

概率密度演化方程

——历史、进展与应用

李 杰 陈建兵

(同济大学土木工程学院土木工程防灾国家重点实验室, 上海200092)

摘 要 从概率密度演化的基本思想出发, 阐述了概率密度演化方程的历史、进展与应用. 文中首先剖析和澄清了概率守恒原理的物理意义, 论述了概率守恒原理的随机事件描述和状态空间描述, 并在此过程中, 阐明了概率密度演化与系统物理演化的内在联系, 即: 系统物理演化构成概率密度演化的内在机制, 在此基础上, 结合概率守恒原理的两类描述与系统状态的物理演化方程, 以与历史上不同的方式重新推导了经典的概率密度演化方程, 包括Liouville方程、FPK方程和Dostupov-Pugachev方程, 进一步阐明了这些方程的物理意义以及何以不能降阶的原因. 进而, 结合概率守恒原理的随机事件描述和解耦的系统物理方程, 导出了广义概率密度演化方程. 分析了广义概率密度演化方程的物理意义, 讨论了数值求解方法. 以非线性结构随机反应分析、结构动力可靠度与体系可靠度计算和控制系统的概率密度演化分析为例, 展示了概率密度演化理论广阔的应用前景. 最后, 指出了需要进一步研究的问题。

关键词 随机动力系统 概率守恒原理 广义概率密度演化方程 概率空间剖分数论方法

Probability Density Evolution Equations: History, Development and Applications

Li Jie Chen Jianbing

(State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, School of Civil Engineering
Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract Starting with the basic thought of probability density evolution, the history, development and applications of the probability density evolution equations in stochastic dynamics are presented. The physical meaning of the principle of preservation of probability is firstly clarified from the random event description and the state space description, respectively. The intrinsic connection between the probability density evolution and the physical evolution of the system is exposed, i.e. the physical evolution of the

system is the physical mechanism of the probability density evolution. Based on the above understanding, incorporating the state space description of the principle of preservation of probability with different types of physical equations, the classical probability density evolution equations including the Liouville, FPK and the Dostupov-Pugachev equation are derived in the ways different from that were done in history. The physical meanings of these equations are clarified and the reason why the dimension of these equations is tied with the dimension of the studied stochastic dynamical systems is interpreted. Further, incorporating the random event description of the principle of preservation of probability with the uncoupled physical equations, the generalized density evolution equation is reached. The physical sense of the generalized density

evolution equation is revealed. Numerical methods for the implementation of the probability density evolution theory are outlined. The stochastic response analysis of nonlinear structures, dynamic reliability and system reliability evaluation and the probability density evolution analysis of controlled systems are taken as examples to illustrate the engineering applications. The problems open are outlined.

Keywords stochastic dynamical system; principle of preservation of probability; generalized density evolution equation; partition of probability-assigned space; number theoretical method

1 引言

随机动力系统分析是科学与工程领域中广泛存在的基础科学问题. 在土木工程中, 由于地震、强风、巨浪和爆炸等灾害性荷载在时间、空间和强度上均具有强烈的随机性, 使得工程结构的反应性态可能产生大幅度涨落, 很难避免工程结构进入非线性受力状态. 因此, 考虑随机性与非线性相耦合的非线性随机动力系统的分析尤为重要.

在历史上, 由于认识问题的先后和研究处理的方便, 人们往往将系统激励的随机性与系统参数的随机性分开处理, 形成了以考虑激励随机性为主的随机振动理论(朱位秋, 1992)和以考虑系统参数随机性为主的随机结构分析理论(李杰, 1996).

自20世纪50年代中期以来, 随机振动理论在航空航天、机械、土木和海洋工程等领域获得了巨大的发展(Crandall, 1958; Lin, 1967). 迄至20世纪80年代, 国内外学者在功率谱分析、矩演化方程和FPK方程等方面进行了大量的、卓有成效的研究, 使得对于线性系统平稳反应的分析理论基本趋于完备, 并已经开始进入工程实用阶段(Lutes & Sarkani, 2004; 林家浩和张亚辉, 2004). 然而, 对于非线性系统, 尤其是在多自由度体系分析方面, 人们仍然面临巨大的困难(Lin & Cai, 1995; Naess & Moe, 2000). 20世纪90年代以来, 以朱位秋教授等基于Hamilton理论体系获取FPK方程平稳解的努力为代表, 非线性随机振动理论取得了令人瞩目的重要进展(朱位秋, 2003; Zhu, 2006). 然而, 对于一般非线性动力系统的非平稳反应分析问题, 则仍然存在尚未克服的困难.

在另一方面, 对于主要考虑结构系统参数随机性的随机结构分析, 自20世纪60年代中期以来亦获得了长足的发展. 到20世纪90年代中期, 已经形成随机模拟方法、随机摄动方法和正交多项式展开理论三足鼎立的局面. 其中, 随机模拟方法被认为具有较为广泛的适用性(Shinozuka & Jan, 1972), 但是, 巨大的计算工作量, 使得它对大多数实际结构问题是难以接受的, 在提高随机模拟方法的效率方面, 不少学者进行了颇有成效的努力, 然而, 这些进展往往以牺牲随机模拟方法的广泛适用性为代价(Robinstein, 1981; Au & Beck, 2001). 并且, 随机模拟方法在本质上具有随机收敛性质. 这些不足使得它目前主要用于与其他理论方法的校验工作之中. 与此相对照, 随机摄动理论虽然计算工作量大为减小, 但精度和适用性也明显降低, 仅对基本随机变量变异性很小的静力问题, 才可以获得合理的结果(Kleiber & Hien, 1992). 并且, 由于久期项问题的存在, 随机摄动理论并不适合应用于动力问题(Liu et al, 1988). 20世纪80年代末、90年代初发展起来的正交多项式展开理论, 可以较好地解决上述问题, 是线性随机结构系统分析较为满意的途

径(Ghanem &Spanos,1991;李杰, 1996;Li&Liao,2001). 然而, 迄至20世纪末, 对于非线性随机结构分析问题, 虽然业已展开诸多探索, 但仍然存在难以逾越的困难(Schueller,1997). 事实上, 由于非线性分析的特殊性, 沿着矩演化的思路分析, 在本质上不

具有可行性.

过去数年间,我们从概率密度演化的基本思想出发,发展了一类概率密度演化理论,建立了广义概率密度演化方程,在线性与非线性多自由度结构系统随机反应分析、动力可靠度和体系可靠度计算以及基于可靠度的结构控制方面取得了较为系统的研究进展(李杰和陈建兵, 2003a, 2003b, 2006; Li & Chen, 2004, 2006a; Li & Chen, 2008; Chen & Li, 2009). 研究表明:沿着物理随机系统的基本思想(李杰, 2006; Li & Chen, 2009), 概率密度演化理论可望解决非线性随机动力系统分析与控制中的一系列问题. 本文试图从概率守恒原理出发, 较为全面地阐述概率密度演化理论的历史、进展与应用状况.

2 随机动力系统分析的现象学传统和物理学传统

近百年来, 随机动力系统分析得到了物理学、化学、数学和工程领域众多研究者的重视, 已经发展为蔚为大观的洪流. 但总其大要, 仍然清晰可见分别发端于Einstein 和Langevin的两条基本脉络.

一般认为, 随机动力系统分析可以追溯到1905年Einstein对Brown运动的研究(Einstein, 1905). 1827年, 英国植物学家Brown在用显微镜观察花粉在水中的现象时, 发现花粉粒子总是在作不规则的运动. 此后, 通过大量学者的观察分析和研究, 排除了这一运动是生命现象的可能. 然而, 直到19世纪末, 虽然逐步意识到Brown运动可能是分子运动引起的, 但对其物理机制仍然不甚清楚, 更没有量化的理论可以进行解释(Pais, 1982). 1905

年, Einstein对这一问题进行了深入研究, 他认为Brown运动是由于Brown粒子受到周围液体分子的不规则碰撞而产生的. 这些不规则碰撞是瞬时的、大量的和随机产生的, 因而, Brown粒子会产生随机游动. 在这一理解的基础上, 他推导了粒子密度的演化方程, 发现这一方程属于扩散方程. 这一思想进而于1914年由Fokker、1917年由Planck加以发展, 从而导出了后来物理学家称之为Fokker-Planck方程的概率密度演化方程(Fokker, 1914; Planck, 1917). 1931年, 苏联数学家Kolmogorov独立地导出了同一方程, 并同时得到了后向Kolmogorov方程, 从而为这一方程建立了严格的数学基础(Kolmogorov, 1931). 因此, 这一著名方程也被称为Fokker-Planck-Kolmogorov(FPK)方程. 值得注意的是: 虽然Einstein最早是从考虑分子的不规则随机碰撞这一物理机制出发的, 但他处理方法的要点, 则是采用了粒子群的演化和扩散这一现象学方法. 由于Kolmogorov的卓越工作, 人们开始将随机动力系统分析问题转化为对确定性偏微分方程的研究, 此后, 对数学方面的关注远远超过了对物理方面的考量.

