黄冈黄石鄂州三市2023年春季高一年级期末联考

数学

本试卷共4页，22题．全卷满分150分．考试用时120分钟．

★祝考试顺利★

注意事项：

1．答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置．

2．选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．

3．非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．

4．考试结束后，请将答题卡上交．

一、选择题(每小题5分，共8小题40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 已知复数 $z=\frac{2+i^{2023}}{1-i}$ ，则 z 的虚部为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}i$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}i$

【答案】A

【解析】

【分析】化简复数，分子分母同时乘以 $1+i$ ，进而求得复数 z ，由此得到虚部.

【详解】$z=\frac{2-i}{1-i}=\frac{(2-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+2i-i-i^2}{2}=\frac{3+i}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$ ，所以 z 的虚部为 $\frac{1}{2}$.

故选：A

2. 已知 $A(2,3)$ ， $B(5,1)$ ， $C(m,2)$ ，且A， B ， C 三点共线，则 $m=$ (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\frac{7}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据三点共线得出向量共线，结合向量共线的坐标表示可得答案.

【详解】因为 $A(2,3)$，$B(5,1)$，$C(m,2)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(3,-2),\overrightarrow{AC}=(m-2,-1)$，

因为三点共线，所以 $\frac{m-2}{3}=\frac{-1}{-2}$，解得 $m=\frac{7}{2}$.

故选：D.

3. 某工厂生产 A,B,C 三种不同型号的产品，产品数量之比为 $4:3:k$，现用分层随机抽样方法抽取一个容量为 140 的样本．已知 C 型产品抽取了 56 件，则 A 型产品抽取的件数为（　　）

A. 36　　B. 48　　C. 56　　D. 60

【答案】B

【解析】

【分析】根据比例求出 $k=\frac{14}{3}$，再由 A 种型号所占比例求解即可.

【详解】由题意，$\frac{k}{k+7}=\frac{56}{140}$，得 $k=\frac{14}{3}$，

$\therefore A$ 型号产品抽取的件数为 $140\times\frac{4}{7+\frac{14}{3}}=48$.

故选：B.

4. 下列说法正确的是（　　）

A. 两两相交的三条直线确定一个平面

B. 如果直线 a，b 和平面 α 满足 $a//\alpha$，$b//\alpha$，那么 $a//b$

C. 过平面外一点有且只有一条直线与这个平面垂直

D. 若平面 $\alpha\perp$ 平面 β，平面 $\beta\perp$ 平面 γ，那么平面 $\alpha\perp$ 平面 γ

【答案】C

【解析】

【分析】根据线线、线面、面面的位置关系，结合判定定理与性质定理，对每个选项逐一分析，即可判断.

【详解】对 A，若两两相交的三条直线过同一个点，则它们可以确定一个或三个平面，故 A 错误；

对 B，若 $a//\alpha$，$b//\alpha$，则直线 a，b 可能平行、相交或者成异面直线，故 B 错误；

对 C，过平面外一点有且只有一条直线与这个平面垂直，该结论正确，故 C 正确；

对 D，若平面 $\alpha\perp$ 平面 β，平面 $\beta\perp$ 平面 γ，则平面 α 和平面 γ 可能相交、垂直或平行，故 D 错误.

故选：C

5. 已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$BC=8$，$\angle B=60°$，则 AB 边上的中线长为（　　）

A. $\sqrt{78}$　　B. 8　　C. 7　　D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】根据余弦定理，即可求解.

【详解】如图，AB 边的中点为 M，

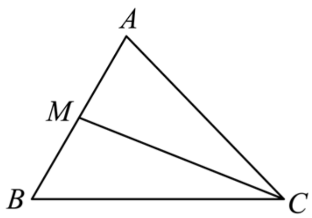
$BM=3$，$BC=8$，$\angle B=60°$，

$\triangle BCM$ 中，根据余弦定理，

$MC^2=BC^2+BM^2-2BC\cdot BM\cdot\cos 60°$

$=64+9-2\times 8\times 3\times\dfrac{1}{2}=49$，

则 $MC=7$



故选：C

6. 已知空间中 $\angle POA=\angle POB=60°$，$\angle AOB=90°$，直线 OP 与平面 AOB 所成的角为 θ，则 $\cos\theta$ 为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

