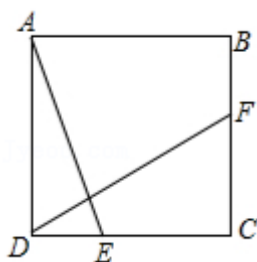
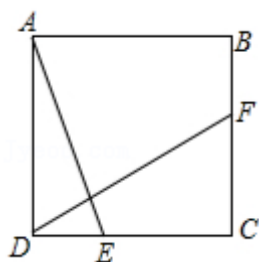
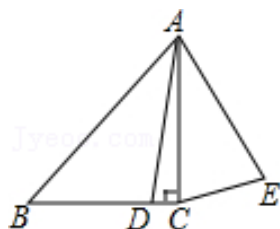
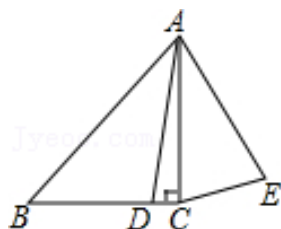


2025 中考数学二轮专题-瓜豆原理轨迹最值问题（直线型）-专项训练

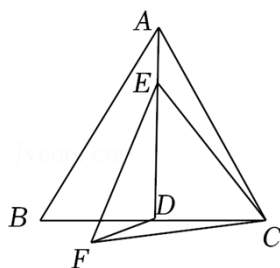
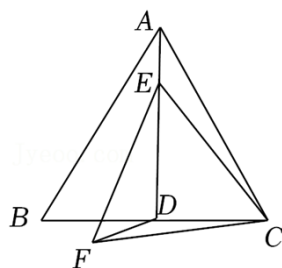
1. 如图，已知正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在边 CD, BC 上，连接 AE, DF . 若 $AB = \sqrt{15}$, $DE = BF$, 则 $AE + DF$ 的最小值为_____



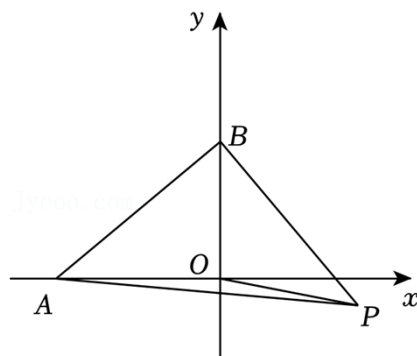
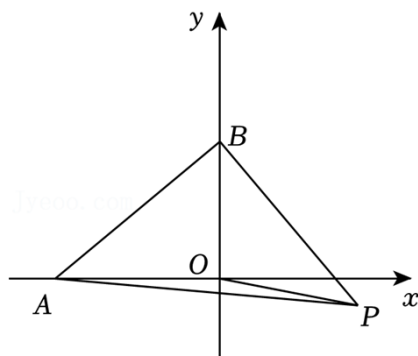
2. 如图，在等腰直角三角形 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 2$, D 是 BC 边上一动点，将 AD 绕点 A 逆时针旋转 45° 得 AE , 连接 CE , 则线段 CE 长的最小值为_____



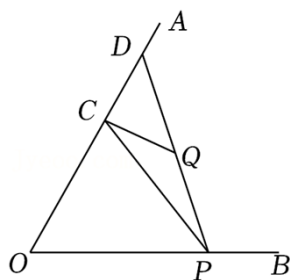
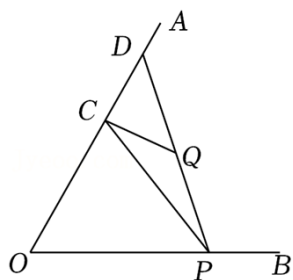
3. 如图， AD 是等边三角形 ABC 的 BC 边上的高，点 E 是 AD 上的一个动点（点 E 不与点 A 重合），连接 CE . 将线段 CE 绕点 E 顺时针旋转 60° 得到 EF , 连接 DF, CF , 若 $AB = 6$, 则线段 DF 长度的最小值是_____



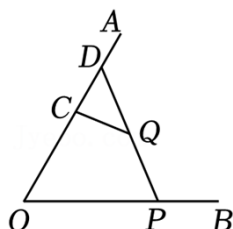
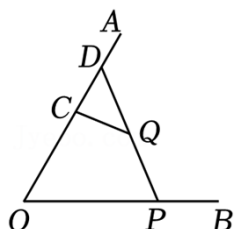
4. 如图，在平面直角坐标系中， $A(-4, 0)$, 点 B 是 y 轴正半轴一动点，以 AB 为边在 AB 的下方作等腰直角 $\triangle ABP$, 且 $\angle ABP = 90^\circ$. 点 B 在 y 轴上运动时， OP 的最小值为_____.