发端于Einstein, 沿着Einstein—Fokker—Planck—Kolmogorov这一脉络的研究, 不妨称之为随机动力系统研究的现象学传统.

几乎与Einstein同时, Langevin对单个Brown粒子运用牛顿运动定律进行了研究(Langevin, 1908). 在Langevin的研究中, 周围液体分子对该粒子的随机碰撞的合力表现为一个作用在粒子上的非规则力(随机力). 有意思的是, 虽然从完全不同的途径出发, 在引

入关于粒子受到的随机力的若干基本特性的假定前提下, Langevin 采用非常简单的运算即得到了与Einstein 完全相同的耗散-扩散关系. 这一结果给人们如此深刻的印象, 使得人们相信: 虽然Langevin 关于随机力的非规则性假设有些奇怪, 但这必定是一条非常有效的、独立的新道路. 然而, 人们发现, 对于随机力与动力系统运算规则的Langevin式处理, 有时会

得到错误的结果(Gardiner,1985).20 世纪20年代初, Wiener 对于Brown 运动过程的样本轨迹特性进入了深入的研究,从而为正确理解 Langevin 假定的意义奠定了基础(Wiener, 1923).20世纪40年代初、中期, Ito 对随机过程与随机积分进行了系统的研究,并提出了 Ito 微积分的严格定义(Ito,1942,1944), 从而澄清了与Langevin 方程随机力相关的积分运算的意义,表明 Langevin 随机力可以利用数学白噪声进行模型化.60年代初期, Stratonovich 进一步提出了物理白噪声解释(Stratonovich,1963). 不久, Wong 和 Zakai(1965) 建立了Ito 和 Stratonovich 微积分的关系.

肇始于 Langevin, 沿着Langevin—Ito—Stratonovich 这一脉络的研究,是以物理系统运动定律为基础的随机微分方程作为基本的研究主体,因之,不妨称之为随机动力系统研究的物理学传统.

虽然在大体上可以理清随机动力系统研究的两条基本思路,然而,这两条思路并不是毫不相干的.事实上,白噪声假定的引入、Ito 随机微分方程与FPK 方程转化关系的建立,可以认为是两条思路的重要关联点.非常有趣的是:发端于Einstein 的现象学传统源于对Brown 运动的物理机制理解,而发端于Langevin 的物理学传统则由于对随机力的白噪声化处理而引入了现象学的痕迹.因此,人们通常认为的Langevin 方程或Ito 随机微分方程是轨迹描述的观点是不全面的.

我们认为:对多维非线性随机动力系统的研究,需要对以上两条思路深入剖析,在物理随机系统的思想框架里形成新的研究道路.在研究过程中,我们发现:物理和力学规律导致的系统物理状态演化是概率密度演化的基础.这一事实,在历史的研究中完全没有获得应有的注意与重视.甚至,对于随机物理系统基本特性之一的概率守恒原理,虽然在不少文献中模糊地附带提及(Dostupov &Pugachev, 1957; Syski, 1967; Soong, 1973; Lasota & Mackey,1994),也完全没有对其物理意义进行过深入的剖析.而正是基于对概率守恒原理的深刻剖析,我们捕捉到了概率密度演化与物理系统状态演化的内在联系,深化了对于概率密度演化方程的理解,并导出了一类新的广义概率密度演化方程,拓宽了非线性随机动力系统概率密度演化理论研究的道路(李杰和陈建兵, 2006; Li&Chen, 2008).

3 概率守恒原理

3.1 概率守恒原理的随机事件描述

为方便计,考察一个n 维随机动力系统:

$$Y=A(Y,t), Y(t_0)=Y_0$$

(1) 这里, $Y=(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)T$ 为 n 维状态向量, $Y_0=(Y_{0,1}, Y_{0,2}, \dots, Y_{0,m})T$ 为相应的初始 向量, $A(\cdot)$ 为确定性算子.显然,当 Y_0 为随机向量时, $Y(t)$ 将为一个随机过程向量

状态方程(1)事实上建立了一个从 Y_0 到 $Y(t)$ 的映射,不妨记之为

$$Y(t) = g(Y_0, t) = g(Y_0) \quad (2)$$

注意到 Y_0 是一个随机向量，因而 $\{Y_0 \in \Omega_0\}$ 是一个随机事件，这里 Ω_0 是 Y_0 分布空间中的任意区域。根据随机状态方程(1)， Y_0 在时刻 t 演化为 $Y(t)$ ，相应地， Y_0 在时刻 t 所属的区域 Ω_0 在时刻 t 演化为 $Y(t)$ 所属的区域 Ω ，(图1)，即

$$\Omega = g(\Omega, t) = g_0(\Omega_0) \tag{3}$$

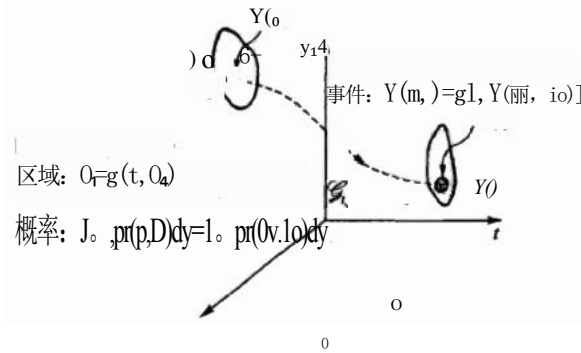


图1 动力系统，映射和概率演化

因此，随机事件 $\{Y_0 \in \Omega_0\}$ 在时刻 t 表现为 $\{Y(t) \in \Omega\}$ 。由于在系统演化过程中没有新的随机源，换言之， $\{Y_0 \in \Omega_0\}$ 和 $\{Y(t) \in \Omega\}$ 是同一个随机事件，因而其概率必然相等，即

$$\Pr\{Y_0 \in \Omega_0\} = \Pr\{Y(t) \in \Omega\} \tag{4}$$

这里， $\Pr\{\cdot\}$ 表示随机事件的概率。记 Y_0 的概率密度函数为 $pr_0(y_0)$ ， $Y(t)$ 的概率密度函数为 $pr(y, t)$ ，其中 $y_0 = (y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,n})^T$ ， $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ，则式(4)意味着

$$\int_{\Omega_0} pr_0(y_0) dy_0 = \int_{\Omega} pr(y, t) dy \tag{5}$$

为更清晰起见，可将 Ω_0 记为 Ω ，并注意到 $pr_0(y, t_0) = pr_0(y)$ ，式(5)成为

$$\int_{\Omega} pr_0(y, t_0) dy = \int_{\Omega} pr(y, t) dy \tag{6}$$

显然，上式对 $t + \Delta t$ 时刻依然成立，从而可得

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} pr(y, t) dy = 0 \tag{7}$$

这里， $D(\cdot)/Dt$ 表示全导数。在此要特别注意，式(7)中不仅被积函数 $pr(y, t)$ 是时变的，而且积分区域 Ω 也是时变的。这一点，从式(4)可以清楚地看到，而其内在原因，则在于 $Y(t)$ 的演化过程是由状态方程(1)所控制的。换言之，是随机系统物理状态的演化导致了概率的迁

移, 因之引起了概率密度的演化. 因此, 全导数 $D(\cdot)/Dt$ 的确切意义是

$$\frac{D}{Dt} \int_{a_1} p_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{a_1 + \Delta t} p_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}, t + \Delta t) d\mathbf{y} - \int_{a_1} p_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \right) \quad (8a)$$

或采用不同的记号等价地表述为

$$\frac{D}{Dt} \int_{a_1} p_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{1}{t' - t} \left(\int_{a_{1'}} p_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}', t') d\mathbf{y}' - \int_{a_1} p_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \right). \quad (8b)$$

式(7)显然是概率守恒原理在随机动力系统 中的体现. 由于它是从同一随机事件所携带的概率不变这一角度获得的结果, 故可称之为概率守恒原理的随机事件描述.

由于随机事件可以是基本随机事件的复合, 即概率空间中的随机事件满足 σ -代数, 因而存在对随机事件分解的可能, 正是这一可能, 孕育了对物理问题采用解耦方式进行考察的

可能性.

值得指出, 在一般概率论教材中都要介绍的随机变量函数的概率密度函数求取方法(王梓坤, 1996), 本质上也是概率守恒原理的随机事件描述的体现, 例如, 设 X 是一个随机变量, 其概率密度函数为 $p_X(x)$, 若

$$Y=f(X), \tag{9}$$

则 Y 也是一个随机变量.

