用向量法研究三角形性质（复习课）

复习引入

三角形是几何中最简单的封闭图形，但它也是最重要的基本几何图形之一。三角形的性质非常丰富，而向量是沟通代数和几何的一种工具，有着极其丰富的实际背景。

如何用向量法研究三角形的性质？

向量法研究几何问题的一般思路:

转化 → 运算 → 翻译

如何用向量法研究三角形的性质？

向量法研究几何问题的一般思路:　　转化 ⟶ 运算 ⟶ 翻译

第一步：转化：建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为向量问题;

第二步：运算：通过向量运算，研究几何元素的关系;

第三步：翻译：把运算结果翻译成几何关系.

例如：用向量法证明三角形两边之和大于第三边.

几何问题

分析:

要证 $AB + AC > BC$

只需证 $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$

向量问题

证明:

$\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$\therefore |\overrightarrow{BC}|^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$

$= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$

$< |\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AC}|$

$= (|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{AC}|)^2$

$\therefore |\overrightarrow{BC}| < |\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{AC}|$

$\therefore AB + AC > BC$

向量运算

结果翻译

与重心相关的向量形式

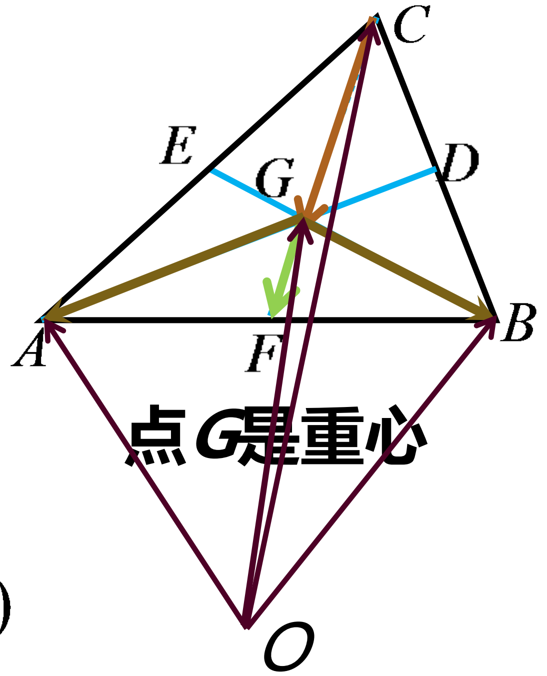
$(1)\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{GF}$

$(2)\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow G$是$\Delta ABC$的重心

$(3)\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$($O$为平面内任一点)

(4)重心G的坐标 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

(5) $S_{\Delta GAB}=S_{\Delta GBC}=S_{\Delta GCA}$



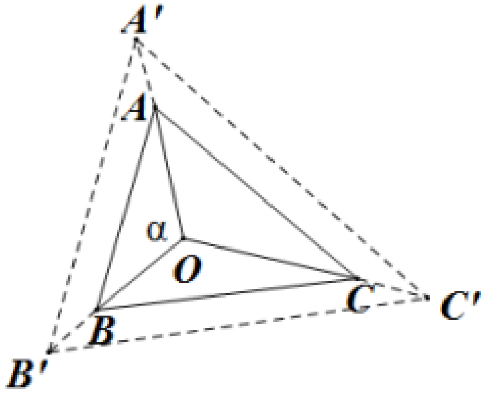
探究性质

探究一 奔驰定理

若点O ΔABC $m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$$S_{\Delta BOC}:S_{\Delta AOC}:S_{\Delta AOB}=m:n:p$$

问题 1：假设$\overrightarrow{OA'}=m\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OB'}=n\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{OC'}=p\overrightarrow{OC}$



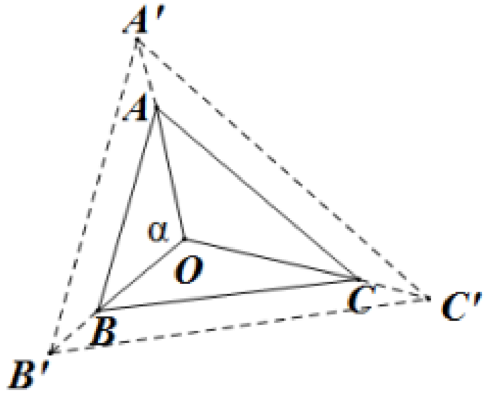
探究性质

探究一 奔驰定理

若点O ΔABC $m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$$S_{\Delta BOC}:S_{\Delta AOC}:S_{\Delta AOB}=m:n:p$$

问题2：$S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OA'B'}$ $S_{\triangle OAC}:S_{\triangle OA'C'}$ $S_{\triangle OBC}:S_{\triangle OB'C'}$