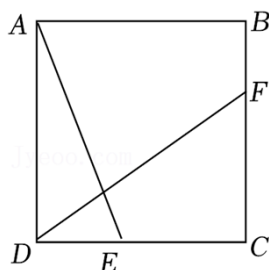
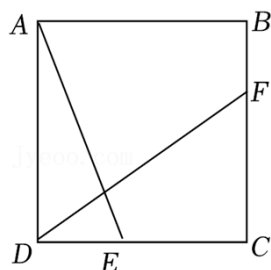
5. 如图, $\angle AOB=60^\circ$, 点 C, D 在射线 OA 上, 且 $OC=4, CD=2$, P 是射线 OB 上的动点, Q 是线段 DP 的中点, 则线段 CQ 长的最小值为_____.



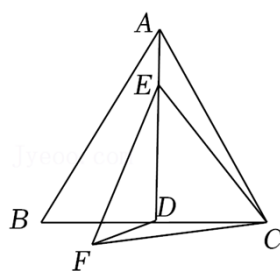
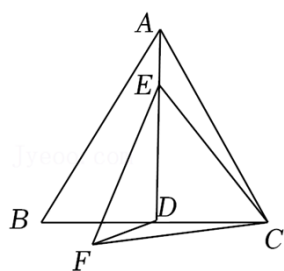
6. 如图, $\angle AOB=60^\circ$, 点 C, D 在射线 OA 上, 且 $OC=2CD=4\sqrt{3}$, P 是射线 OB 上的动点, Q 是线段 DP 的中点, 则线段 CQ 长的最小值为_____.



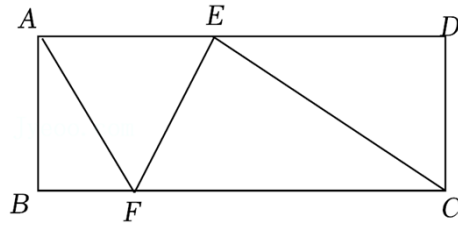
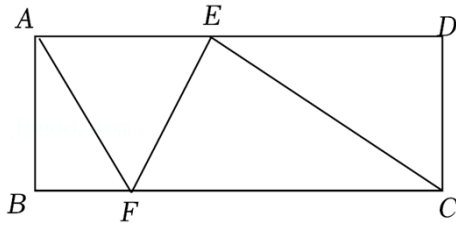
7. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在边 CD, BC 上, 连接 AE, DF . 若 $AB=\sqrt{5}, DE=BF$, 则 $AE+DF$ 的最小值为_____.



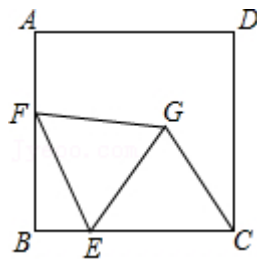
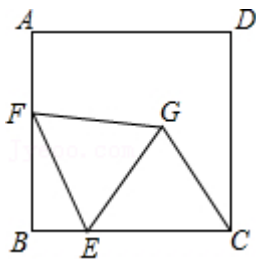
8. 如图, AD 是等边 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高, 点 E 是 AD 上的一个动点 (点 E 不与点 A 重合), 连接 CE , 以 CE 为边构造等边 $\triangle CEF$. 若 $AB=6$, 则线段 $DF+CF$ 长度的最小值是_____.



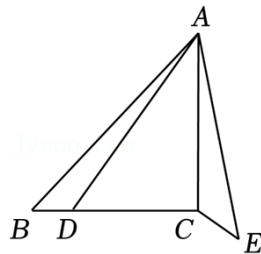
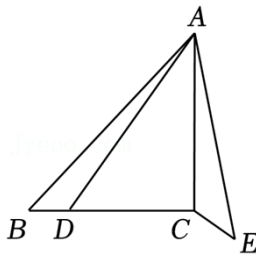
9. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=2\sqrt{3}$ ， $AD=8$ ， E 、 F 分别为 AD 、 BC 上两个动点，且 $\angle EFC=60^\circ$ ，连接 AF ， CE ，当 $AF+EF+CE$ 最小时， BF 的长为 _____.



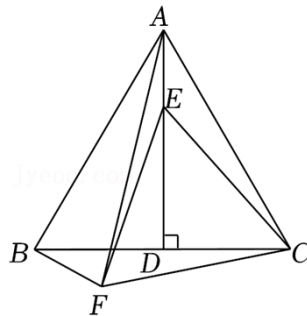
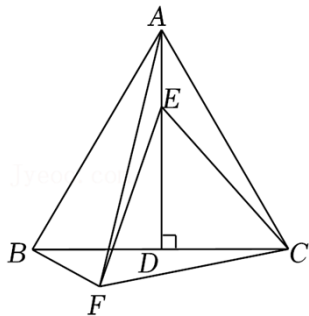
10. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4， E 为 BC 上一点，且 $BE=1$ ， F 为 AB 边上的一个动点，连接 EF ，以 EF 为边向右侧作等边 $\triangle EFG$ ，连接 CG ，则 CG 的最小值为_____.