为了获取 Y 的概率密度函数 $p_Y(y)$, 考虑随机事件 $\{Y<y\}$. 显然, 注意到式(9), 则该随机事件等价于 $\{f(X)<y\}$. 若 $f(\cdot)$ 为单调增函数, 则有 $\{f(X)<y\}=\{X<f^{-1}(y)\}$, 从而

$$\Pr\{f(X)<y\}=\Pr\{X<f^{-1}(y)\}, \tag{10}$$

即

$$\int_{-\infty}^y p_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{f^{-1}(y)} p_X(x) dx. \tag{11}$$

两边关于 y 求导, 有

$$p_Y(y) = \frac{\partial f^{-1}(y)}{\partial y} p_X[f^{-1}(y)].$$

若 $f(\cdot)$ 为单调减函数, 则有 $p_Y(y)=-(\partial f^{-1}(y)/\partial y)p_X[f^{-1}(y)]$. 函数, 就有

$$p_Y(y)=|J|p_X[f^{-1}(y)], \tag{13}$$

因而, 只要 $f(\cdot)$ 为单调

这里, $J=\partial f^{-1}(y)/\partial y$ 为 Jacobi量. 若 $f(\cdot)$ 为非单调函数, 记第 j 个反函数为 f_j^{-1} , 则有①

$$p_Y(y) = \sum_{j=1}^m |J_j| p_X[f_j^{-1}(y)]. \tag{14}$$

由此可见, 正是由于存在 X 和 Y 之间的变换关系(式(9))、从而可利用同一随机事件的概率不变(式(10))即概率守恒原理的随机事件描述这一原理获得随机变量 X 和 Y 之间的概率密度函数的联系(式(13)或式(14)).

① 若 $f(\cdot)$ 为非单调函数, 亦可通过如下途径获得式(14):考察随机事件 $\{Y \in (y_1, y_2)\}$;若直线 $y=y_1$ 和 $y=y_2$ 与曲线 $y=f(x)$ 相割获得互不重叠的 m 个区间, 分别记为 $(x_{i,1}, x_{i,2}), i=1, 2, \dots, m, x_i \leq x_{1,2}$, 且当 $i \neq j$ 时, $(x_{i,1}, x_{i,2}) \cap (x_{j,1}, x_{j,2}) = \emptyset$. 注意到若反函数为 $f_i^{-1}, i=1, 2, \dots, m$, 则 $x_{i,2} - x_{i,1} = |f_i^{-1}(y_2) - f_i^{-1}(y_1)|$. 故

$$\Pr\{Y \in (y_1, y_2)\} = \Pr\left\{\bigcup_{i=1}^m \{X \in (x_{i,1}, x_{i,2})\}\right\} = \sum_{i=1}^m \Pr\{X \in (x_{i,1}, x_{i,2})\} = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} p_X(x) dx = \sum_{i=1}^m \int_{y_1}^{y_2} p_X[f_i^{-1}(y)] |J_i| dy = \int_{y_1}^{y_2} p_Y(y) dy$$

亦即 $\cdot 65 \cdot$

$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_X(x) dx$. 记 $y_2 - y_1 = \Delta y$, 当 $y_2 \rightarrow y_1 = y$ 时, $\Delta y \rightarrow 0$, 则根据上式有

$$= \sum_{i=1}^n p_X[f^{-1}(y)] |f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)| = \sum_{i=1}^n p_X[f^{-1}(y)] |\partial f^{-1}(y) / \partial y| \Delta y, \text{ 消去 } \Delta y, \text{ 并记 Jacobi 量 } J_j =$$

$\partial f^{-1}(y) / \partial y$, 最终可得 $p_Y(y) = \sum_{i=1}^n |J_j| p_X[f^{-1}(y)]$. 此即式(14). 从该过程中, 也可进一步体会到如何结合概率守恒原理的随机事件描述和随机变量的函数(映射或变换)关系, 建立映射前后随机变量的概率密度函数之间的关系。顺便指出, 从这里的推导亦可见随机函数概率积分与Lebesgue积分之间的内在联系(Shiryayev, 1996)。

3.2 概率守恒原理的状态空间描述

仍然考察状态方程(1). 此时, 状态方程 $\dot{Y} = A(Y, t)$ 给出了一个 Y 分布空间中在任意时刻 t 的瞬时速度场 $v(y, t) = (v_1(y, t), v_2(y, t), \dots, v_n(y, t))^T$, 亦即, 在状态空间 Y 中的任意点 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 的速度为 $v = A(y, t)$ (如图2). 此时, 考虑该速度场中的任意给定区域 D , 其边界记为 ∂D , 则在给定的任意时间区间 $[t_1, t_2]$ 内, 区域内概率的增量必等于穿越边界进入该区域的概率.

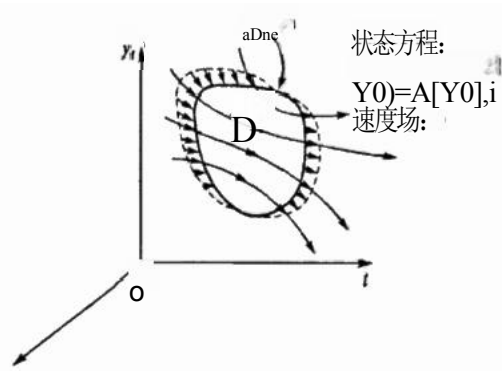


图2 动力系统和概率守恒的状态空间描述

记在时间区间 $[t_1, t_2]$ 内 D 区域的概率增量为 ΔP_D , 即

$$\Delta_{[t_1, t_2]} P_{D_{fixed}} = \int_{D_{fixed}} p_Y(y, t_2) dy - \int_{D_{fixed}} p_Y(y, t_1) dy. \quad (15)$$

在此同一时间区间内穿越边界进入该区域的概率记为 $\Delta c_{1,2} P_{ao}$, 由于区域内没有随机源, 故有

$$\Delta_{[t_1, t_2]} P_{ao} = \Delta c_{1,2} P_{ao} \quad (16)$$

显然, $\Delta c_{1,2} P_{ao}$ 是直接由边界上的速度场与边界面积所决定的. 从图2可见, 在时间 dt 内在速度场 $v(y, t)$ 中穿越边界微元 dS 的面积为 $(v dt) \cdot n dS$, 因此, 穿越边界微元 dS 的概率为 $p_Y(y, t) (v dt) \cdot n dS$, 从而可知

$$\Delta_{[t_1, t_2]} P_{ao} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D_{fixed}} p_Y(y, t) (v dt) \cdot n dS. \quad (17)$$

同时, 式(15)可以改写为

$$\Delta_{[t_1, t_2]} P_{D_{fixed}} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{D_{fixed}} \frac{\partial p_Y(y, t)}{\partial t} dy dt.$$

进而, 式(16)可表为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{D_{fixed}} \frac{\partial p_Y(y, t)}{\partial t} dy dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D_{fixed}} p_Y(y, t) v \cdot n dS dt,$$

此即概率守恒原理的状态空间描述的数学表达.

$$(19)$$

3.3 两类描述的等价性与区别点

上述分析表明, 概率守恒原理可以从随机事件描述和状态空间描述两个不同的角度加以理解. 事实上, 概率守恒原理可以一般地表述为: 在保守的随机系统的状态演化过程中概率守恒(李杰和陈建兵, 2006; Li&Chen,2008). 这里, 保守的随机系统意为在该随机系统的演化过程中既没有已有的随机因素消失, 也没有新的随机因素加入.

虽然初看起来, 随机事件描述和状态空间描述是从两个完全不同的角度观察问题, 但作

为总体描述时, 它们在本质上是等价的. 为了更深入地理解这一点, 不妨考察随机事件 $\{Y(t) \in \Omega_t\}$ 在微小时间区段 $[t, t+dt]$ 内的演化 (图3(a)). 在时刻 $t+dt$, 该随机事件成为 $\{Y(t+dt) \in \Omega_{t+dt}\}$. 显然, 这是从随机事件描述的角度考察问题, 且必然存在

$$\Pr\{Y(t) \in \Omega_t\} = \Pr\{Y(t+dt) \in \Omega_{t+dt}\} \quad (20a)$$

或

$$\int_{\Omega_t} p_Y(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \int_{\Omega_{t+dt}} p_Y(\mathbf{y}, t+dt) d\mathbf{y}. \quad (20b)$$

由于时间区段 dt 甚小, 因此 Ω_t 和 Ω_{t+dt} 的大部分区域是重叠的, 只有边界附近的区域不一致 (图3(a)), 而这是由于速度场 \mathbf{v} 的存在而产生的, 因此, 可将 Ω_{t+dt} 表述为

$$\Omega_{t+dt} = \Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{v} dt) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (21)$$

这里的第二项即为速度场导致的边界运动的影响. 将其代入式 (20b), 并注意到 $\Pr(\mathbf{y}, t+dt) = \Pr(\mathbf{y}, t) + (0 \Pr/\partial t) dt$, 有

$$\int_{\Omega_t} p_Y(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \int_{\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{v} dt) \cdot \mathbf{n} dS} \left(p_Y(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial p_Y}{\partial t} dt \right) d\mathbf{y}. \quad (22)$$

考察等式右端的积分, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{v} dt) \cdot \mathbf{n} dS} \left(p_Y(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial p_Y}{\partial t} dt \right) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega_t} \left(p_Y(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial p_Y}{\partial t} dt \right) d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega_t} \left(p_Y(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial p_Y}{\partial t} dt \right) (\mathbf{v} dt) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{\Omega_t} \left(p_Y(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial p_Y}{\partial t} dt \right) d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega_t} p_Y(\mathbf{y}, t) (\mathbf{v} dt) \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (23)$$

注意, 这里略去了 dt 高阶量的影响. 将式 (23) 代入式 (22), 可知

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial p_Y(\mathbf{y}, t)}{\partial t} dt \right) d\mathbf{y} = - \int_{\partial\Omega_t} p_Y(\mathbf{y}, t) (\mathbf{v} dt) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (24)$$

显然, 两边同时关于 t 在区间 $[t_1, t_2]$ 内积分, 式 (24) 即成为式 (19), 只需将 Ω_t 替换为 D_t 即可. 换句话说, 式 (24) 正是概率守恒原理的状态空间描述的数学形式.

