高中数学公式

第一部分：集合、条件、不等式

1、集合

⑴常用数集：正整数集$N^*(N_+)$，自然数集N，整数集Z，有理数集Q，实数集R。

⑵子集（包括真子集和相等）、交集、并集、补集、全集、空集（是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集）

⑶含 n 个元素的集合个数：子集有2^n个；真子集有2^n-1个；非空子集有2^n-1个；非空真子集有2^n-2个.

2、命题

定义：可以判断真假的陈述句叫命题。

四种命题：①原命题：若 p 则 q；　　②逆命题：若 q 则 p；

③否命题：若┐p 则┐q；　　④逆否命题：若┐q 则┐p

注：原命题与逆否命题同真假；逆命题与否命题同真假。四种命题的真假个数：0 个，2 个，4 个

3、条件

命题 $p \underset{必要}{\overset{充分}{\rightleftarrows}}$ 命题 q

① $p \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} q$　p 是 q 的**充分不必要**条件（p 是 q 的真子集）　② $p \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} q$　p 是 q 的**必要不充分**条件（q 是 p 的真子集）

③ $p \overset{\Rightarrow}{\Leftarrow} q$　p 是 q 的**充要**条件　（$p=q$ 相等）　　④ $p \overset{\not\Rightarrow}{\not\Leftarrow} q$　p 是 q 的**既不充分也不必要**条件（p、q 互不包含）

技巧：小范围推大范围，大范围不能推小范围，即小的推大的，大的不能推小的

4、逻辑连词、量词

⑴逻辑联词**或且非**，**或**命题一真就真，**且**命题全真才真，**非**命题真假互换。

①且(交集)： p∧q；　②或（并集）： p∨q；　③非（结论否定）：┐p

⑵量词一般有两个，全称量词所有的，存在量词有一个，若要否定变形式。全称命题 p：$\forall x$；特称命题 p：$\exists x$；

5、二次方程

两项：⑴ 直接开平方；（形如$x^2=1$）　　⑵ 提取公因式；（形如$x^2-2x=0$）；

三项：**⑶ 十字相乘法；**⑷ **配方法（提；配；括；完）** ⑸公式法：求根公式：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

判别式$\Delta=b^2-4ac$；韦达定理：$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

6、不等式的性质

两个实数比较大小的方法：(1)作差法：与 0 比$\begin{cases} a-b>0 \Leftrightarrow a>b \\ a-b=0 \Leftrightarrow a=b \\ a-b<0 \Leftrightarrow a<b \end{cases}$ (2)作商法：与 1 比$\begin{cases} \dfrac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b \\ \dfrac{a}{b}=1 \Leftrightarrow a=b \\ \dfrac{a}{b}<1 \Leftrightarrow a<b \end{cases}$　$(b>0)$

(1)乘法 $\left.\begin{matrix} a>b \\ c>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bc$　$\left.\begin{matrix} a>b \\ c<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac<bc$　(2)同向相加 $\left.\begin{matrix} a>b \\ c>d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c>b+d$　(3)同向相乘 $\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ c>d>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bd$

7、二次不等式	(1) $ax^2+bx+c>0$ 的解集 $\{x \mid x<x_1\text{或}x>x_2\}$ “大于取两边” (2) $ax^2+bx+c<0$ 的解集 $\{x \mid x_1<x<x_2\}$ “小于取中间” 若 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$，则当 $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$ 时，$f(x)>0$ 恒成立；当 $\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$ 时，$f(x)<0$ 恒成立

8、二次函数	**一般式：$f(x)=ax^2+bx+c\quad(a\neq0)$** 方法：(1) 配方法，顶点式：$f(x)=a(x-m)^2+n$ 对称轴 $x=m$；顶点（m，n） (2) 十字相乘法，交点式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ 与 x 轴的交点：$x=x_1$、x_2 (3) 对称轴方程：$x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 顶点坐标：$(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$

9、分式不等式化整式	(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow f(x)\,g(x)>0$. (2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq0 \Leftrightarrow f(x)\,g(x)\geq0$ 且 $g(x)\neq0$ (3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0 \Leftrightarrow f(x)\,g(x)<0$. (4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq0 \Leftrightarrow f(x)\,g(x)\leq0$ 且 $g(x)\neq0$