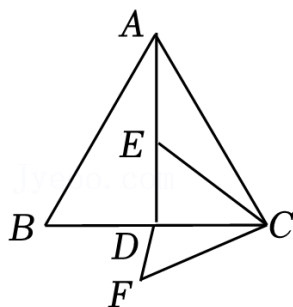
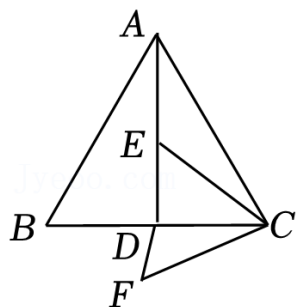
11. 如图，腰长为 8 的等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， D 是边 BC 上的一个动点，连接 AD ，将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 45° ，得到线段 AE ，连接 CE ，则线段 CE 长的最小值是 _____.



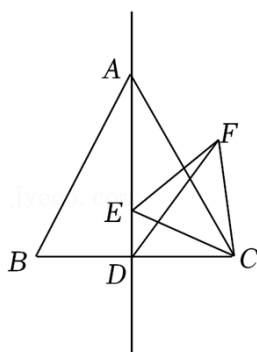
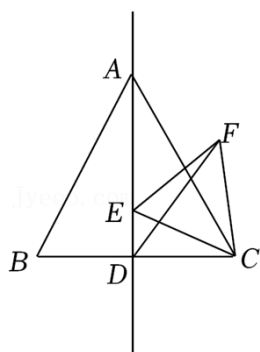
12. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的高，点 E 是 AD 上一动点，连接 CE ，将线段 CE 绕点 E 顺时针旋转 60° 得到线段 FE ，连接 AF ，若 $AB=4$ ， $AF=\sqrt{19}$ ，则 CF 的长为 _____.



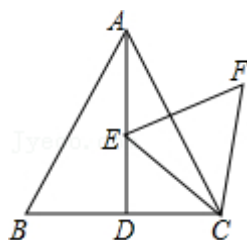
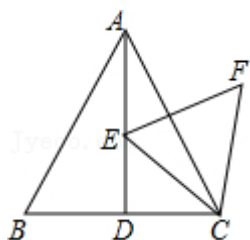
13. 如图，边长为 12 的等边三角形 ABC 中， E 是高 AD 上的一个动点，连结 CE ，将线段 CE 绕点 C 逆时针旋转 60° 得到 CF ，连结 DF 。则在点 E 运动过程中，线段 DF 长度的最小值是 _____。



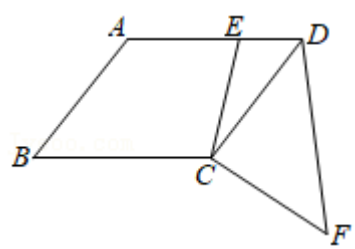
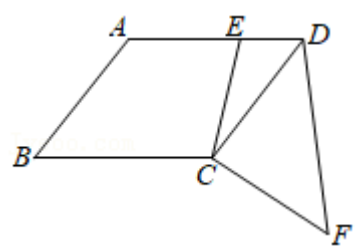
14. 如图，边长为 2 的等边三角形 ABC 中， E 是对称轴 AD 上的一个动点，连接 CE 将线段 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 CF ，连接 DF ，则在点 E 运动过程中， DF 的最小值是 _____。



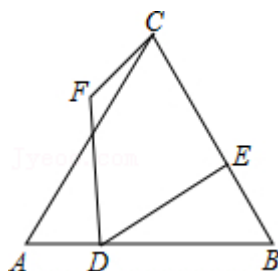
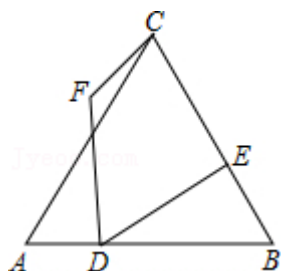
15. 如图，边长为 6 的等边三角形 ABC 中， $AD \perp BC$ ， E 是 AD 上的一个动点，连接 CE ，将线段 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 CF ，连接 EF ，则 $\triangle CEF$ 面积的最大值与最小值之比为 _____。



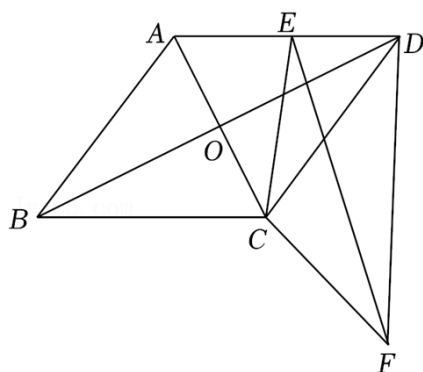
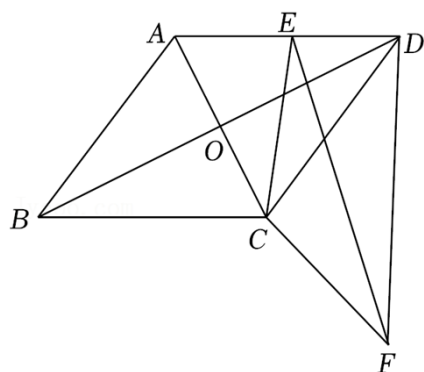
16. 如图，在边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ，点 E 为 AD 所在直线上的一个动点。连接 CE ，将线段 CE 绕点 C 顺时针旋转 120° 后得到对应的线段 CF ，连接 DF ，则线段 DF 的最小值为 _____。