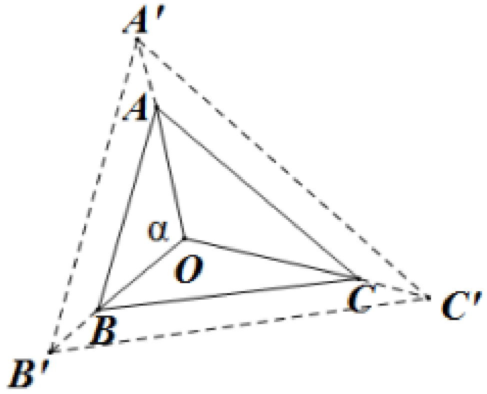
探究性质

探究一 奔驰定理

若点O ΔABC $m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$

$$S_{\Delta BOC}:S_{\Delta AOC}:S_{\Delta AOB}=m:n:p$$

问题3：根据以上提示证明$S_{\Delta BOC}:S_{\Delta AOC}:S_{\Delta AOB}=m:n:p$



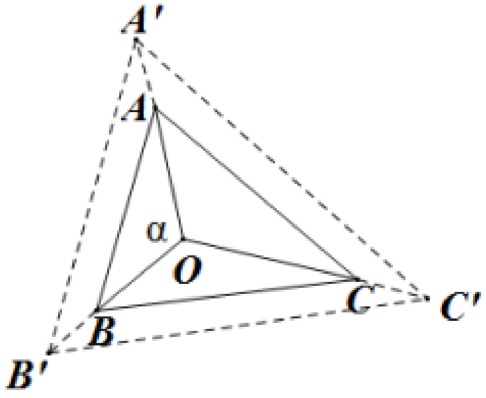
探究性质

探究一　奔驰定理

若点O　ΔABC　$m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$$S_{\Delta BOC}:S_{\Delta AOC}:S_{\Delta AOB}=m:n:p$$

结论：若点 0 为ΔABC 内任意一点，$S_{\Delta AOB}\overrightarrow{OC}+S_{\Delta AOC}\overrightarrow{OB}+S_{\Delta BOC}\overrightarrow{OA}=\vec{0}$



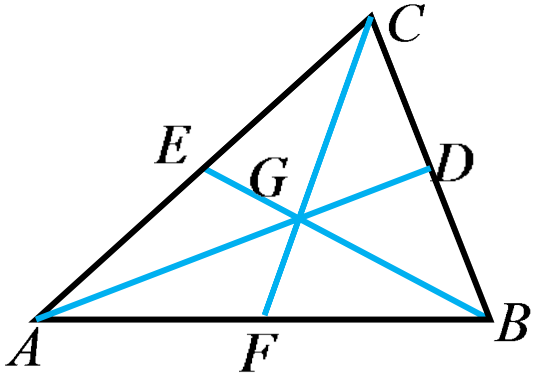
探究二 奔驰定理与四心的关系

（1）重心： 三角形三条中线的交点；

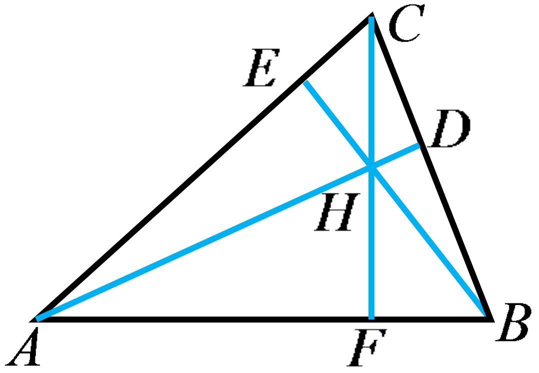
（2）垂心： 三角形三条高线的交点；

（3）内心： 三角形三条角平分线的交点；

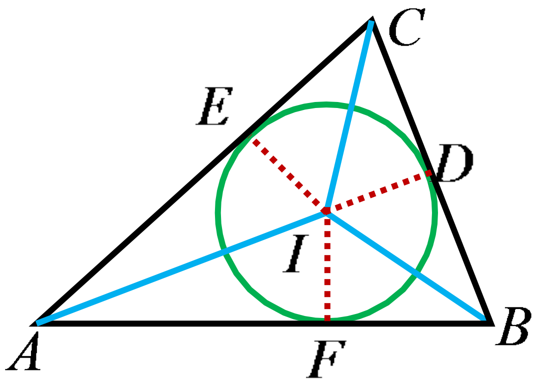
（4）外心： 三角形三边垂直平分线的交点.



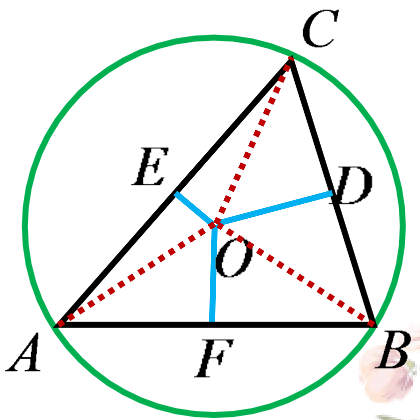
点 *G* 是重心



点 *H* 是垂心



点 *I* 是内心



点 *O* 是外心