2x-1\right)^2=10x-5$，

$\therefore (2x-1)^2=5(2x-1)$，

$\therefore (2x-1)^2-5(2x-1)=0$，

$\therefore (2x-1-5)(2x-1)=0$，

$\therefore 2x-1=5$ 或 $2x-1=0$，

故选 C．

【点睛】本题主要考查了解一元二次方程，熟知因式分解法解一元二次方程是解题的关键．

8．（2023 上·辽宁沈阳·九年级统考期末）方程 $(2x+3)^2=4(2x+3)$ 的解是（　）

A．$-\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$，$-\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{3}{2}$　　D．$\frac{3}{2}$

【答案】A

【分析】利用因式分解法解一元二次方程的步骤求解即可．

【详解】解：移项，得 $(2x+3)^2-4(2x+3)=0$，

则 $(2x+3)(2x-1)=0$，

$\therefore 2x+3=0$ 或 $2x-1=0$，

$\therefore x_1=-\frac{3}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$．

故选：A．

【点睛】本题考查解一元二次方程，熟练掌握一元二次方程的解法并灵活运用是解答的关键．

9．（2023 上·河北保定·九年级统考期末）若关于 m 的方程 $bm+c=0(b\neq 0)$ 的解为 $m=6$，则关于 x 的方程 $b(x^2-x)+c=0$ 的解是（　）

A．$x=6$　　B．$x=30$　　C．$x_1=3$，$x_2=-2$　　D．$x_1=-3$，$x_2=2$

【答案】C

【分析】对比两个方程可知$m=x^2-x$，结合$m=6$即可求出$b\left(x^2-x\right)+c=0$的解.

【详解】解：将方程$b\left(x^2-x\right)+c=0$看着关于(x^2-x)的一元一次方程，

而关于 m 的方程$bm+c=0\left(b\neq 0\right)$的解为$m=6$，

$\because x^2-x=m=6$，

$\therefore x^2-x=6$，

解得：$x_1=3$，$x_2=-2$，

故选 C.

题型四：解一元二次方程（公式法）

10．（2022 上·天津红桥·九年级校考期末）方程$x^2-4x-7=0$必有一个解满足（　）

A．$-1<x<0$　B．$-2<x<-1$　C．$0<x<3$　D．$3<x<4$

【答案】B

【分析】先用公式法求得方程的根，然后再估算根的范围即可得到结果

【详解】解：$\because x^2-4x-7=0$，

$\therefore \triangle=\left(-4\right)^2-4\times1\times\left(-7\right)=44$，

$\therefore x=\dfrac{4\pm2\sqrt{11}}{2}=2\pm\sqrt{11}$，

$\therefore x_1=2-\sqrt{11}$，$x_2=2+\sqrt{11}$，

$\because 9<11<16$，

$\therefore 3<\sqrt{11}<4$,

$\therefore -4<-\sqrt{11}<-3$,

$\therefore -2<2-\sqrt{11}<-1$,

即 $-2<x_1<-1$,

故选：B

【点睛】本题考查了无理数的估算和解一元二次方程，熟练掌握解方程的方法是解决问题的关键

11．（2022上·河北沧州·九年级校考阶段练习）下列方程中，以 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+4c}}{2}$ 为根的是（　　）

A．$x^2-5x-c=0$　　B．$x^2+5x-c=0$

C．$x^2-5x+4c=0$　　D．$x^2+5x+c=0$

【答案】B

【分析】直接根据公式法解一元二次方程判断即可．

【详解】解：A．$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{5\pm\sqrt{25+4c}}{2}$，故不符合题意；

B．$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+4c}}{2}$，故符合题意；

C．$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16c}}{2}$，故不符合题意；

D．$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-4c}}{2}$，故不符合题意；

故选B．

【点睛】本题考查了一元二次方程的解法:公式法，熟记公式是解答本题的关键.