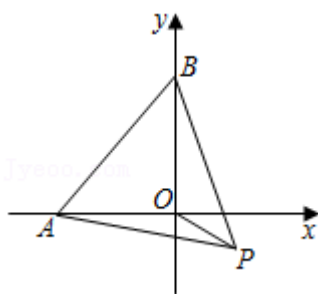
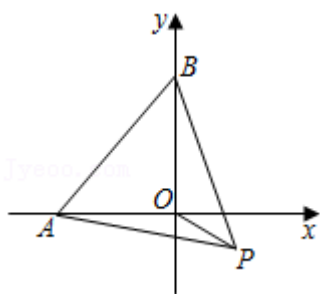
17. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形，点 D 在边 AB 上， $AD=2$ ，点 E 是 BC 上一点，连接 DE ，将 DE 绕点 D 逆时针旋转 60° 得 DF ，连接 CF ，则 CF 的最小值是_____.



18. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{3}$ ， $\angle ABC=60^\circ$ ，对角线 AC 、 BD 交于点 O 。点 E 为直线 AD 上的一个动点，连接 CE ，将线段 EC 绕点 C 顺时针旋转 $\angle BCD$ 的角度后得到对应的线段 CF （即 $\angle ECF = \angle BCD$ ）， DF 长度的最小值为_____.



19. 如图，在平面直角坐标系中， $A(-3, 0)$ ，点 B 是 y 轴正半轴上一动点，以 AB 为边在 AB 的下方作等边 $\triangle ABP$ ，点 B 在 y 轴上运动时， OP 的最小值为_____.



三. 解答题（共 5 小题）

20. 同学们准备研究“最值问题”，回顾已有知识，发现涉及到“最值”的有“两点之间，线段最短”“直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短”。在此基础上，同学们进行了如下探究：

（1）最值初体验

如图 1， $\angle AOC=60^\circ$ ， D 是 $\angle AOC$ 角平分线上一点，点 E 在 OC 上， $EO=ED=2$ 。 P 为射线 OA 上一动点，连接 DP ，则线段 DP 的最小值为_____；

(2) 探究与迁移

如图 2，小明发现如果 $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形，点 O 是 AC 边上的中点， P 是 BC 边上的一个动点（点 P 不与 B, C 重合），连接 AP ，将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle ACP'$ ，连接 OP' ，此时线段 OP' 的长度有一个最小值，请你画出图形并帮助小明同学求出此最小值；

(3) 拓展与应用

如图 3，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle A=30^\circ$ ， $AB=5$ 。点 P 是射线 AC 上的一个动点，连接 PB ，将线段 PB 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BP' ，连接 CP' ，请直接写出线段 CP' 的最小值。

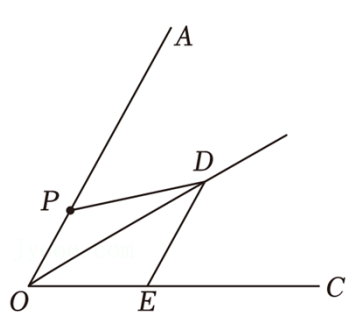


图 1

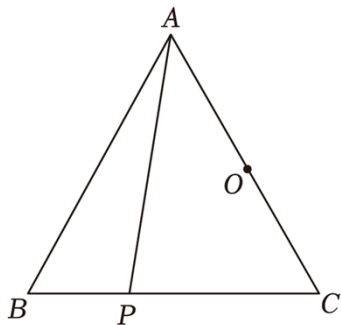


图 2

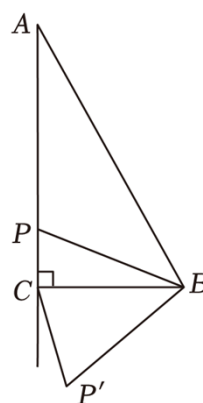
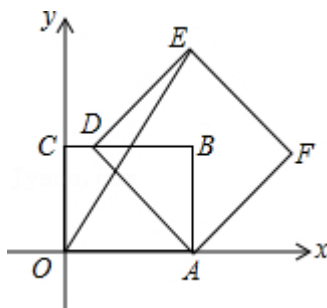
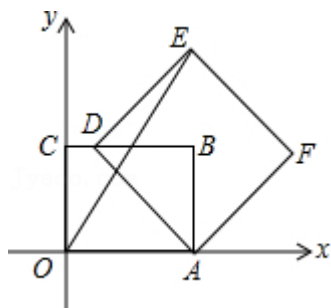


图 3

21. 如图，在平面直角坐标系中，已知矩形 $OABC$ 的顶点 A 在 x 轴上， $OA=4$ ， $OC=3$ 。点 D 为 BC 边上一点，以 AD 为一边在与点 B 的同侧作正方形 $ADEF$ ，连接 OE ，当点 D 在边 BC 上运动时， OE 的长度的最小值是多少？



22. 问题提出

(1) 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 点 M 为 $\triangle ABC$ 内一点, 将线段 AM 绕点 A 按逆时针方向旋转 $\angle BAC$ 的度数得到 AN , 连接 NC , BM , 则 $\angle NCA$ 与 $\angle MBA$ 的数量关系为 _____, MB 与 CN 的数量关系为 _____.