更为直观地, 可以考察一个矩形区域的演化 (图3(b)), 图中可见, 式 (23) 中略去的 dt 的高阶项, 实际上是矩形角部的四个小矩形的影响. 限于篇幅, 具体分析推导从略.

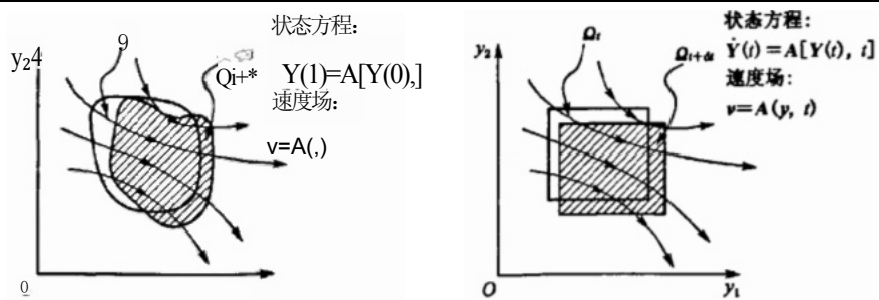


图3 两种描述的等价性

由此可见,从总体描述角度,概率守恒原理的随机事件描述和状态空间描述是完全等价的①.并且,从上述分析过程中,可以清晰地看到,在保守的随机系统中概率守恒.同时,这里也不难发现:概率密度演化的内在机制来源于系统状态的物理演化.

前已述及,随机事件可以是子事件的复合,因而存在对随机事件进行分解的可能.正是这一可能,构成了随机事件描述与状态空间描述的区别点.从前面分析可见,当对随机事件做总体考察时,演化过程中的随机事件与其引起的状态空间中的概率迁移的关系清楚说明了两种描述的等价性.事实上,由于随机事件及其生成的 α -域构成了概率空间 (Ω, S, \mathbb{P})

的分布空间,即基本随机事件及其满足 σ -代数的复合事件的全体构成了总体,当这一概率空间定义于状态空间时,即实现了随机事件向状态空间的转化.而当对随机事件采取个别考察方式时,在一定条件下,诸子随机事件仍然具有所携带概率不变的性质,正是这一性质,构成了随机事件描述的灵活性,形成了与状态空间描述的分水岭.本文后续分析,将更清楚地展现这一点.

4 经典概率密度演化方程

根据概率守恒原理的状态空间描述,结合不同的物理方程,可以导出经典的概率密度演化方程,包括Liouville方程、FPK方程和Dostupov-Pugachev方程.

4.1 Liouville方程

考察具有初始条件的随机动力系统(1).为方便计,将该系统在此重记为

$$Y(t)=A[Y(t),t], Y(t_0)=Y_0, \quad (25)$$

式中各符号意义同式(1),初始向量 Y .为随机向量.

该系统的随机性完全来自于初始条件,由于随机动力系统在任意时刻的状态完全决定于初始条件,而在演化过程中则不再有新的随机因素加入,因此,这是一个保守的随机动力系统,在其演化过程中概率守恒.

当初始条件可为状态空间中的任意点时,随机动力系统

$$Y(t)=A[Y(t),t] \quad (26)$$

决定了任意给定时刻 t 状态空间中的一个速度场 $v(y,t)$:

$$v=A(y,t). \quad (27)$$

这里,对随机动力系统(25),由于状态向量是时变且随机的,因此采用大写字母 $Y(t)$,而对空间中的速度场分布来说, $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 表示状态空间中的一个点,故采用了小写字母.在此应特别注意区分二者的不同含义.

随机振动理论与应用新进展

根据3.2节中的分析,当考察 n 维状态空间中的任意给定区域 D_{ixm} 时,由于在演化过程中没有新的随机因素加入,意味着在状态空间中没有概率产生源,因而速度场式(27)是一个无源向量场,从概率守恒原理的状态空间表达,存在式(19),即

① 从上述分析中,亦不难看到概率守恒原理的随机事件描述与状态空间描述与连续介质物理中的质量守恒律的 Lagrange 描述与 Euler 描述在某些方面的相似性(Fung,1994;Bontempi & Faravelli,1998;Dafermos,2000).

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{D_{\text{fixed}}} \frac{\partial p_Y(\mathbf{y}, t)}{\partial t} d\mathbf{y} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D_{\text{fixed}}} p_Y(\mathbf{y}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS dt. \quad (28)$$

等式右端的速度场由式(27)确定, 将其代入, 可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{D_{\text{fixed}}} \frac{\partial p_Y(\mathbf{y}, t)}{\partial t} d\mathbf{y} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D_{\text{fixed}}} p_Y(\mathbf{y}, t) \mathbf{A}(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{n} dS dt. \quad (29)$$

对等式右端应用无源场的散度定理, 可将边界积分化为体积分, 从而有

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{D_{\text{fixed}}} \frac{\partial p_Y(\mathbf{y}, t)}{\partial t} d\mathbf{y} dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D_{\text{fixed}}} p_Y(\mathbf{y}, t) \mathbf{A}(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{n} dS dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{D_{\text{fixed}}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial [p_Y(\mathbf{y}, t) A_j(\mathbf{y}, t)]}{\partial y_j} d\mathbf{y} dt \end{aligned} \quad (30)$$

注意到时间区间 $[t_1, t_2]$ 和给定区域 D_i 的任意性, 两边的被积函数必相等, 因此

$$\frac{\partial p_Y(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial [p_Y(\mathbf{y}, t) A_i(\mathbf{y}, t)]}{\partial y_i} = 0, \quad (31)$$

此即为经典的Liouville方程.

更为直观地, 还可以从考察一个 n 维状态空间中的 n 维超长方体中的概率流动进行推

导. 设 $\prod_{i=1}^n [y_i, y_i + \Delta y_i] = [y_1, y_1 + \Delta y_1] \times [y_2, y_2 + \Delta y_2] \times \dots \times [y_n, y_n + \Delta y_n]$ 是 n 维状态空间中以任意给定点 (y_1, y_2, \dots, y_n) 为顶点、边长分别为 $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_n$ 的微超长方体. 图4是二维情况的示意图, 为简洁起见, 这里仅显示了速度场的 y_1 方向分量 $v_1(y, t)$. 在 Δt 时间内, 左侧面积 $\Delta s_{1,L}$ 内的概率将穿越边界进入长方形区域, 而右侧 $\Delta s_{1,R}$ 内的概率将穿越边界流出长方形区域. 显然, 左侧区域面积为

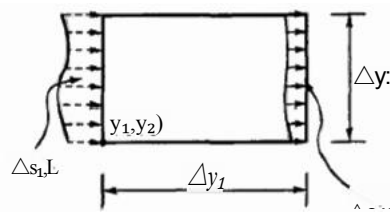


图4 状态空间中超长方体内的概率流动

$$\Delta s_{1,L} = \int_{y_2}^{y_2 + \Delta y_2} v_1(y_1, y, t) dy \Delta t + o(\Delta t),$$

故将要从左侧边界进入长方形区域的概率量为

$$\Delta s_{1,L} = \int_{y_2}^{y_2+\Delta y_2} p_Y(y_1, y, t) v_1(y_1, y, t) dy \Delta t + o(\Delta t). \quad (32a)$$

类似地，将要从右侧边界流出长方形区域的概率量为

$$\Delta s_{1,R} = \int_{y_2}^{y_2+\Delta y_2} p_Y(y_1 + \Delta y_1, y, t) v_1(y_1 + \Delta y_1, y, t) dy \Delta t + o(\Delta t). \quad (32b)$$