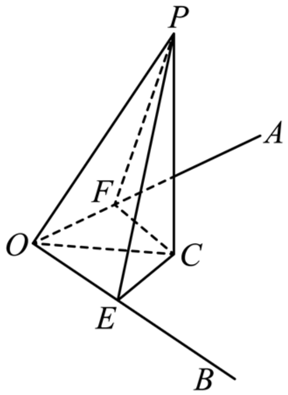
【答案】A

【解析】

【分析】作 $PC\perp$ 平面 AOB，即可说明 $\angle POC$ 为直线 OP 与平面 AOB 所成的角 θ，然后通过作垂线求得线段之间的数量关系，解直角三角形即可求得答案.

【详解】如图，作 $PC\perp$ 平面 AOB，垂足为 C，连接 OC，

则 $\angle POC$ 为直线 OP 与平面 AOB 所成的角 θ，



作$CE\perp OB$,垂足为E，连接PE，

因为$OB\subset$平面AOB，故$PC\perp OB$，

$PC\cap CE=C,PC,CE\subset$平面PCE，故$OB\perp$平面PCE，

$PE\subset$平面AOB，则$OB\perp PE$，

同理作$CF\perp OA$,垂足为F，连接PF，可证$OA\perp PF$，

由于$\angle POA=\angle POB=60^\circ$，$OP$为$\mathrm{Rt}\triangle PEO,\mathrm{Rt}\triangle PFO$的公共边，

故$\mathrm{Rt}\triangle PEO\cong\mathrm{Rt}\triangle PFO$，则$OE=OF$，

而$OC=OC$，故$\mathrm{Rt}\triangle CEO\cong\mathrm{Rt}\triangle CFO$，故$CE=CF$，

即OC为$\angle AOB=90^\circ$的平分线，即$\angle COE=\angle COF=45^\circ$，

设$OC=2$，则$OE=\sqrt{2}$，故$OP=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\angle POE}=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos 60^\circ}=2\sqrt{2}$，

则$\cos\theta=\cos\angle POC=\dfrac{OC}{OP}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故选：A

7. 已知函数$f(x)=8\cos\left(x-\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$的一条对称轴为$x=\dfrac{\pi}{6}$，且在区间$[0,t]$上值域为$[2,4]$，则实数$t$的最大值为（　　）

A. $\dfrac{5\pi}{6}$　　B. $\dfrac{2\pi}{3}$　　C. $\dfrac{5\pi}{12}$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用两角和与差的余弦公式以及二倍角的余弦公式化简计算得函数$f(x)=4\cos(2x-2\theta)$，利用整体法，代入对称轴计算得θ的值，然后利用整体法分析函数$f(x)$的值域，列关于t的不等式计算即可得答

案.

【详解】$f\left(x\right)=8\cos\left(x-\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\theta-\frac{\pi}{3}\right)+2\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$$f(x)=8\left[\frac{1}{2}\cos\left(x-\theta\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x-\theta\right)\right]\left[\frac{1}{2}\cos\left(x-\theta\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x-\theta\right)\right]+2$$

$$f(x)=8\left[\frac{1}{4}\cos^2\left(x-\theta\right)-\frac{3}{4}\sin^2\left(x-\theta\right)\right]+2=\cos\left[2\left(x-\theta\right)\right]+1-3+3\cos\left[2\left(x-\theta\right)\right]+2$$

$f(x)=4\cos\left(2x-2\theta\right)$，因为函数$f(x)$的一条对称轴为$x=\frac{\pi}{6}$，

所以$2\times\frac{\pi}{6}-2\theta=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即$\theta=\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

又因为$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以$\theta=\frac{\pi}{6}$，所以$f\left(x\right)=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

当$x\in[0,t]$时，$\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\pi}{3},2t-\frac{\pi}{3}\right]$，

因为函数$f(x)$在区间$[0,t]$上值域为$\left[2,4\right]$，

所以$0\le 2t-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}$，解得$\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{3}$，

所以实数t的最大值为$\frac{\pi}{3}$.