问题解决

(2) 如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=75^\circ$, $AB=AC=8$, 过 B 点的射线 BD 交 AC 边于点 D , 且 $\angle ABD=45^\circ$, M 为射线 BD 上一动点, 连接 AM , 将 AM 绕点 A 逆时针旋转 75° , 得到 AN , 连接 NC , 当 $\triangle ANC$ 为直角三角形时, 求 BM 的长.

拓展探究

(3) 如图 3, 矩形 $ABCD$ 中, $CD=2$, $\angle DAC=30^\circ$, E 为直线 AC 上一动点. 将 DE 绕 D 逆时针旋转 90° , 得到 DF , 连接 BF , 则 BF 的最小值为 _____. (直接写出结果)

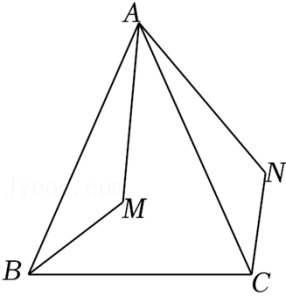


图1

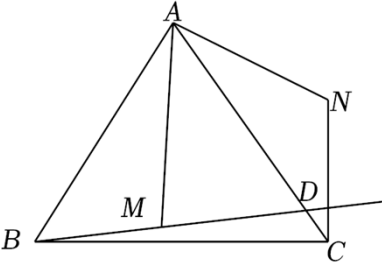


图2

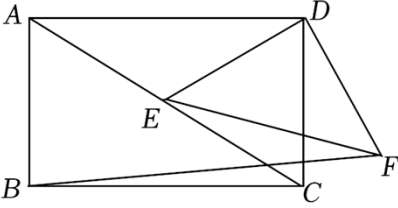


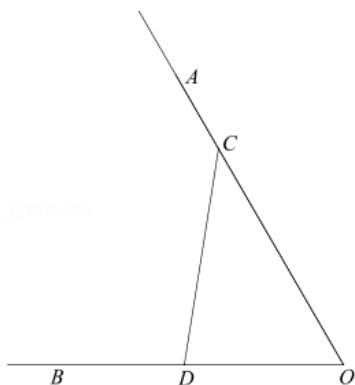
图3

23. 如图, $\angle AOB=60^\circ$, 点 C 、 D 分别在射线 OA 、 OB 上, 且满足 $OC=4$. 将线段 DC 绕点 D 顺时针旋转 60° , 得到线段 DE . 过点 E 作 OC 的平行线, 交 OB 反向延长线于点 F .

(1) 根据题意完成作图;

(2) 猜想 DF 的长并证明;

(3) 若点 M 在射线 OC 上, 且满足 $OM=3$, 直接写出线段 ME 的最小值.

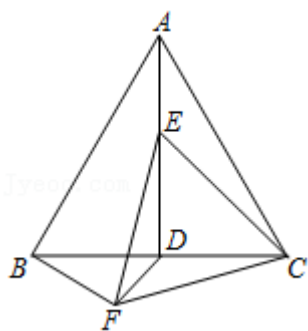


24. 如图, AD 是等边三角形 ABC 的高, 点 E 是 AD 上的一个动点 (点 E 不与点 A 重合), 连接 CE , 将线段 CE 绕点 E 顺时针旋转 60° 得到 EF , 连接 BF 、 CF .

(1) 猜想: $\triangle CEF$ 是_____三角形;

(2) 求证: $AE=BF$;

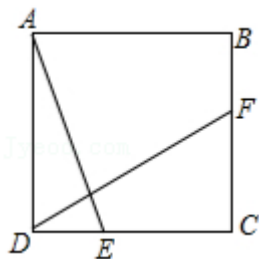
(3) 若 $AB=4$, 连接 DF , 在点 E 运动的过程中, 请直接写出 DF 的最小值_____.