10、绝对值不等式	若 $a>0$，(1) $\lvert x\rvert<a \Leftrightarrow -a<x<a$ “小于取中间” (2) $\lvert x\rvert>a \Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$ “大于取两边” 若 $c>0$，(1) $\lvert ax+b\rvert<c \Leftrightarrow -c<ax+b<c$； (2) $\lvert ax+b\rvert>c \Leftrightarrow ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$

第二部分：函数、导数

1、指数运算	根式运算：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$；$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$ 整数幂：(1) $a^n=a\cdot a\cdots a$（n 个 a 相乘） (2) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ (3) $a^0=1(a\neq0)$ 分数幂：(1) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ (2) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ (3) $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ **指数运算：** $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$；$(ab)^m=a^mb^m$；$(a^m)^n=a^{mn}$

2、对数运算	(1) 指数与对数互化：$x=\log_a N \Leftrightarrow a^x=N(a>0,a\neq1,N>0)$ (2) 对数恒等式：(1) $\log_a 1=0$ (2) $\log_a a=1$ (3) $a^{\log_a N}=N$ (4) $\log_a a^N=N$（指对之后还是 N） (3) 常用对数：$\lg N=\log_{10} N$；自然对数：$\ln N=\log_e N$（$e\approx2\ 7$） (4) 对数的运算：① 加乘：$\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)$ ② 减除：$\log_a M-\log_a N=\log_a\dfrac{M}{N}$ ③ 顶在外：$\log_a b^n=n\log_a b$ ④ 顶在外，体位不变：$\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ ⑤ 体位不变：$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（学名换底公式，常用在对数的乘法运算中，但不常用）

3、函数的定义域	(1)分式：$\frac{1}{x}(x\neq0)$　(2)偶次方根：$\sqrt{x}$ $(x\geq0)$　(3)零指数幂：x^0 $(x\neq0)$　x^{-n} $(x\neq0)$　(4)对数：$\log_a x$ $(x>0)$
4、函数的解析式	求函数解析式的 4 种方法 (1)**换元法（从前到后）**(2)**配凑法（从后到前）**(3)**待定系数法**．(4)**解方程组法**：$f(x)$与$f(\frac{1}{x})$ $f(-x)$解方程组．
5、函数的单调性	设x_1、$x_2\in[a,b]$,那么 (1) 若$x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)<0\Leftrightarrow f(x)$为增函数；若$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)$为增函数　（同号为增） (2) 若$x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)>0\Leftrightarrow f(x)$为减函数；若$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow f(x)$是减函数　（异号为减） 复合函数$f(g(x))$的单调性：$f(u)$、$u=g(x)$　“同增异减”
6、函数的奇偶性	偶函数：(1) 定义域关于原点对称　(2) $f(-x)=f(x)$　偶函数图象关于 **y 轴**对称。 奇函数：(1) 定义域关于原点对称　(2) $f(-x)=-f(x)$　奇函数图象关于**原点**对称。 公共定义域内有：奇±奇＝奇，偶±偶＝偶，奇×奇＝偶，偶×偶＝偶，奇×偶＝奇．
7、函数的对称性	**对称轴**：$f(a+x)=f(a-x)\Leftrightarrow f(x)$图像关于**直线 $x=a$** 对称．　$f(a+x)=f(b-x)$ $\Leftrightarrow$ **对称轴** $x=\frac{a+b}{2}$ **对称中心**：$f(a+x)+f(a-x)=2b\Leftrightarrow f(x)$图像关于**点$(a，b)$**对称．　$f(a+x)+f(b-x)=0$ $\Leftrightarrow$ **对称中心**$(\frac{a+b}{2},0)$
8、函数的周期性	(1) $f(x+a)=f(x)$，$T=a$．　(2) $f(x+a)=-f(x)$，$T=2a$．　(3) $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$，$T=2a$．　(4) $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$，$T=2a$． (5) $f(a+x)=f(b+x)$，$T=\|a-b\|$．(6) **两个对称轴**是半个周期$\frac{1}{2}T$：**$f(x)$关于直线 $x=a$，$x=b$** 对称，那么 $T=2\|a-b\|$． (7) **两个对称中心**也是半个周期$\frac{1}{2}T$：**$f(x)$关于点（a，0）（b，0）**对称，那么 $T=2\|a-b\|$． (8) **对称轴与对称点**是$\frac{1}{4}$个周期：**$f(x)$关于直线 $x=a$、点（b，0）**对称，那么 $T=4\|a-b\|$．　三角函数图像可证明 678
9、常见的五种函数	(1)一次函数：$y=kx+b$ $(k\neq0)$　**k：斜率 b：y 轴上的截距**　**①$k>0$,递增；②$k<0$，递减。** (2)二次函数：$y=ax^2+bx+c$　$(a\neq0)$　**①看 a；②看 Δ；③画图；④求解** (3)三次函数：$y=ax^3+bx^2+cx+d$　求导 (4)反比例函数：$y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$　**①$k>0$,图像在一、三象限；②$k<0$，图像在二、四象限。** (5)双勾函数：$y=x+\frac{a}{x}$ $(a>0)$　**①$x>0$,当 $x=\sqrt{a}$ 时，$y_{min}=2\sqrt{a}$；②$x<0$,当 $x=-\sqrt{a}$ 时，$y_{max}=-2\sqrt{a}$**