故选：D

8. 已知$\triangle ABC$中角A，B，C所对的边分别为a，b，c，满足$a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$，且$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}=\frac{2\sin B\sin C}{3\sin A}$．则$a+2c$的最大值为(　　)

A. 6　　　　B. $4\sqrt{3}$　　　　C. $2\sqrt{3}$　　　　D. $2\sqrt{7}$

【答案】D

【解析】

【分析】先由正弦定理及两角和差得出b,B,再由正弦定理边角互化结合辅助角公式计算即可.

【详解】$\triangle ABC$中由正弦定理

$\because\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A,\sin\frac{A+C}{2}=\sin B,\therefore\frac{A+C}{2}=B,B=\frac{\pi}{3}$，

$\because\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}=\frac{2\sin B\sin C}{3\sin A},\therefore\frac{b\cos A+a\cos B}{ab}=\frac{2\sin B\sin C}{3\sin A}=\frac{\sin B\cos A+\sin A\cos B}{b\sin A}$，

$\frac{2\sin B\sin C}{3\sin A}=\frac{\sin B\cos A+\sin A\cos B}{b\sin A}=\frac{\sin\left(B+A\right)}{b\sin A}=\frac{\sin C}{b\sin A}$，$\therefore b=\sqrt{3}$，

$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，

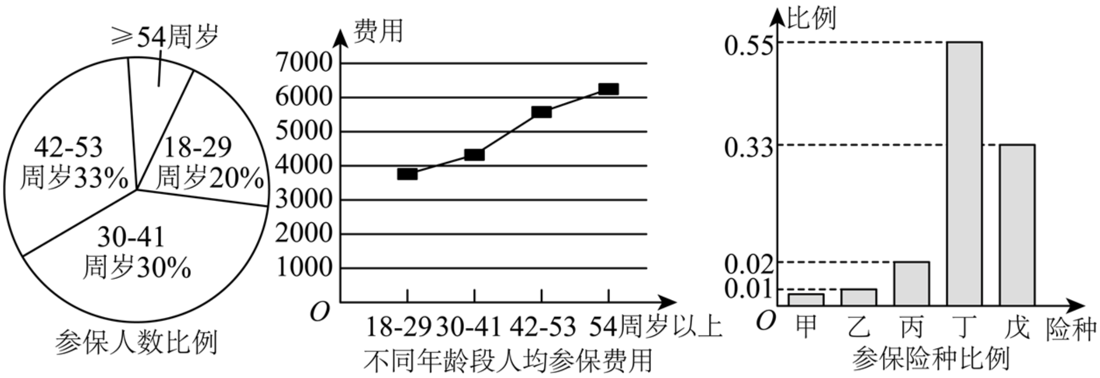
$\therefore a+2c=2\sin A+4\sin C=2\sin A+4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=4\sin A+2\sqrt{3}\cos A=2\sqrt{7}\sin\left(A+\varphi\right)$，

$\because \tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}, 0<A<\frac{2\pi}{3}, \therefore A+\varphi=\frac{\pi}{2}$时，$a+2c$的最大值为$2\sqrt{7}$．

故选：D.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 某保险公司为客户定制了 5 个险种：甲，一年期短险；乙，两全保险；丙，理财类保险；丁，定期寿险；戊，重大疾病保险．各种保险按相关约定进行参保与理赔．该保险公司对 5 个险种的参保客户进行抽样调查，得出如下统计图例，则以下四个选项正确的是（　　）



A. $18-29$周岁人群参保总费用最少

B. 30 周岁以上的参保人群约占参保总人群的20%

C. 54 周岁以上的参保人数最少

D. 丁险种更受参保人青睐

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据统计图表给出信息逐个选项判断.

【详解】对于 A：由第一个图可得 54 周岁及以上的参保人数最少，占比为

$1-30\%-33\%-20\%=17\%$，

其余年龄段的参保人数均比$18-29$周岁人群参保人数多.

由第二个图可得， 因为$20\%\times 4000<17\%\times 6000$，所以$18-29$周岁人群参保总费用最少，故 A 对.