参考答案与试题解析

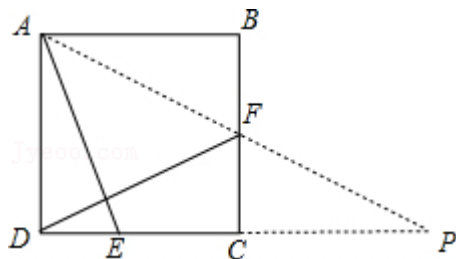
一. 选择题（共3小题）

1. 如图，已知正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在边 CD, BC 上，连接 AE, DF 。若 $AB = \sqrt{15}$ ， $DE = BF$ ，则 $AE + DF$ 的最小值为（ ）



- A. $4\sqrt{6}$ B. $5\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{3}$

【解答】解：如图，延长 DC 到 P 使 $CD = CP$ ，连接 AP ，交 BC 于 F ，



在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABF$ 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABF = \angle ADE, \\ BF = DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABF$ (SAS),

$\therefore AE = AF$,

$\because \angle BCD = 90^\circ$, $CD = CP$,

$\therefore DF = PF$,

$\therefore AE + DF = AF + PF = AP$,

$\because$ 点 A, F, P 在一条直线上，

$\therefore AP$ 的长为 $AE + DF$ 的最小值，

$\because AB = \sqrt{15}$,

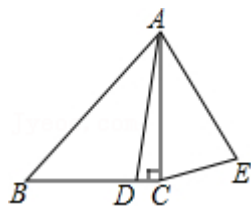
$\therefore AD = CD = \sqrt{15}$, $DP = 2AC = 2\sqrt{15}$,

$\therefore AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = 5\sqrt{3}$ ，即 $AE + DF$ 的最小值为 $5\sqrt{3}$ ，

故选：B.

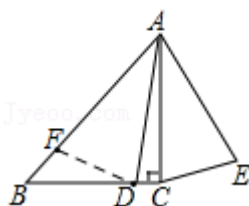
2. 如图，在等腰直角三角形 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 2$ ， D 是 BC 边上一动点，将 AD 绕点 A

逆时针旋转 45° 得 AE ，连接 CE ，则线段 CE 长的最小值为（ ）



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2} - 1$ D. $2 - \sqrt{2}$

【解答】解：如图，在 AB 上截取 $AF = AC = 2$ ，



$\therefore$ 旋转

$$\therefore AD = AE$$

$$\therefore AC = BC = 2, \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{2}, \angle B = \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore BF = 2\sqrt{2} - 2$$

$$\therefore \angle DAE = 45^\circ = \angle BAC$$

$$\therefore \angle DAF = \angle CAE, \text{ 且 } AD = AE, AC = AF$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle AFD \text{ (SAS)}$$

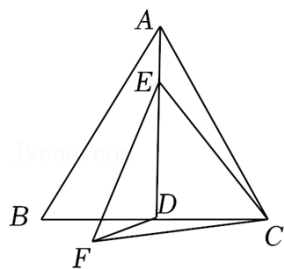
$$\therefore CE = DF,$$

当 $DF \perp BC$ 时， DF 值最小，即 CE 的值最小，

$$\therefore DF \text{ 最小值为 } \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

故选：D.

3. 如图， AD 是等边三角形 ABC 的 BC 边上的高，点 E 是 AD 上的一个动点（点 E 不与点 A 重合），连接 CE 。将线段 CE 绕点 E 顺时针旋转 60° 得到 EF ，连接 DF 、 CF ，若 $AB = 6$ ，则线段 DF 长度的最小值是（ ）



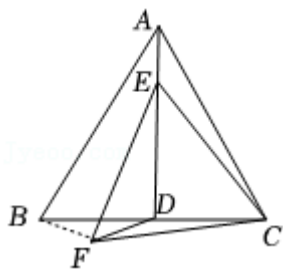
A. 3

B. $\sqrt{3}$

C. 1.5

D. 1

【解答】解：如图，连接 BF ，



$\because AD$ 是等边三角形 ABC 的 BC 边上的高， $AB=6$ ，

$\therefore BD=CD=3$ ， $\angle CAD=\angle BAD=30^\circ$ ，

$\therefore$ 将线段 CE 绕点 E 顺时针旋转 60° 得到 EF ，

$\therefore CE=EF$ ， $\angle CEF=60^\circ$ ，

$\therefore \triangle EFC$ 是等边三角形，

$\therefore CE=CF$ ， $\angle ECF=60^\circ = \angle ACB$ ，

$\therefore \angle ACE = \angle BCF$ ，

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCF$ 中，

$$\begin{cases} AC=BC \\ \angle ACE=\angle BCF, \\ EC=FC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCF$ (SAS)，

$\therefore \angle CBF = \angle CAE = 30^\circ$ ，

$\therefore$ 点 F 在射线 BF 上运动，

当 $DF \perp BF$ 时， DF 有最小值，

此时， $\because DF \perp BF$ ， $\angle CBF = 30^\circ$ ，

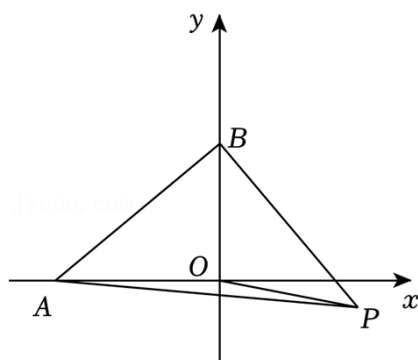
$$\therefore DF = \frac{1}{2}BD = 1.5,$$

$\therefore$ 线段 DF 长度的最小值是 1.5，

故选：C.