10、基本不等式

(1) $a+b\geq 2\sqrt{ab}$；$a^2+b^2\geq 2ab$；　　(2) $ab\leq(\frac{a+b}{2})^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$

满足三个条件：“一正二定三相等”　　口诀：ab≤均值的平方≤平方的均值

11、零点问题

方程 $f(x)=0$ 有实数根⇔函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点⇔函数 $y=f(x)$ 有零点.

函数零点存在性定理：函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a，b]$ 上连续，且 $f(a)\,f(b)<0$，则存在零点．**函数单调，则存在一个零点。**

函数零点个数的判断方法：(1)直接求零点；

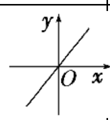
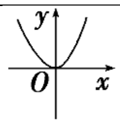
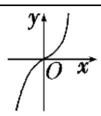
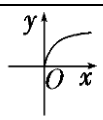
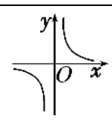
(2)利用零点存在性定理，再结合**函数的单调性**确定零点个数；

(3)利用函数**图象的交点个数**判断

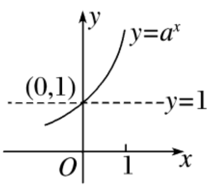
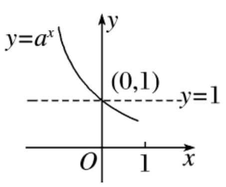
12、幂函数

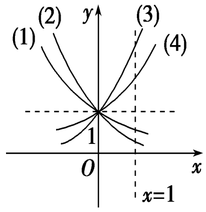
幂函数定义： 形如 $y=x^{\alpha}$ 的函数称为幂函数

当 $\alpha>0$ 时，$y=x^{\alpha}$ 在 $[0，+\infty)$ 上为增函数；当 $\alpha<0$ 时，$y=x^{\alpha}$ 在 $(0，+\infty)$ 上为减函数．

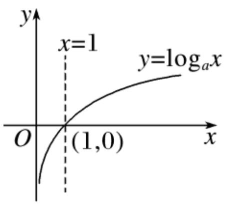
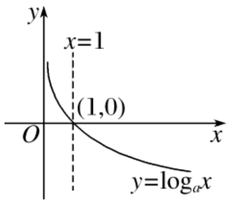
性质 函数	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$y=\frac{1}{x}=x^{-1}$
图象					
定义域：*x* 左右	R	R	R	$\{x\mid x\geq 0\}$	$\{x\mid x\neq 0\}$
值域：*y* 上下	R	$\{y\mid y\geq 0\}$	R	$\{y\mid y\geq 0\}$	$\{y\mid y\neq 0\}$
奇偶性	**奇**	**偶**	**奇**	**非奇非偶**	**奇**
单调性	**增**	**(−∞，0)减 (0，+∞)增**	**增**	**增**	**(−∞，0)和 (0，+∞)减**
公共点	**(1,1)**				