因而，这两部分通过边界流入和流出的概率量的代数和为

$$\begin{aligned} \Delta P_1 = \Delta s_{1,L} - \Delta s_{1,R} = & \int_{y_2}^{y_2+\Delta y_2} p_Y(y_1, y, t) v_1(y_1, y, t) dy \Delta t + o(\Delta t) \\ & - \int_{y_2}^{y_2+\Delta y_2} p_Y(y_1 + \Delta y_1, y, t) v_1(y_1 + \Delta y_1, y, t) dy \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{y_2}^{y_2+\Delta y_2} (p_Y(y_1, y, t) v_1(y_1, y) - p_Y(y_1 + \Delta y_1, y, t) v_1(y_1 + \Delta y_1, y, t)) dy \Delta t \\
 &\quad + o(\Delta t) \\
 &= \int_{y_2}^{y_2+\Delta y_2} \left(\frac{\partial p_Y(y_1, y, t) v_1(y_1, y, t)}{\partial y_1} \Delta y_1 + o(\Delta y_1) \right) dy \Delta t + o(\Delta t) \\
 &= \frac{\partial [p_Y(y_1, y_2, t) v_1(y_1, y_2, t)]}{\partial y_1} \Delta y_1 \Delta y_2 \Delta t + o(\Delta y_1) + o(\Delta y_2) + o(\Delta t). \quad (34)
 \end{aligned}$$

同样，在 y_2 方向上亦可获得类似的结果，因此，在所有 n 个方向上通过边界的概率流入量总和为

$$\Delta P_b = \sum_{i=1}^n \Delta P_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial [p_Y(\mathbf{y}, t) v_i(\mathbf{y}, t)]}{\partial y_i} \prod_{i=1}^n \Delta y_i \Delta t + \sum_{i=1}^n o(\Delta y_i) + o(\Delta t). \quad (35)$$

而根据式(18)，在超长方体 $\prod_{i=1}^n [y_i, y_i + \Delta y_i]$ 内的概率增量为

$$\begin{aligned}
 \Delta P_1 &= \int_{\prod_{i=1}^n [y_i, y_i + \Delta y_i]} \frac{\partial p_Y(\mathbf{y}, t)}{\partial t} d\mathbf{y} \Delta t + o(\Delta t) \\
 &= \frac{\partial p_Y(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \prod_{i=1}^n \Delta y_i \Delta t + \sum_{i=1}^n o(\Delta y_i) + o(\Delta t).
 \end{aligned}$$

(36)

根据概率守恒原理的状态空间描述，该区域的概率增量应等于穿越边界进入区域的总概率，即 $\Delta P_1 = \Delta P_b$ 。令式(35)和式(36)相等，注意到两边同时消去 $\prod_{i=1}^n \Delta y_i \Delta t$ ，并注意到速度场由式(27)给出，立即得到与式(31)完全相同的Liouville方程。

历史上，曾经有不少学者从积分不变量和特征函数演化等多个不同的角度导出了这一方程(Kozin,1961;Syski,1967)，但在这些研究对该方程的意义的讨论中，总有隔靴搔痒之感。

在此，应特别指出，只有考虑 n 维状态空间的整体、并观察其中任意区域的概率流动时，概率才是守恒的。如果仅考虑某一个较低维数的子空间，例如仅考虑前 $q(q < n)$ 个状态 $y = (y_1, y_2, \dots, y_q)$ 构成的子空间时，则速度场订 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ $\mathbf{T} = [A_1(y, Y_{q+1},$

$\dots, Y_q), A_2(y, Y_{q+1}, \dots, Y_q), \dots, A_q(y, Y_{q+1}, \dots, Y_q)]$ 是随机的，因为 Y_{q+1}, \dots, Y_q

是随机变量。换言之，此时还存在尚未考虑的概率产生源，因而，由 $\mathbf{Y}(t) = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$

构成的系统本身不是概率守恒的。这是Liouville方程的维数必须和本原随机动力系统

(25)的维数相同的根本原因.

4.2 FPK方程

随机动力系统式(25)中仅考虑了初始条件的随机性,而没有考虑激励的随机性.在大量实际的工程问题中,激励随机性常常是导致系统反应随机性的主导性因素(朱位秋,1992; Lutes & Sarkani,2004),因此,应该给予合理的考虑.

对于多自由度非线性体系分析问题,动力方程可表述为

$$MX+cX+f(X)=I5(t), \quad (37)$$

这里, M 和 C 分别为 $n_4 \times n$ 的质量和阻尼矩阵, f 为 n 维非线性恢复力向量, X, \dot{x} 和 \ddot{x} 分别为 n 维位移、速度和加速度向量, $5(t)$ 为 r 维激励向量, F 为 $n \times r$ 维荷载影响矩阵, 例如当 $5(t)$ 为一维地面运动加速度 $\ddot{x}_2(t)$ 时, $P=-MI$, 这里 $I=\{1,1,\dots,1\}^T$ 为 n 维列向量.

引入状态向量 $Y=(X, \dot{x})^T$, 不难将式(37)改写为如下一般形式的非线性状态方程

$$Y=A(Y,t)+B(Y,t)5(t), \quad (38)$$

其中, Y 为 n 维状态向量, $n=2ng$, A 为 n 维算子向量, $B=[B,;]x$, 为 $n \times r$ 维荷载影响矩阵. A, B 的具体表达式可从式(37)得到, 在此从略.

当激励向量 $\xi(t)$ 为随机向量时, 方程(38)是一个随机微分方程. 对于随机激励, 最理想化的情况是假定激励为白噪声过程, 即

$$E[5(t)]=0, E[\xi(t)\xi^T(t')]=D\delta(t-t'). \quad (39)$$

这里, $D=[D,;]$ 为 $r \times r$ 维方差矩阵, $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 函数. 当采用增量形式时, 有

$$E[dW(t)]=0, E[dW(t)dW^T(t)]=Ddt, \quad (40)$$

其中, $W(t)$ 是一个 r 维 Brown 运动过程(Wiener 过程). 在形式上, $dW(t)=5(t)dt$. 值得指出, 由于 $dW(t)$ 的方差与 dt 同阶, 因此 $dW(t)$ 的样本与 \sqrt{dt} 同阶, 故 $W(t)$ 的样本处处连续而处处不可微(Gardiner,1985). 这一奇异性, 使得白噪声的数学处理颇为方便, 但也使得它在一定程度上远离了客观物理的真实情况.

对于与白噪声过程相关的微积分, 主要有 Ito 微积分与 Stratonovich 微积分(Gardiner, 1985;Oksendal,2005). 由于对一个特定的随机微分方程, 这两种积分是可以转化的, 因此, 这里仅讨论 Ito 微积分. 此时, 随机微分方程(38)称为 Ito 随机微分方程, 并可以写为微分形式

$$dY(t)=A(Y,t)dt+B(Y,t)dW(t). \quad (41a)$$

为直观起见, 不妨进一步写为增量形式

$$\Delta Y(t)=A(Y,t)\Delta t+B(Y,t)\Delta W(t)+o(\Delta t), \quad (41b)$$

其中, $o(\Delta t)$ 表示 Δt 的高阶小量.

从式(41b)可见, 在时间 Δt 内, 状态的变化量 $\Delta Y(t)$ 是两项效应叠加的结果, 其中 $A(Y,t)\Delta t$ 为漂移项(趋势项), $B(Y,t)\Delta W(t)$ 为扩散项. 这表明, 在 n 维状态空间中, 不仅存在一个速度场 $v(y,t)$, 它由

$$y=A(y,t) \quad (42a)$$

确定; 同时, 还存在一个扩散场. 在时刻 t 处于 y 的点, 在时段 Δt 内将发生位移为 $\lambda=B(y,t)\Delta W(t)$ 的扩散, 显然, 这一扩散过程的强度经过了 $B(y,t)$ 的调制, 因而构成一个扩散场, 其扩散均值为零, 方差为

$$\begin{aligned}
 E[MT] &= E[B(y,t)\Delta W(t)\Delta W^T(t)B(y,t)] \\
 &= BDBT\Delta t + o(\Delta t) \\
 &= \sigma(y,t)\Delta t + o(\Delta t),
 \end{aligned}
 \tag{42b}$$

这里, $\sigma(y,t)=[\sigma(y,t)]=B(y,t)DBT(y,t)$.

由此可见, 在n 维状态空间中, 概率流动存在两个来源, 漂移引起的速度场 $v(y,t)$ 和扩散引起的扩散场 $\sigma(y,t)$. 单独地考虑速度场或者单独地考虑扩散场, 状态空间的概率将是不守恒的.

在采用Ito 微分方程的意义下, 漂移和扩散的物理机制不同, 并且在 $\{Y(t)=y\}$ 的条件下, 当 $A(Y,t)$ 和 $B(Y,t)$ 是非可料函数时, 漂移项和扩散项的影响是条件独立的, 这使得对于速度场和扩散场的处理可以分别独立进行.