12．（2022上·山西长治·九年级统考期末）小明在解方程 x^2□4x＝2 时出现了错误，解答过程如下：

∵a＝1，b＝□4，c＝□2（第一步）

∴b^2□4ac＝（□4）^{2}□4×1×（□2）＝24（第二步）

∴$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{24}}{2}$（第三步）

∴$x_1=-2+\dfrac{\sqrt{24}}{2},x_2=-2-\dfrac{\sqrt{24}}{2}$（第四步）

小明解答过程开始出错的步骤是（　）

A．第一步　　B．第二步　　C．第三步　　D．第四步

【答案】C

【分析】根据公式法解一元二次方程的步骤求解判断即可.

【详解】解：∵x^2□4x＝2，即 x^2□4x-2=0，

∴a＝1，b＝□4，c＝□2（第一步）

∴$\Delta=b^2-4ac$＝（□4）^{2}□4×1×（□2）＝24＞0（第二步），

∴$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{4\pm\sqrt{24}}{2}$（第三步），

∴$x_1=2+\sqrt{6}$，$x_2=2-\sqrt{6}$（第四步）

∴小明解答过程开始出错的步骤是第三步，

故选C.

题型五：判别式的应用

13．（2023上·河南洛阳·九年级校考期末）关于x的一元二次方程$x^2-4x+1=2k$有两个不相等的实数根，则k的取值范围为（　　）

A．$k>\frac{3}{2}$　　B．$k<1$　　C．$k<-1$　　D．$k>-\frac{3}{2}$

【答案】D

【分析】本题主要考查了一元二次方程根的判别式，熟练掌握一元二次方程$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$，当$\Delta=b^2-4ac>0$时，方程有两个不相等的实数根；当$\Delta=b^2-4ac=0$时，方程有两个相等的实数根；当$\Delta=b^2-4ac<0$时，方程没有实数根是解题的关键．

【详解】解：原方程整理得：$x^2-4x+1-2k=0$，

$\because$一元二次方程$x^2-4x+1=2k$有两个不相等的实数根，

$\therefore\Delta>0$，

即$\left(-4\right)^2-4\left(1-2k\right)>0$，

解得：$k>-\frac{3}{2}$，

故选：D．

14．（2023上·云南红河·九年级统考期末）一元二次方程$\left(m-2\right)x^2-4mx+2m-6=0$有两个相等的实数根，则$m$等于（　）

A．-6或1　　B．1　　C．-6　　D．4或1

【答案】A

【分析】根据一元二次方程有两个相等的实数根$\Delta=0$列式求解即可得到答案；

【详解】解：$\because$一元二次方程$\left(m-2\right)x^2-4mx+2m-6=0$有两个相等的实数根，

$\therefore 16m^2-4(m-2)(2m-6)=0$且$m-2\neq 0$，

解得：$m_1=-6$，$m_2=1$，

故选：A；

【点睛】本题考查一元二次方程根的判别式，熟练掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键.

15．（2023下·浙江宁波·九年级浙江省余姚市实验学校校考期末）已知关于x的方程$kx^2-(2k-1)x+k-2=0$有实数根，则实数k的取值范围为（　）

A．$k\ge-\frac{1}{4}$且$k\ne0$　　B．$k<\frac{1}{4}$且$k\ne0$　　C．$k\ge-\frac{1}{4}$　　D．$k\le\frac{1}{4}$

【答案】C

【分析】分类讨论：当$k=0$时，方程的解为$x=2$，满足题意；当$k\ne0$时，根据一元二次方程根的情况确定其判别式$\Delta=b^2-4ac\ge0$，从而即可求解.

【详解】解：当$k=0$时，原方程为$x-2=0$，

解得：$x=2$，满足题意；

当$k\ne0$时，

∵关于x的方程$kx^2-(2k-1)x+k-2=0$有实数根，

∴$\Delta=b^2-4ac=\left[-(2k-1)\right]^2-4k(k-2)\ge0$，

解得：$k\ge-\frac{1}{4}$.