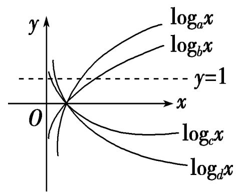
13、指数函数

指数函数 $y=a^x$	① $a>1$	② $0<a<1$
图象		
定义域	**R**	
值域	$(0，+\infty)$	
性质	过定点(0,1) 即 $x=0$ 时，$y=1$	
	当 $x>0$ 时，$y>1$；当 $x<0$ 时，$0<y<1$	当 $x>0$ 时，$0<y<1$；当 $x<0$ 时，$y>1$
	在(−∞，+∞)上是**增**函数（**同号**）	在(−∞，+∞)上是**减**函数（**异号**）

(1)$y=a^x$
(2)$y=b^x$
(3)$y=c^x$
(4)$y=d^x$

$c>d>1>a>b$

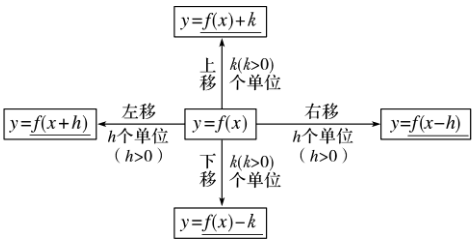
14、对数函数

对数函数 $y=\log_a x$	① $a>1$	② $0<a<1$
图象		
定义域	$(0,+\infty)$	
值域	**R**	
性质	过定点$(1,0)$，即 $x=1$ 时，$y=0$	
	当 $x>1$ 时，$y>0$； 当 $0<x<1$ 时，$y<0$	当 $x>1$ 时，$y<0$； 当 $0<x<1$ 时，$y>0$
	在$(0,+\infty)$上是**增**函数（**同号**）	在$(0,+\infty)$上是**减**函数（**异号**）

(1)$y=\log_a x$
(2)$y=\log_b x$
(3)$y=\log_c x$
(4)$y=\log_d x$

$0<c<d<1<a<b$

15、四种图像变换

(1)平移变换



(2)对称变换

①$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于}x\text{轴对称}}y=-f(x)$；

②$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于}y\text{轴对称}}y=f(-x)$；

③$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于原点对称}}y=-f(-x)$；

(3) 伸缩变换

①$y=f(x)\xrightarrow[0<a<1\text{，横坐标伸长为原来的}\frac{1}{a}\text{倍，纵坐标不变}]{a>1\text{，横坐标缩短为原来的}\frac{1}{a}\text{倍，纵坐标不变}}y=f(ax)$；

②$y=f(x)\xrightarrow[0<a<1\text{，纵坐标缩短为原来的}a\text{倍，横坐标不变}]{a>1\text{，纵坐标伸长为原来的}a\text{倍，横坐标不变}}y=af(x)$.

(4)翻折变换

①$y=f(x)\xrightarrow[\text{将}x\text{轴下方图象翻折上去}]{\text{保留}x\text{轴上方图象}}y=|f(x)|$

②$y=f(x)\xrightarrow[\text{关于}y\text{轴对称的图象}]{\text{保留}y\text{轴右边图象，并作其}}y=f(|x|)$.

导数部分

1、导数公式

1、函数 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的**平均变化率**：$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

2、**导数定义**：$f(x)$ 在点 x_0 处的**导数（瞬时变化率）**记作 $y'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

3、函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数的几何意义--切线的斜率

切点 $P(x_0,f(x_0))$，斜率 $k=f'(x_0)$，切线方程：$\boldsymbol{y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)}$.

	4、常见函数的导数 常函数 $f(x)=c$(c 为常数)　　$f'(x)=0$ 幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$　　$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ 三角函数 $f(x)=\sin x$　　$f'(x)=\cos x$ $f(x)=\cos x$　　$f'(x)=-\sin x$ 指数函数 $f(x)=a^x$　　$f'(x)=a^x\ln a$ $f(x)=e^x$　　$f'(x)=e^x$ 对数函数 $f(x)=\log_a x$　　$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$ $f(x)=\ln x$　　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ 5、导数的运算法则 ① $[kf(x)]'=\mathrm{k}f'(x)$　　常数不用导 ② $\left[f(x)\pm g(x)\right]'=f'(x)\pm g'(x)$　　各自导各自 ③ $\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　　前导后不导加上后导前不导 ④ $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}\left(g(x)\neq 0\right)$ 上导下不导减去下导上不导 除以分母的平方 6、复合函数的导数 复合函数 $y=f(g(x))$的导数和函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$的导数间的关系为 $y_x'=y_u'\cdot u_x'$

2、导数研究函数	**1、求导** **2、因式分解** **3、令 $f'(x)=0$，解得 x 的值，即极值点** **4、求单调性：** $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$是增函数； $f'(x)<0\Rightarrow f(x)$为减函数. **5、求极值：列表得极值：** ①如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，那么 $f(x_0)$是极大值； ②如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，那么 $f(x_0)$是极小值 **6、函数的最值** ①连续函数 $f(x)$在闭区间$[a，b]$上必有最大值与最小值. ②将函数的**极值**与**端点处**的值 $f(a)$，$f(b)$比较，最大的为最大值，最小的为最小值.