二. 填空题（共 16 小题）

4. 如图，在平面直角坐标系中， $A(-4, 0)$ ，点 B 是 y 轴正半轴一动点，以 AB 为边在 AB 的下方作等腰直角 $\triangle ABP$ ，且 $\angle ABP = 90^\circ$ 。点 B 在 y 轴上运动时， OP 的最小值为 $2\sqrt{2}$ 。



【解答】解：过 P 作 $PC \perp y$ 轴于 C ，如图：

$$\because \angle ABP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle PBC = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle PBC + \angle BPC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BPC,$$

$$\text{又} \because AP = BP,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle BCP \text{ (AAS)},$$

$$\therefore PC = OB, BC = OA = 4,$$

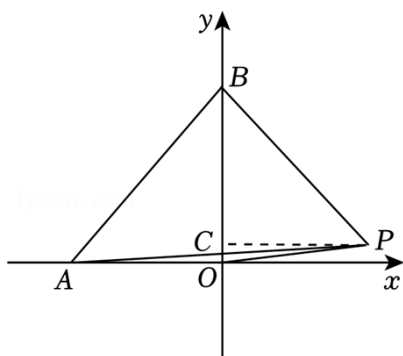
$$\text{设 } OB = PC = x,$$

由勾股定理得：

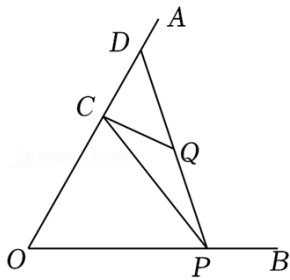
$$OP^2 = x^2 + (4 - x)^2 = 2x^2 - 8x + 16 = 2(x - 2)^2 + 8,$$

$$\therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时, } OP \text{ 最小, } OP = 2\sqrt{2}.$$

故答案为： $2\sqrt{2}$.



5. 如图， $\angle AOB = 60^\circ$ ，点 C, D 在射线 OA 上，且 $OC = 4$ ， $CD = 2$ ， P 是射线 OB 上的动点， Q 是线段 DP 的中点，则线段 CQ 长的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



【解答】解：如图所示，取 OD 的中点 E ，连接 EQ ，

又 $\because Q$ 是 DP 的中点，

$\therefore EQ$ 是 $\triangle DOP$ 的中位线，

$\therefore EQ \parallel OP$ ，

$\therefore \angle CEQ = \angle AOB = 60^\circ$ ，即点 Q 在过点 E 且平行于 OB 的直线上运动，

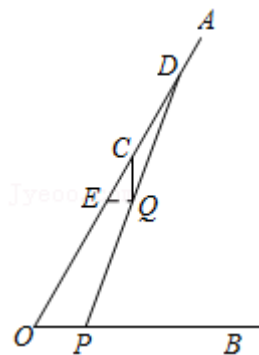
如图，当 $\angle CQE = 90^\circ$ 时， $CQ \perp EQ$ ，依据垂线段最短可知，此时 CQ 最短，

$\because OC = 4$ ， $CD = 2$ ， E 是 OD 的中点，

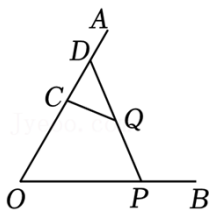
$\therefore CE = OC - OE = 4 - \frac{1}{2}OD = 4 - 3 = 1$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle CEQ$ 中， $CQ = CE \times \sin \angle CEQ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

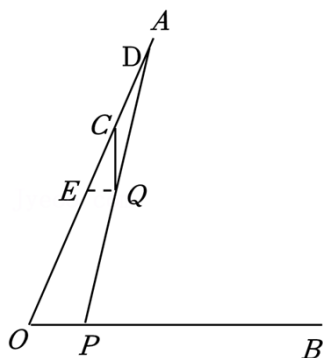
故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。



6. 如图， $\angle AOB = 60^\circ$ ，点 C ， D 在射线 OA 上，且 $OC = 2CD = 4\sqrt{3}$ ， P 是射线 OB 上的动点， Q 是线段 DP 的中点，则线段 CQ 长的最小值为 $\frac{3}{2}$ 。



【解答】解：取 OD 的中点 E ，连接 EQ ，



$\because Q$ 是 DP 的中点,

$\therefore EQ$ 是 $\triangle DOP$ 的中位线,

$\therefore EQ \parallel OP$,

$\therefore \angle CEQ = \angle AOB = 60^\circ$,

即点 Q 在过点 E 且平行于 OB 的直线上运动,

当 $\angle CQE = 90^\circ$ 时, $CQ \perp EQ$,

由垂线段最短可知, 此时 CQ 最短,

$\because OC = 2CD = 4\sqrt{3}$,

$\therefore CD = 2\sqrt{3}$,

$\therefore OD = OC + CD = 6\sqrt{3}$,

$\because E$ 是 OD 的中点,

$\therefore OE = OD = 3\sqrt{3}$,

$\therefore CE = OC - OE = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle CEQ$ 中, $\angle ECQ = 90^\circ - \angle CEQ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