故选C.

题型六：根与系数的关系

16．（2023下·安徽六安·八年级校考期末）已知m，n是方程$x^2+x-3=0$的两个实数根，则$m^2+2m+n+2022$的值是（　）

A．2021　　B．2023　　C．2024　　D．2025

【答案】C

【分析】根据m，n是方程$x^2+x-3=0$的两个实数根，得出$m^2+m-3=0$，$m+n=-1$，变形$m^2+2m+n+2022$，然后整体代入求出结果即可．

【详解】解：$\because m$，n是方程$x^2+x-3=0$的两个实数根，

$\therefore m^2+m-3=0$，$m+n=-1$，

$\therefore m^2+m=3$，

$\therefore m^2+2m+n+2022$

$=m^2+m+(m+n)+2022$

$=3+(-1)+2022$

$=2024$．

故选：A．

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的解，根与系数的关系，解题的关键是熟练掌握一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个根x_1，x_2，满足$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$．

17．（2023上·江西九江·九年级校考期末）已知x_1,x_2是方程$2x^2+3x-1=0$的两个根，则$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$的值为（　）

A．3　　B．-3　　C．$-\frac{3}{2}$　　D．$\frac{3}{2}$

【答案】A

【分析】根据韦达定理求得$x_1+x_2=-\frac{3}{2}$，$x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2}$，然后由$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$变形为含有$x_1+x_2$和$x_1\cdot x_2$的式子，并代入求值即可．

【详解】$\because x_1,x_2$是方程$2x^2+3x-1=0$的两个根，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{3}{2}$，$x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=3$．

故选：A．

【点睛】考查一元二次方程$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$根与系数的关系， 熟记公式$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}$,是解决本题的关键．

18．（2023下·山东济宁·九年级统考期末）已知x_1、x_2是关于x的方程$x^2+ax-2b=0$的两个实数根，且$x_1+x_2=3$，$x_1\cdot x_2=1$，则b^a的值是（　）

A．$\frac{1}{8}$　　B．$-\frac{1}{8}$　　C．8　　D．-8

【答案】D

【分析】利用一元二次方程根与系数的关系，即可求解．

【详解】解：$\because x_1$，x_2是关于x的方程$x^2+ax-2b=0$的两实数根，

$\therefore x_1+x_2=-a$，$x_1\cdot x_2=-2b$，

$\because x_1+x_2=3$，$x_1\cdot x_2=1$，

$\therefore -a=3,-2b=1$，即$a=-3$，$b=-\frac{1}{2}$，

$\therefore b^a=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=-8$．

故选：D．

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的根与系数的关系，熟练掌握若x_1、x_2是一元二次方程

$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$的两个实数根，则$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$是解题的关键．

题型七：实际问题

19．（2023上·陕西汉中·九年级统考期末）某商店经销一种吉祥物玩具，销售成本为每件40元，据市场分析，若按每件50元销售，一个月能售出500件；销售单价每涨2元，月销售量就减少20件，针对这种玩具的销售情况，请解答以下问题：

(1)当销售单价涨多少元时，月销售利润能够达到8000元．

(2)商店想在月销售成本不超过10000元的情况下，使得月销售利润达到8000元，则销售定价应为多少元？

【答案】(1)销售单价涨10元或30元时，月销售利润能够达到8000元；

(2)销售定价应为80元

【分析】本题考查了一元二次方程的应用、列代数式以及代数式求值，解题的关键是：（1）找准等量关系，正确列出一元二次方程；（2）根据各数量之间的关系，求出取各x值的月销售成本．

（1）设销售单价涨x元，则每件的销售利润为$(50+x-40)$元，月销售量为$\left(500-10x\right)$件，利用月销售利润=每件的销售利润×月销售量，即可得出关于x的一元二次方程，解之即可得出结论；

（2）利用月销售成本=每件的销售成本×月销售量，可分别求出取各x值的月销售成本，结合月销售成本不超过10000元，即可得出销售定价应为80元．

【详解】（1）设销售单价涨x元，则每件的销售利润为$(50+x-40)$元，月销售量为$500-20\cdot\frac{x}{2}=\left(500-10x\right)$件，

依题意得：$(50+x-40)\left(500-10x\right)=8000$，

整理得：$x^2-40x+300=0$，

解得：$x_1=10$，$x_2=30$.