第三部分：三角函数（公式、图像、解三角形）

1、角的概念与弧度制

⑴ 角的概念：任意角的定义；正角（逆）、负角（顺）、零角；象限角轴上角；终边相同的角（代表+周期）

⑵ 角度制与弧度制的互化：$\pi = 180^\circ$ ， $1 \approx 57^\circ$

2、扇形弧长扇形面积

⑴ 圆的周长 $c = 2\pi r$；圆的面积 $S = \pi r^2$

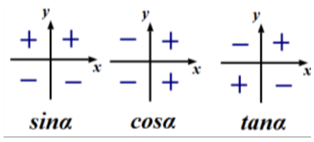
⑵ 扇形的弧长公式：$l = |\alpha| r$；

⑶ 扇形面积公式：$S = \frac{1}{2} lr = \frac{1}{2}|\alpha| r^2$

3、三角函数的定义

⑴ 三角函数的定义:角 α 终边上任一点 P(x,y),设 $|OP| = r$

则：$\sin\alpha = \frac{对}{斜} = \frac{y}{r}$　　$\cos\alpha = \frac{邻}{斜} = \frac{x}{r}$　　$\tan\alpha = \frac{对}{邻} = \frac{y}{x}$



⑵ 三角函数的符号：一全正，二正弦，三正切，四余弦

⑶ 特殊角的三角函数值：（单位圆或查表）

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0

4、同角关系式

⑴ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　　知一求二 $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$；平方搭桥 $(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm 2\sin\alpha\cos\alpha$；

⑵ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　弦切互化（分式齐次，分子分母同除以 $\cos\theta$）

5、诱导公式

⑴ 诱导公式的作用：化简 $\Rightarrow$ 大角化小角，负角化正角，最好化成特殊角.

⑵ 谨记：出现**轴上角**才用诱导公式

⑶ 口诀：“奇变偶不变，符号看象限”

6、两角和差

⑴ $S_{\alpha\pm\beta}$：$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$；

⑵ $C_{\alpha\pm\beta}$：$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$；

⑶ $T_{\alpha\pm\beta}$：$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

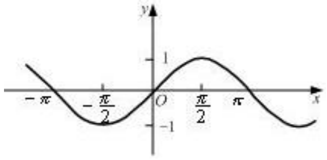
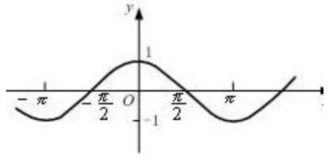
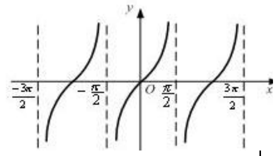
配角技巧：所求角表示为已知角和特殊角的和、差、倍的形式。

7、二倍角、降幂公式

(1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.　　(2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$.

(3) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.　　<u>**降幂公式**</u>：$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$;$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

8、三角函数图像

		$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象				
定义域		R	R	$\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\}$
值域		[-1,1]	[-1,1]	R
周期性 T		2π	2π	π
奇偶性		奇函数，图像关于原点对称	偶函数，图像关于 y 对称	奇函数，关于原点对称
最值		当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$y_{\max}=1$ 当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$y_{\min}=-1$	当 $x=2k\pi$，$y_{\max}=1$ 当 $x=2k\pi+\pi$，$y_{\min}=-1$	无最大值 无最小值
单调性	**增函数**	$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$	$[-\pi+2k\pi,2k\pi]$	$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$ 单调递增，无递减区间
	减函数	$[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi]$	$[2k\pi,\pi+2k\pi]$	
对称性	**点**	对称中心（$k\pi,0$）	对称中心（$k\pi+\frac{\pi}{2},0$）	对称中心（$\frac{k\pi}{2},0$）
	直线	对称轴 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$	对称轴 $x=k\pi$	无对称轴