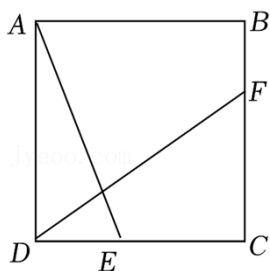
$\therefore EQ = CE = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore CQ = \sqrt{CE^2 - EQ^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$,

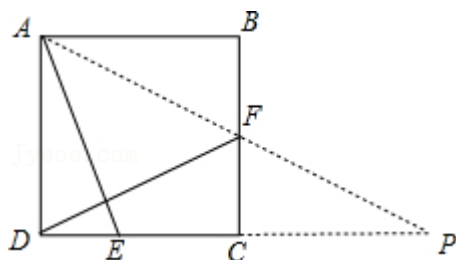
即线段 CQ 长的最小值为 $\frac{3}{2}$,

故答案为: $\frac{3}{2}$.

7. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在边 CD, BC 上, 连接 AE, DF . 若 $AB = \sqrt{5}$, $DE = BF$, 则 $AE + DF$ 的最小值为 5.



【解答】解：如图，延长 DC 到 P 使 $CD=CP$ ，连接 AP ，交 BC 于 F ，



在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABF$ 中，

$$\begin{cases} AB=AD \\ \angle ABF=\angle ADE, \\ BF=DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABF$ (SAS) ,

$\therefore AE=AF$,

$\because \angle BCD=90^\circ$, $CD=CP$,

$\therefore DF=PF$,

$\therefore AE+DF=AF+PF=AP$,

$\because$ 点 A 、 F 、 P 在一条直线上，

$\therefore AP$ 的长为 $AE+DF$ 的最小值，

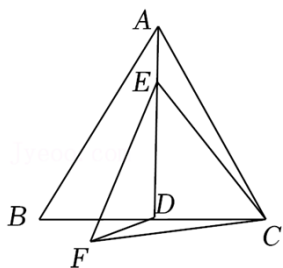
$\because AB=\sqrt{5}$,

$\therefore AD=CD=\sqrt{5}$, $DP=2DC=2\sqrt{5}$,

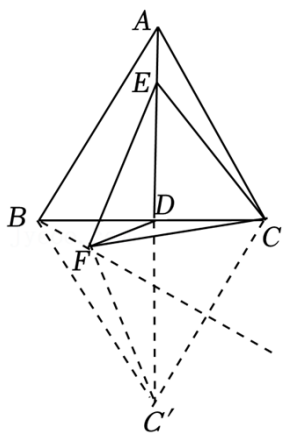
$\therefore AP=\sqrt{AD^2+DP^2}=5$, 即 $AE+DF$ 的最小值为 5.

故答案为：5.

8. 如图， AD 是等边 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高，点 E 是 AD 上的一个动点（点 E 不与点 A 重合），连接 CE ，以 CE 为边构造等边 $\triangle CEF$ 。若 $AB=6$ ，则线段 $DF+CF$ 长度的最小值是 $3\sqrt{3}$ 。



【解答】解：如图，连接 BF ，



$\because AD$ 是等边三角形 ABC 的 BC 边上的高， $AB=6$ ，

$\therefore BD=CD=3$ ， $\angle CAD=\angle BAD=30^\circ$ ，

$\because \triangle CEF$ 是等边三角形，

$\therefore CE=CF$ ， $\angle ECF=60^\circ = \angle ACB$ ，

$\therefore \angle ACE=\angle BCF$ ，

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCF$ 中，

$$\begin{cases} AC=BC \\ \angle ACE=\angle BCF \\ EC=FC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCF$ (SAS)，

$\therefore \angle CBF=\angle CAE=30^\circ$ ，

$\therefore$ 点 F 在射线 BF 上运动，

作点 C 关于直线 BF 的对称点 C' ，连接 $C'F$ ， $C'D$ ， $C'B$ ，

则 $C'F=CF$ ， $\triangle BCC'$ 是等边三角形，且 CD 是边 BC 上的高， $CD=3\sqrt{3}$ ，

$\therefore DF+CF=DF+C'F \geq CD$ ，

$\therefore DF+CF$ 长度的最小值是 CD 的长，

$\therefore$ 线段 DF 长度的最小值是 $3\sqrt{3}$ ，

故答案为： $3\sqrt{3}$ 。

9. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=2\sqrt{3}$ ， $AD=8$ ， E 、 F 分别为 AD 、 BC 上两个动点，且 $\angle EFC=60^\circ$ ，连接

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/688111006106006132>