答：当销售单价涨10元或30元时，月销售利润能够达到8000元.

（2）当$x=10$时，月销售成本为$40(500-10x)=40\times(500-10\times10)=16000>10000$，不合题意，舍去；

当$x=30$时，月销售成本为$40(500-10x)=40\times(500-10\times30)=8000<10000$，符合题意，此时$50+x=80$.

答：销售定价应为80元.

20．（2023·福建三明·统考一模）某商场将进货价为30元的台灯以40元售出，1月份销售400个，2月份和3月份这种台灯销售量持续增加，在售价不变的基础上，3月份的销售量达到576个，设2月份和3月份两个月的销售量月平均增长率不变.

(1)求2月份和3月份两个月的销售量月平均增长率；

(2)从4月份起，在3月份销售量的基础上，商场决定降价促销．经调查发现，售价在35元至40元范围内，这种台灯的售价每降价0.5元，其销售量增加6个．若商场要想使4月份销售这种台灯获利4800元，则这种台灯应降价多少元？

【答案】(1)20%

(2)2元

【分析】本题考查一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

（1）设2，3两个月这种台灯销售量的月均增长率为x，利用三月份的销售量＝一月份的销售量$\times(1+x)^2$，即可得出关于x的一元二次方程，解之取其正值即可得出结论；

（2）设每台降价y元，则每台的销售利润为$(40-y-30)$元，四月份可售出$(576+12y)$台，利用总利润二每台的销售利润×四月份的销售量，即可得出关于y的一元二次方程，解之取其正值即可得出结论；

【详解】（1）设 2，3 两个月的销售量月平均增长率为 x，

依题意，得：$400(1+x)^2=576$，

解得：$x_1=0.2=20\%, x_2=-2.2$(不符合题意，舍去).

答：2，3 两个月的销售量月平均增长率为 20%.

（2）设这种台灯每个降价 y 元时，商场四月份销售这种台灯获利 4800 元，

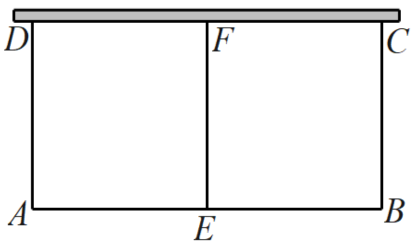
依题意，得：$(40-y-30)(576+12y)=4800$，

整理，得：$y^2+38y-80=0$，

解得 $y_1=2, y_2=-40$(不符合题意，舍去)，

答：该这种台灯应降价 2 元.

21．（2023 上·湖南益阳·九年级校考期末）某扶贫单位为了提高贫困户的经济收入，购买了 39m 的铁栅栏，准备用这些铁栅栏为贫困户靠墙（墙长 15m）围建一个中间带有铁栅栏的矩形养鸡场（如图所示）.



(1)若要建的矩形养鸡场面积为 120m^2，求鸡场的长 AB 和宽 BC；

(2)该扶贫单位想要建一个 130m^2 的矩形养鸡场，这一想法能实现吗？请说明理由.