周期与对称性之间的关系：相邻两对称中心（两对称轴）间隔半个周期$\frac{1}{2}T$；相邻对称中心与对称轴间隔$\frac{1}{4}T$。

9、辅助角公式

$y = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$　　$\tan\varphi = \dfrac{b}{a}, \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

10、三角函数的图像变换

$y=\sin x$ 经过图像变换得到 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$：

方法一：①向左平移$\frac{\pi}{3}$，得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；②横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；

③纵坐标伸长到原来的 2 倍，得到 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；④向上平移 1 个单位长度，得到 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$.

方法二：①横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍，得到 $y=\sin 2x$；②向左平移$\frac{\pi}{6}$，得到 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；③④同上

11、三角函数的解析式

(1) $A=\frac{M-m}{2}$，(2)$B=\frac{M+m}{2}$．(3)ω：先求周期 T，再由 $T=\frac{2\pi}{\omega}$得 ω.

把 A、B、ω 代入 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 中

(4) φ：代特殊点：上升点（$2k\pi,0$）、最高点（$\frac{\pi}{2}+2k\pi,1$）下降点（$\pi+2k\pi,0$）最低点（$\frac{3\pi}{2}+2k\pi,-1$）

即得统一的形式：$y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$

三角函数图像化简思路：

二次化一次（2 倍角、降幂公式），一次再统一（辅助角、两角和差） 即化成统一的形式：$y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$

12、正弦型函数的性质

正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ （$A>0$） 方法：**整体代入**

(1) **周期：**$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$

(2) **奇偶性：当** $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$**时，**$y=A\sin(\omega x+\varphi)=\pm A\cos\omega x$ **偶函数；当** $\varphi=k\pi$ **时，**$y=A\sin(\omega x+\varphi)=\pm\sin\omega x$ **奇函数**

(3) **最值：当** $\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ **时，**y 最大；$\omega x+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ **时，**y 最小。

(4) **单调性：增区间：**$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\omega x+\varphi\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$ **减区间：**$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\omega x+\varphi\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

(5) **对称轴：**$\omega x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$；**对称中心：**$\omega x+\varphi=k\pi$

13、解三角形

⑴ 三角形内角和定理：$A+B+C=\pi\Leftrightarrow C=\pi-(A+B)$

① $\sin C=\sin(A+B)$； ② $\cos C=-\cos(A+B)$； ③ $\tan C=-\tan(A+B)$；

⑵ 三边关系： 两边之和大于第三边 $a+b>c$ ；两边之差小于第三边 $a-b<c$

⑶ 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

边化角：$a=2R\sin A$；$b=2R\sin B$； $c=2R\sin C$

对应关系：$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

⑷ 余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

求角：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$； $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$； $\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$.

⑸ 三角形面积公式 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a\,h_a$($h_a$表示边 a 上的高)；

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A \text{ (两边夹角)}$$

解三角形谨记：常想正弦、余弦、面积公式；正弦余弦两条路，角多用正弦，边多用余弦；

对应关系用正弦，余弦值、平方用余弦；提到面积必用面积公式。

第四部分：解析几何--直线与圆锥曲线（圆、椭圆、双曲线、抛物线）

1、直线的倾斜角与斜率	斜率 $k=\tan\alpha=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ 倾斜角 $\alpha\in\left[0^\circ,180^\circ\right)$，注意：当 $\alpha=90^\circ$ 时，斜率 k 不存在. **一般式 $Ax+By+C=0$ 的斜率 $k=-\dfrac{A}{B}$**

2、五种直线方程

名称	方程	已知条件
(1) 点斜式	$y-y_1=k(x-x_1)$	点$(x_1，y_1)$、斜率 k
(2) 斜截式	$y=kx+b$	斜率 k、在 y 轴上截距 b
(3) 一般式	$Ax+By+C=0$	①ABC 整数；②A 正整数
(4) 两点式	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	两点$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$
（5）截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	x 轴截距 a、y 轴截距 b

3、两条直线的平行和垂直

(1) 若 $l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$

① $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2, b_1\neq b_2$　　② $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

(2) 若 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$

① $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$　　② $l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$

(3) 与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线可设为 $\boldsymbol{Ax+By+c_1=0}$

(4) 与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线可设为 $\boldsymbol{Bx-Ay+c_2=0}$.