从状态空间描述的角度, 可以考察状态空间中任意一个给定的超长方体子域 $dy = dy_1 dy_2 \dots dy_n$ 内的概率增量与通过该子域边界的概率流动(图5).

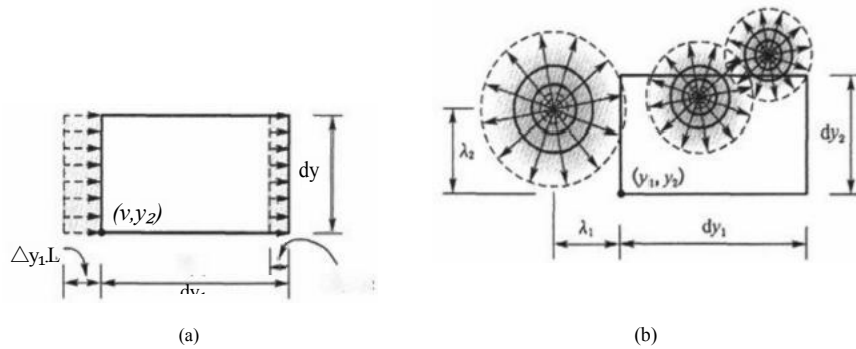


图 5 Ito 随机动力系统的概率运输

在此情况下, 通过边界流入的概率应当是漂移引起的概率流入量 ΔP_{di} 与扩散引起的概率流入量 $\Delta P_{diffusion}$ 之和. 由此, 有

$$\Delta P_0 = \Delta P_{di} + \Delta P_{diffusion} \quad (43)$$

由漂移引起的穿过边界的概率流入由速度场 $v(y,t)$ 决定, 与上节Liouville方程推导过程中的机理完全一致, 因此可以直接采用上节推导的结果, 亦可从图5(a) 示意进行分析. 由式(34), 注意到实际上在微小时间和微小空间内采用规则区域代替图4中的实际非规则区域仅产生高阶小量的误差, 因此, 这里采用了更为简明的规则区域近似. 事实上, 此时, 在时间 Δt 内, 漂移项引起的流入概率是图5(a) 左侧面积 $\Delta y_{1,L} dy_2$ 内的概率, 而通过右边界流出的概率是右侧面积 $\Delta y_{1,R} dy_2$ 内的概率, 由此可得在 y_1 方向的流动引起的概率流量为

$$\begin{aligned} \Delta P_{y_1} = & pr(y_1, y_2, t) \Delta y_{1,L} dy_2 dy_3 \dots dy_n \\ & - pr(y_1 + dy_1, y_2, t) \Delta y_{1,R} dy_2 dy_3 \dots dy_n + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (44)$$

注意到 $\Delta y_{1,L} = A(y_{1,L}, y_2, t) \Delta t + o(\Delta t)$, $\Delta y_{1,R} = A(y_{1,R}, y_2, t) \Delta t + o(\Delta t)$, 可进一步得到

$$\Delta P_{y_1} = - \frac{\partial}{\partial y_1} [A_1(y, t) p_Y(y, t | y_0, t_0)] dy \Delta t + o(\Delta t). \quad (45)$$

根据这一分析, 不难得到, 对n 维超长方体, 由于漂移项影响通过所有边界流入的概率

之和为

$$\Delta P_{\text{drift}} = \sum_{t=1}^n \Delta P_{y_t} = - \sum_{t=1}^n \frac{\partial [A_t(\mathbf{y}, t) p_{\mathbf{y}}]}{\partial y_t} d\mathbf{y} \Delta t + o(\Delta t) \quad (46)$$

为了考察扩散项的影响, 更准确地将前述 $\lambda = B(y,t)\Delta W(t)$ 记为条件随机向量

$$A = B(Y,t)\Delta W(t) | \{Y=y\} = B(y,t)\Delta W(t). \quad (47)$$

显然, 注意到式(40), 可知 λ 的均值与协方差矩阵分别为

$$E[A] = E[B(y,t)\Delta W(t)] = 0, \quad (48a)$$

$$\begin{aligned} E[aT] &= E[B(y,t)\Delta W(t)\Delta W^T(t)B(y,t)] = BDB^T\Delta t + o(\Delta t) \\ &= \sigma\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (48b)$$

为方便计, 已令 $\sigma = [0;] = BDB^T$.

若记 λ 的联合概率密度函数为 $\phi_a(\lambda; y, t, \Delta t)$, 根据相容性条件有

$$\int \phi_a(\lambda; y, t, \Delta t) d\lambda = 1, \quad (49a)$$

而式(48a)和式(48b)则意味着

$$\int \lambda_i \phi_a(\lambda; y, t, \Delta t) d\lambda = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\int \lambda_i \lambda_j \phi_a(\lambda; y, t, \Delta t) d\lambda = \sigma_{ij} \Delta t + o(\Delta t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (49b)$$

对于给定的 y , 在时刻 t 状态出现在 $y+\lambda$ 附近的概率为 $\int_{y_0, t_0}^{y+\lambda, t} \phi_a(\lambda; y, t, \Delta t) d\lambda$, 在 $t+\Delta t$ 时刻该状态扩散到区域 dy 的概率为 $\int_{y_0, t_0}^{y+\lambda, t} p_T(y, t+\Delta t | y+\lambda, t) p_T(y+\lambda, t | y_0, t_0) d\lambda$, 这里, $p_T(y, t+\Delta t | y+\lambda, t)$ 是从时刻 t 到 $t+\Delta t$ 的转移概率(图5(b)). 因此, 在 $t+\Delta t$ 时刻 dy 内的概率是

$$p_T(y, t+\Delta t | y_0, t_0) dy = dy \int p_T(y, t+\Delta t | y+\lambda, t) p_T(y+\lambda, t | y_0, t_0) d\lambda. \quad (50)$$

显然, 转移概率密度函数即为条件随机变量 λ 的概率密度函数, 即

$$p_T(y, t+\Delta t | y_0, t_0) dy = dy \int \phi_a(\lambda; y+\lambda, t, \Delta t) p_T(y+\lambda, t | y_0, t_0) d\lambda. \quad (51)$$

从而, 式(50)成为

$$p_T(y, t+\Delta t | y_0, t_0) dy = dy \int \phi_a(\lambda; y+\lambda, t, \Delta t) p_T(y+\lambda, t | y_0, t_0) d\lambda \quad (52)$$

在时间 Δt 内, 区域 dy 中由于扩散引起的概率增量为

$$\Delta P_{dfuaion} = \int_{y_0, t_0}^{y+\lambda, t} p_T(y, t+\Delta t | y_0, t_0) dy - \int_{y_0, t_0}^{y, t} p_T(y, t | y_0, t_0) dy. \quad (53)$$

将式(52)的被积函数在 y 附近展开至二阶, 有

$$\phi_1(\lambda; y+\lambda, t, \Delta t) p_Y(y+\lambda, t | y, t_0)$$

$$= \phi_1(\lambda; y, t, \Delta t) p_Y(y, t | y_0, t_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_1 p_Y}{\partial y_i} \lambda_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi_1 p_Y}{\partial y_i \partial y_j} \lambda_i \lambda_j + \dots \quad (54)$$

将其代入式(52), 并注意到式(49a)一式(49c), 有

$$\begin{aligned}
 p_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}, t + \Delta t | \mathbf{y}_0, t_0) d\mathbf{y} &= d\mathbf{y} \int \left(\phi_{\mathbf{r}} p_{\mathbf{r}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_{\mathbf{r}} p_{\mathbf{r}}}{\partial y_i} \lambda_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{r}} p_{\mathbf{r}}}{\partial y_i \partial y_j} \lambda_i \lambda_j + \dots \right) d\lambda \\
 &= d\mathbf{y} \left(p_{\mathbf{r}} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 [p_{\mathbf{r}} \sigma_{ij} \Delta t]}{\partial y_i \partial y_j} \right). \tag{55}
 \end{aligned}$$

代入式(53)中, 可知

$$\Delta P_{\text{diffusion}} = d\mathbf{y} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 [p_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}]}{\partial y_i \partial y_j} \Delta t. \tag{56}$$

结合式(43)、式(46)和式(56), 可得同时考虑漂移和扩散效应时穿过边界的概率流量为

$$\Delta P_{\mathbf{b}} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial [A_i(\mathbf{y}, t) p_{\mathbf{r}}]}{\partial y_i} d\mathbf{y} \Delta t + d\mathbf{y} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 [p_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}]}{\partial y_i \partial y_j} \Delta t + o(\Delta t). \tag{57}$$

因此, 根据概率守恒原理, 该概率流量应等于概率增量:

$$\Delta P_{\text{increment}} = \frac{\partial p_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} d\mathbf{y} \Delta t + o(\Delta t).$$

令上述两式相等, 同时消去 Δt , 并注意到 $d\mathbf{y}$ 的任意性, 可得

$$\frac{\partial p_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial [A_i(\mathbf{y}, t) p_{\mathbf{r}}]}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 [p_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}(\mathbf{y}, t)]}{\partial y_i \partial y_j}. \tag{59}$$

此即与随机动力系统(41)相联系的概率密度演化方程——FPK方程. 式中, $p_{\mathbf{r}}$ 可理解为概率密度函数 $p_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}, t)$, 亦可理解为转移概率密度函数 $p_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}, t | \mathbf{y}_0, t_0)$.