【答案】(1)长 AB 为 15m，宽 BC 为 8m

(2)想法不能实现

【分析】（1）设$BC=x\mathrm{m}$，则可表示出长AB，由面积关系即可列出方程，解方程即可．

（2）设$BC=x\mathrm{m}$，则可表示出长AB，由面积关系即可列出方程，根据方程是否有解或方程的解是否符合题意，即可作出判断．

【详解】（1）解：设$BC=x\mathrm{m}$，则$AB=(39-3x)\mathrm{m}$，

由题意得：$x(39-3x)=120$，

整理得：$x^2-13x+40=0$，

解得：$x_1=5，x_2=8$，

当$x=5$时，$39-3x=24>15$，不符合题意；当$x=8$时，$39-3x=15$，符合题意；

答：鸡场的长AB和宽BC分别为$15\mathrm{m}$与$8\mathrm{m}$．

（2）解：设$BC=x\mathrm{m}$，则$AB=(39-3x)\mathrm{m}$，

由题意得：$x(39-3x)=130$，

整理得：$3x^2-39x+130=0$，

$\Delta=(-39)^2-4\times3\times130=1521-1560<0$，

方程无实数解；

所以想法不能实现．

题型八：一元二次方程的综合

22．（2022·湖北十堰·统考中考真题）已知关于x的一元二次方程$x^2-2x-3m^2=0$．

(1)求证：方程总有两个不相等的实数根；

(2)若方程的两个实数根分别为α，β，且$\alpha+2\beta=5$，求m的值．

【答案】(1)见解析

(2) $m=\pm 1$

【分析】（1）根据根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$，即可判断；

（2）利用根与系数关系求出 $\alpha+\beta=2$，由 $\alpha+2\beta=5$ 即可解出 α，β，再根据 $\alpha\cdot\beta=-3m^2$，即可得到 m 的值．

【详解】（1）$\Delta=b^2-4ac=\left(-2\right)^2-4\times 1\cdot(-3m^2)=4+12m^2$，

$\because 12m^2\geq 0$，

$\therefore 4+12m^2\geq 4>0$，

∴该方程总有两个不相等的实数根；

（2）∵方程的两个实数根 α，β，

由根与系数关系可知，$\alpha+\beta=2$，$\alpha\cdot\beta=-3m^2$，

$\because \alpha+2\beta=5$，

$\therefore \alpha=5-2\beta$，

$\therefore 5-2\beta+\beta=2$，

解得：$\beta=3$，$\alpha=-1$，

$\therefore -3m^2=-1\times 3=-3$，即 $m=\pm 1$．

【点睛】本题考查了根的判别式以及根与系数的关系，解题的关键是掌握根的判别式以及根与系数的关系．

23．（2023上·江苏南通·九年级校考期末）关于 x 的方程 $x^2-\left(2k-1\right)x+k^2-2k+3=0$ 有两个不相等的实数根．

(1)求实数 k 的取值范围；

(2)设方程的两个实数根分别为 x_1,x_2，存不存在这样的实数 k，使得 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$？若存在，求出这样的 k 值；若不存在，说明理由．

【答案】(1) $k>\frac{11}{4}$

(2)存在，$k=4$

【分析】本题考查一元二次方程根的判别式，一元二次方程根与系数之间的关系．

（1）根据一元二次方程方程有两个不相等的实数根，得到判别式大于 0，列出不等式求解即可；

（2）根据一元二次方程根与系数的关系，以及 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$，得到 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=5$，进行求解即可．

掌握根的判别式与根的个数之间的关系，以及根与系数的关系，是解题的关键．

【详解】（1）解：由题意，得：$\left[-(2k-1)\right]^2-4\left(k^2-2k+3\right)=4k-11>0$，

解得：$k>\frac{11}{4}$；

（2）存在，

由题意，得：$x_1+x_2=2k-1, x_1x_2=k^2-2k+3$，

$\because |x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$，

$\therefore (x_1-x_2)^2=5$，

$\therefore (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=5$，即：$(2k-1)^2-4\left(k^2-2k+3\right)=5$，

解得：$k=4$．

24．（2023 上·江苏扬州·九年级校联考期中）阅读材料，解答问题：