4、距离公式

(1) **两点间的距离公式：** $|\boldsymbol{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$　（点 $A(x_1,y_1)$，点 $B(x_2,y_2)$）.

(2) **点到直线的距离：** $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$　（点 $P_0(x_0，y_0)$到直线 l：$Ax+By+C=0$）.

(3) **两平行线之间的距离公式：** $d=\dfrac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$　（$l_1: Ax+By+C_1=0, l_2: Ax+By+C_2=0$）

5、中点公式与对称公式

中点公式：点 $P(x，y)$、点 $P'(x'，y')$的中点 $Q(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$

(1)中心对称：①点 $P(x，y)$关于 $Q(a，b)$的对称点 $P'(x'，y')$满足$\begin{cases}x'=2a-x,\\y'=2b-y.\end{cases}$

②直线关于点的对称可转化为点关于点的对称问题来解决.

(2)轴对称：①点 $A(a，b)$关于直线 $Ax+By+C=0(B\neq 0)$的对称点 $A'(m，n)$，则有$\begin{cases}\dfrac{n-b}{m-a}\times\left(-\dfrac{A}{B}\right)=-1,\\ A\cdot\dfrac{a+m}{2}+B\cdot\dfrac{b+n}{2}+C=0.\end{cases}$

②直线关于直线的对称可转化为点关于直线的对称问题来解决.

6、线性规划

(1) 约束条件：画可行域

(2) 目标函数：①截距型：形如 $z=ax+by$；变形为 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{z}{b}$，分析 z 的最值与截距$\frac{z}{b}$的关系，再平移 $y=-\frac{a}{b}x$

②距离型：形如 $z=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$；表示点$(x，y)$与点$(a，b)$的距离；

③斜率型：形如 $z=\frac{y-b}{x-a}$.表示点$(x，y)$与点$(a，b)$连线的斜率.

7、圆

（1）圆的标准方程： $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.圆心为(a,b)，半径为 r.

（2）**圆的一般方程** $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.圆心为$(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$，半径为 $r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

(表示圆的充要条件 $D^2+E^2-4F>0$).

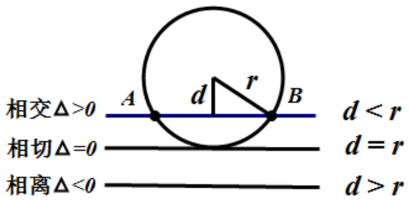
8、直线与圆

直线 $l:Ax+By+C=0$ 与圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系：$\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 比较

（必求 $\boldsymbol{d}$ ）设圆心 C 到直线 l 的距离为 d，且 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

切线方程：(1) 过圆上一点有 1 条切线；先拆后代：过切点 $P(x_0，y_0)$的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

(2) 过圆外一点有且必有 2 条切线（如有 1 条，另一条切线斜率不存在）



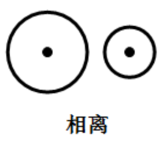
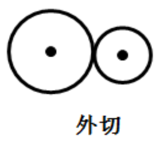
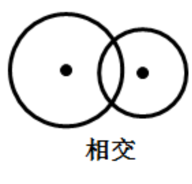
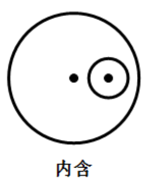
(1) 相交 $d<r$：弦长公式 $AB=2\sqrt{r^2-d^2}$ （求圆的弦长必用）

(2) 相切 $d=r$：切线方程 由 $d=r$ 得斜率 $\boldsymbol{k}$，代入点斜式

$\boldsymbol{y-y_0=k(x-x_0)}$

(3) 相离 $d>r$：距离最大：$\boldsymbol{|PQ|_{max}=d+r}$ 距离最小：$\boldsymbol{|PQ|_{min}=d-r}$

9、圆与圆

位置关系	相离	外切	相交	内切	内含
几何特征	$d>R+r$	$d=R+r$	$R-r<d<R+r$	$d=R-r$	$d<R-r$
图像					
公切线条数	4	3	2	1	0

设两个圆的半径分别为 $R，r$，（$R>r$），圆心距为 d：