从上述推导过程可知, FPK方程事实上是概率守恒原理的状态空间描述与随机动力系统物理方程相结合的结果. 它同时表明, 概率密度的演化是与动力系统演化的物理机制相联系的. 同样值得指出: 仅仅考虑 $\mathbf{Y}(t)$ 的某个子集的演化区域所在的子空间时, 概率是不守恒的, 因之, FPK方程的维数必定和本原随机动力系统式(38)的维数相同.

正如经典研究所指出的那样, 也可以从Chapman-Kolmogorov方程的角度获得FPK方程(Gardiner, 1985), 兹不赘述.

4.3 Dostupov-Pugachev方程

Liouville方程和FPK方程分别是仅有初始条件具有随机性和仅有激励具有随机性的随机动力系统的概率密度演化方程. 1957年, Dostupov和Pugachev从随机激励系统出发, 通过对随机激励实施正交分解, 将随机激励的动力系统转化为具有随机参数的动力系统, 导

出了一类概率密度演化方程(Dostupov & Pugachev, 1957). 更广义地说, 这一类方程可以认为是考虑动力系统参数随机性情况下的概率密度演化方程. 这里, 我们从概率守恒原理出发导出这一方程。

考察如下一类随机动力系统:

$$\dot{Y} = A(Y, \theta, t), Y(t) = Y_0 \quad (60)$$

其中, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ 为系统参数中的 s 个随机变量, 其概率密度函数 $p_\theta(\theta)$ 已知, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$.

与系统式(25)不同,系统式(60)中不仅可能含有来自初始条件 Y_0 的随机性,还含有来自参数 Θ 的随机性.因此,与系统式(25)确定了 $Y(t)$ 所演化的 n 维状态空间中的一个速度场式(27)不同,在系统式(60)中,在 $Y(t)$ 所演化的 n 维状态空间中不能确定一个速度场,或者更明确地说,因为其中含有随机参数 Θ ,由系统式(60)所确定的速度场

$$v=A(y,0,t) \tag{61}$$

仍然是随机的.换句话说,在系统演化过程中存在尚未考虑到的概率产生源,因之,系统(60)不是一个概率守恒系统.为了使得在某个空间中所考察的系统是概率守恒的,必须将所有的概率产生源均纳入该系统,正如在4.2节对于系统式(38)的分析一样.

对系统式(60),将 Θ 所导致的概率产生源加以同时考虑.此时,对于系统 $(Y(t),\Theta)$ 所构成的扩展状态空间,其中的任意一点可表示为 (y, θ) ,这时,系统 $(Y(t),\Theta)$ 的演化确定了一个确定性的速度场:

$$v=Y(y,\theta,t), \tag{62}$$

这里, $v=(v_i, E)T$, 其中 $v_i=A(y,\theta,t)$, $v_0=0$, 里 $(y,\theta,t)=[A'(y,\theta,t), 0F]T=(v_1, W_2, \dots, v_n+1)T$. 由此可见, $(Y(t),\Theta)$ 是一个概率守恒系统.

记 $(Y(t),\Theta)$ 的联合概率密度函数为 $pre(y,\theta,t)$. 考察扩展状态空间 $Qy \times \Omega$. 中的任意区域 $D_n=Q \times \Omega$, 这里, Q , 是 Θ 分布空间中的任意区域, Q , 是 $Y(t)$ 分布空间中的相关区域, 根据概率守恒原理的状态空间描述, 由式(19), 有

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{D_{fixed}} \frac{\partial p_{Y\Theta}(y, \theta, t)}{\partial t} dyd\theta dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D_{fixed}} p_{Y\Theta}(y, \theta, t) v \cdot ndSdt. \tag{63}$$

将速度场式(62)代入右端, 可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{D_{fixed}} \frac{\partial p_{Y\Theta}(y, \theta, t)}{\partial t} dyd\theta dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D_{fixed}} p_{Y\Theta}(y, \theta, t) \Psi \cdot ndSdt.$$

对等式右端应用无源场的散度定理, 并注意到速度场的表达, 有 (64)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{D_{fixed}} \frac{\partial p_{Y\Theta}(y, \theta, t)}{\partial t} dyd\theta dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D_{fixed}} p_{Y\Theta}(y, \theta, t) \Psi \cdot ndSdt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{D_{fixed}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial [p_{Y\Theta}(y, \theta, t) \Psi_i(y, \theta, t)]}{\partial y_i} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^i \frac{\partial [p_{Y\Theta}(y, \theta, t) \Psi_{n+i}(y, \theta, t)]}{\partial \theta_i} \right) dyd\theta dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{D_{fixed}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial [p_{Y\Theta}(y, \theta, t) A_i(y, \theta, t)]}{\partial y_i} \right) dyd\theta dt. \end{aligned} \tag{65}$$

进一步, 注意到 D_{fixed} 和 $[t_1, t_2]$ 的任意性, 立得

$$\frac{\partial p_{\mathbf{y}\theta}(y, \theta, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial [p_{\mathbf{y}\theta}(y, \theta, t) A_i(y, \theta, t)]}{\partial y_i} = 0. \quad (66)$$

此即Dostupov-Pugachev 方程,不妨简称为D-P 方程.

值得指出,在Dostupov 和Pugachev 的工作中,是从直接引入伴随参数的角度出发推导这一方程的,因此,也可以称之为参数Liouville 方程,但是这一提法并不能准确地反映该方程作为概率守恒原理的体现的实质. Soong (1973) 则将随机参数引入初始条件中,从而从推广 Liouville 方程的角度获得了同一方程,在此方法中,更多地是利用了数学形式上的处理而不是物理意义的准确阐明.

5 广义概率密度演化方程

5.1 从运动方程到解耦状态方程

考察一般多自由度结构体系的运动方程:

$$M(\eta)X+C(\eta)X+f(\eta,X)=r5(t), \quad (67)$$

式中, $\eta=(m, \eta, \dots, \eta)$ 为反映结构物理参数随机性的随机参数,其余各符号的意义同式(37). 显然,当 $f(X)=KX$ 的时候,式(67)是一个线性系统,否则为非线性系统,这里, K 为 $n_g \times n$. 刚度矩阵. 为简便计,在此进一步考虑仅有一个随机激励的情形,对具有多个随机激励的场合,可以自然地进行推广. 此时

$$M(\eta)X+C(\eta)X+f(\eta,X)=IE(t). \quad (68)$$

若激励为随机地震动加速度 $g(t)=X_d(t)$, 则 $F=-MI$, $I=(1, 1, \dots, 1)^T$, x, \dot{x}, X 分别为结构相对于地面运动的相对加速度、相对速度和相对位移.

对工程中常遇到的随机动力激励,如地震、风和海浪等,可以采用物理随机过程的基本思想建模(李杰和艾晓秋, 2006;李杰和张琳琳, 2007;李杰, 2009). 而对于一般的随机场和随机过程,则可采用 Karhunen-Loève 分解方法,将其表述为基本随机变量的函数(Loève, 1977). 研究表明,采用基于 Hartley 正交基函数的正交展开并结合相关结构正交分解,可以采用较少项数对随机过程进行合理地表达(详见附录1). 例如,对于地震地面运动,有(李杰和刘章军, 2006)

$$X_g(\zeta, t) = \sum_{j=1}^2 \zeta_j \sqrt{\lambda_j} f_j(t), \quad (69)$$

其中, $5=(5_1, 5_2, \dots, 5_2)$ 为不相关随机变量, $E[5_j 5_k]=\delta_{jk}$, δ 为Kronecker记号,

$$f_j(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{j,k+1} \varphi_k(t), \quad (70)$$

这里, $\phi(t)$ 是 Hartley 正交基函数:

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), k=0,1,2,\dots, \quad (71)$$

而地震动加速度则可以进一步表达为

$$\ddot{X}_g(\zeta, t) = \sum_{j=1}^n \zeta_j \sqrt{\lambda_j} F_j(t), \quad (72)$$

式中

$$F_j(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1} \phi_{j,k+1} \ddot{\varphi}_k(t), \quad (73)$$

此处, α_{k+1} 为根据能量等效原则确定的调制系数.