对于 B：由第一个图可得，30 周岁以上的参保人群约占参保总人群的80%，故 B 错.

对于 C：由第一个图可得，54 周岁及以上的参保人数占参保总人数的$1-30\%-33\%-20\%=17\%$，所以 C 对.

对于 D：由第三个图可得，丁险种参保人群约占参保总人群的55%，所以最受青睐，所以 D 对.

故选：ACD.

10. 下列各式的值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$是（　　）

A. $\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$

B. $\frac{3\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4\sin 10^\circ}-\frac{3}{4\cos 10^\circ}$

D. $\frac{\tan\frac{5\pi}{4}+\tan\frac{5\pi}{12}}{\tan\frac{5\pi}{12}-1}$

【答案】AB

【解析】

【分析】利用三角函数恒等变形，即可化简求值.

【详解】A. $\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$， 故 A 正确；

B. $\frac{3\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}=\frac{3}{2}\times\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}=\frac{3}{2}\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$， 故 B 正确；

C. $\frac{\sqrt{3}}{4\sin 10^\circ}-\frac{3}{4\cos 10^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos 10^\circ-3\sin 10^\circ}{4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{2\sqrt{3}\cos\left(10^\circ+60^\circ\right)}{2\sin 20^\circ}$

$=\frac{2\sqrt{3}\cos 70^\circ}{2\sin 20^\circ}=\frac{2\sqrt{3}\cos\left(90^\circ-20^\circ\right)}{2\sin 20^\circ}=\sqrt{3}$， 故 C 错误；

D. $\frac{\tan\frac{5\pi}{4}+\tan\frac{5\pi}{12}}{\tan\frac{5\pi}{12}-1}=\frac{\tan\frac{5\pi}{4}+\tan\frac{5\pi}{12}}{\tan\frac{5\pi}{4}\tan\frac{5\pi}{12}-1}=-\tan\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi}{12}\right)=\tan\frac{5\pi}{3}$,

$=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$， 故 D 错误.

故选：AB

11. 在棱长为 4 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，下列说法正确的是（　　）

A. $A_1C \perp BD$

B. 直线 BC_1 与平面 A_1B_1CD 所成的角为 $30°$

C. 三棱锥 C_1-A_1BD 的体积为 $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

D. M 是 A_1B_1 的中点，点 P 是侧面 CDD_1C_1 内的动点．若 MP // 平面 AB_1C，则 MP 的最大值为 $4\sqrt{2}$

【答案】AD

【解析】

【分析】对于 A，连接 AC，可证得 $BD\perp$ 平面 A_1AC，从而可得结论，对于 B，由正方体的性质可证得 $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1CD，对于 C，三棱锥 C_1-A_1BD 的体积等于正方体的体积减去 4 个三棱锥的体积，对于 D，取 CD 的中点 N，CC_1 的中点 R，B_1C_1 的中点 H，连接 MN, MH, HR, NR，则证得平面 $MNRH$ // 平面 AB_1C，则线段 MP 扫过的图形为 $\triangle MNR$，然后求出其范围，从而可得答案.

【详解】对于 A，连接 AC，则 $BD\perp AC$，因为 $A_1A\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $A_1A\perp BD$，因为 $A_1A\cap AC=A$，$A_1A,\ AC\subset$ 平面 A_1AC，

所以 $BD\perp$ 平面 A_1AC，因为 $A_1C\subset$ 平面 A_1AC，所以 $A_1C\perp BD$，所以 A 正确，

对于 B，因为 $A_1B_1\perp$ 平面 BB_1C_1C，$BC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，所以 $A_1B_1\perp BC_1$，

因为 $B_1C\perp BC_1$，$A_1B_1\cap B_1C=B_1$，$A_1B_1, B_1C\subset$ 平面 A_1B_1CD，

所以 $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1CD，所以直线 BC_1 与平面 A_1B_1CD 所成的角为 $90°$，所以 B 错误，

对于 C，因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，所以三棱锥 C_1-A_1BD 的体积为

$$V_{C_1-A_1BD}=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{A-A_1BD}-V_{B_1-A_1BC_1}-V_{C-BC_1D}-V_{D_1-A_1C_1D}$$