为符号统一起见, 记系统中的基本随机变量为

$$O=(\eta, \xi)=(m, n, \dots, n_1, \xi_1, \dots, \xi_2)=(O_1, O_2, \dots, O), \quad (74)$$

其中, $s=s_1+s_2$ 为系统中随机变量的总个数, 则式(68)在形式上可以改写为

$$M(O)X+C(O)X+f(O,X)=F(O,t), \quad (75)$$

这里, $F(O,t)=rX_s(\xi,t), X_2(g,t)$ 由式(72)表达.

显然, 采用类似的途径, 一般多自由度随机系统方程(67)均可表达为系统方程(75)的形式. 事实上, 虽然在此没有考虑初始条件的随机性, 但当初始条件具有随机性时, 亦可将其并入基本随机参数 O 中, 因此可以认为: 系统方程(75)中已经完全包括了来自初始条件、结构系统参数和外部激励的随机性. 换言之, 对物理系统方程(75), 可以采用统一的方式表示其中的随机性, 而不再像在 Liouville 系统或 Ito 系统中那样根据其现象学上的不同来源采用不同的处理.

应该指出, 当将运动方程(75)转化为随机状态方程(60)的形式, 并从状态空间的角度考察概率迁移时, 将导致 D-P 方程. 回到这一难以求解的高维随机微分方程, 并不是我们所愿意看到的结果. 然而, 在第3节中, 我们已经充分地认识到, 对于概率守恒原理, 不仅可以从状态空间描述来理解, 也可以从随机事件的角度加以考察, 而恰恰是从随机事件描述的角度, 存在着将随机事件加以分离的可能, 即单独地考察所需要的物理量的演化, 而不是在不可分离的状态空间中耦合地观察状态向量的整体演化.

通常, 工程实际中的大部分系统是适定的动力学系统, 对于此类系统, 其解答存在、唯一且连续依赖于系统参数和初始条件. 在此情况下, 对系统方程(75), 其解答 $X(t)$ 必依赖于随机参数 O , 不妨记为①

$$X(t)=G(O,t), \quad (76a)$$

其分量形式可表为

$$X_l(t)=G_l(O,t), l=1,2,\dots,n. \quad (76b)$$

类似地, 其速度亦为 O 的函数, 可记为

$$\dot{X}(t)=H(O,t). \quad (77)$$

显然, 应存在 $H(O,t)=aG(O,t)/at$.

在工程实践中，往往不仅关心结构的位移、速度和加速度反应，还可能对诸如关键点的应力和应变、控制截面的内力和变形等其他物理量感兴趣。一般说来，这些物理量均可由结

①当初始条件为确定性条件时，为简单计，解答对初始值的依赖性可不必显式表示于函数中；当初始条件为随机时，根据前述分析，则已经包含于 θ 中。

构的状态(速度和位移)确定(Fung,1994). 例如, 结构某点的应变可以通过位移的偏导数得到.

记 $Z=(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ 为所需要考察的物理量, 则一般地有

$$Z(t)=\psi[X(t), \dot{X}(t)]. \quad (78)$$

这里, $\psi(\cdot)$ 是从状态向量向所考察物理量的转化算子, 对线性结构体系, 它为线性算子, 对非线性结构, 它可能为线性算子, 也可能为非线性算子①. 特别地, 若 Z 即为某些自由度的位移, 则 $\psi(\cdot)$ 为筛选算子, 此时, 它是一个仅有少数元素为1、其余元素均为零的矩阵.

将式(76)和式(77)代入式(78), 有

$$z(t)=\psi[G(O, t), H(O, t)]=h(O, t). \quad (79a)$$

由于 O 的随机性, 这也是一个随机状态方程, 其分量形式可表为

$$z_l(t)=h_l(O, t); l=1, 2, \dots, m.$$

(79b)

注意, 与式(25)不同, 状态方程(79)是解耦的表达形式. 亦即: 对所关注的物理量单独观察, 而不是采取对系统状态量的耦合式考察. 后文将看到, 对状态方程(79), 重要的是可以获得其演化的过程, 至于是否可获得 $h(\cdot)$ 的显式表达式, 则是无关宏旨的.

5.2 广义概率密度演化方程

如上分析, 对随机动力系统方程(67), 实际所关心的物理量是 $Z(t)$, 而 $Z(t)$ 本身则满足系统方程(79)的随机状态方程, 因此, 为了获取 $Z(t)$ 的概率信息, 可直接从系统方程(79)出发.

在随机动力系统方程(79)中, 单独的 $Z(t)$ 的演化本身不是概率守恒过程, 而增广系统 $(Z(t), O)$ 则是一个保守的随机系统, 即所有的随机因素均已包含于其中.

记 $(Z(t), O)$ 的联合概率密度函数为 $p_{z\theta}(z, \theta, t)$. 考察一个随机事件 $\{(Z(t), O) \in \Omega, \times 0\}$, 其中 Ω 为 O 分布空间中的任意区域, Ω 为 t 时刻 Z 的分布空间中的相关区域. 在微小时间增量 dt 之后的 $t+dt$ 时刻, 该随机事件演化成为 $\{(Z(t+dt), O) \in \Omega + d\Omega \times \Omega\}$. 显然

$$\Pr\{(Z(t), O) \in \Omega \times \Omega\} = \Pr\{(Z(t+dt), O) \in \Omega + d\Omega \times \Omega\}, \quad (80)$$

亦即

$$\int_{\Omega_t \times \Omega_t} p_{z\theta}(z, \theta, t) dz d\theta = \int_{\Omega_{t+dt} \times \Omega_t} p_{z\theta}(z, \theta, t + dt) dz d\theta. \quad (81)$$

在微小时间增量 dt 之后的 $t+dt$ 时刻, Ω_{t+dt} 是 Ω_t 及其边界运动叠加的结果, 即

$$\Omega_{t+dt} = \Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} (v_i dt) \cdot n dS = \Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} (h(\theta, t) dt) \cdot n dS. \quad (82)$$

注意这里引用了状态物理演化方程(79a)所确定的速度 $v = h(\theta, t)$, 从而说明: 所考察的边界运动及其引起的概率密度演化是由于系统物理演化的结果.

①例如, 若 Z 为某点的应变, 则当仅考虑小变形时, 即便考虑材料非线性, (\cdot) 亦为线性算子, 而当考虑几何非线性时, 即便不考虑材料非线性, (\cdot) 亦为非线性算子.

由此可见, 无论 Ω , 是否依赖于 Ω, a , 均依赖于 Ω , 因而, 对于一般的时刻 $t \neq t_0, Q$, 均依赖于 Ω . 因此, 严格说来, 应将 Ω , 写为 $\Omega, (Q)$. 这也正是必须考虑增广系统 $(Z(t), \theta)$ 而不是原系统 $Z(t)$ 的演化才能保证概率守恒的原因.

将式 (82) 代入式 (81), 先考察等式的右侧, 有

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} p_{z\theta}(z, \theta, t+dt) dz d\theta = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \left(p_{z\theta}(z, \theta, t) + \frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial t} dt \right) dz d\theta + \int_{\partial\Omega_1 \times \Omega_2} \left(p_{z\theta}(z, \theta, t) + \frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial t} dt \right) (h(\theta, t) dt) \cdot n dS d\theta, \quad (83)$$

这里, 利用了 $p_{z\theta}(z, \theta, t+dt) = p_{z\theta}(z, \theta, t) + (\partial p_{z\theta}(z, \theta, t) / \partial t) dt$

将式 (83) 代入式 (81) 的右侧, 消去相同项, 可得

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \left(\frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial t} dt \right) dz d\theta = - \int_{\partial\Omega_1 \times \Omega_2} \left(p_{z\theta}(z, \theta, t) + \frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial t} dt \right) (h(\theta, t) dt) \cdot n dS d\theta. \quad (84)$$

显然, 该式第一行是 dt 时间内的概率增量, 而第二行是通过边界流入的概率增量. 这正是概率守恒这一事实在 $[t, t+dt]$ 时间内从状态空间角度观察的结果.

对式 (84) 第二行的边界积分应用散度定理, 且略去 dt 的高阶项, 有

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \left(\frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial t} dt \right) dz d\theta = - \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \sum_{j=1}^m \frac{\partial [p_{z\theta}(z, \theta, t) h_j(\theta, t) dt]}{\partial z_j} dz d\theta, \quad (85)$$

注意到 $\Omega \times \Omega$ 的任意性, 并从等式两边同时消去 dt , 即得

$$\frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^m h_j(\theta, t) \frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial z_j} = 0. \quad (86a)$$

考虑式 (79b), 该方程亦可等价地写为

$$\frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \dot{Z}_j(\theta, t) \frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial z_j} = 0.$$

此即为广义概率密度演化方程. 特别地, 当 $m=1$ 时, 广义概率密度演化方程成为 (86b)

$$\frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial t} + \dot{Z}(\theta, t) \frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial z} = 0,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/695030004244011340>