$=4^3-4\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times4\times4\times4=\dfrac{64}{3}$，所以 C 错误，

对于 D，取 CD 的中点 N，CC_1 的中点 R，B_1C_1 的中点 H，连接 MN, MH, HR, NR，

则 MN // B_1C // HR，MH // A_1C_1 // AC，

因为 $MH, HR\not\subset$ 平面 AB_1C，$AC, B_1C\subset$ 平面 AB_1C，

所以 MH // 平面 AB_1C，HR // 平面 AB_1C，

因为$MH \cap HR = H$，$MH, HR \subset$平面$MNRH$，

所以平面$MNRH$ $//$平面AB_1C，

因为$MP \subset$平面$MNRH$，所以MP $//$平面$MNRH$，

所以线段MP扫过的图形为$\triangle MNR$，

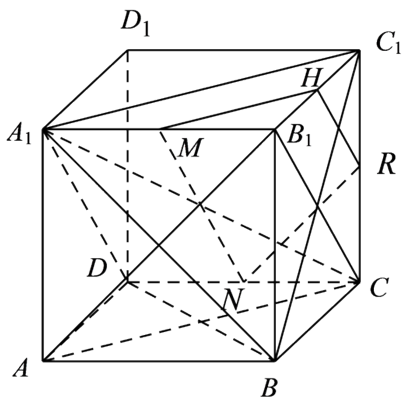
由$AB=4$，得$MN=4\sqrt{2}$，$NR=2\sqrt{2}$，$MR=2\sqrt{6}$，

所以$MN^2=NR^2+MR^2$，所以$\angle MRN=90°$，

所以$MR<MP<MN$，即MP范围为$[2\sqrt{6},4\sqrt{2}]$，

所以MP的最大值为$4\sqrt{2}$

故选：AD



12. 著名数学家欧拉曾提出如下定理：三角形的外心、重心、垂心依次在一条直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半．此直线称为欧拉线．该定理称为欧拉线定理．已知$\triangle ABC$的外心为O，重心为G，垂心为H，且$AB=6$，$AC=4$，以下结论正确的是（　　）

A. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = -\dfrac{20}{3}$

B. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = 10$

C. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

D. 若$|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{7}$，则$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\dfrac{14}{3}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】对于A，根据三角形重心的向量性质及向量的加减法求得结果；对于B，根据三角形的外心性质结合向量的数量积求得结果；对于C，由欧拉线定理得$2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH}$，即$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$，结合三角形重心的向量

性质进行计算即可；对于 D，利用正余弦定理及向量的数量积公式进行计算.

【详解】对于 A，$\triangle ABC$ 的重心为 G，有 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，且 $AB=6$，$AC=4$，

故 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)=-\frac{20}{3}$，故 A 正确.

对于 B，$\triangle ABC$ 的外心为 O，有

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\left|\overrightarrow{AO}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle OAC-\left|\overrightarrow{AO}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\angle OAB$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)=-10$，故 B 错误；

对于 C，由欧拉线定理得 $2\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{GH}$，即 $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$，又 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，

所以 $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，故 C 正确；

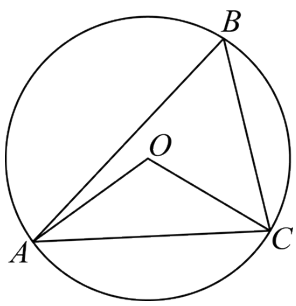
对于 D，因为 $AB=6$，$AC=4$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt{7}$，

所以由余弦定理 $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{6^2+4^2-\left(2\sqrt{7}\right)^2}{2\times6\times4}=\frac{1}{2}$

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$，如图，$\angle BOC=\frac{2\pi}{3}$，

由正弦定理可得 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{21}}{3}$，所以 $R=OB=OC=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，

则 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\angle BOC=-\frac{14}{3}$，故 D 正确.



故选：ACD

【点睛】方法点睛：

三角形的三条垂直平分线交于一点，即为外心，外心是三角形外接圆的圆心.

(1) $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$；