

高中数学知识点总结

1. 对于集合，一定要抓住集合的代表元素，及元素的“确定性、互异性、无序性”。

如：集合 $A = \{x|y = \lg x\}$, $B = \{y|y = \lg x\}$, $C = \{(x,y)|y = \lg x\}$, A 、 B 、 C 中元素各表示什么？

2. 进行集合的交、并、补运算时，不要忘记集合本身和空集 $\emptyset$ 的特殊情况。注重借助于数轴和文氏图解集合问题。

空集是一切集合的子集，是一切非空集合的真子集。 如：集合 $A = \{x|x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $B = \{x|ax = 1\}$

若 $B \subset A$, 则实数 a 的值构成的集合为 _____ (答: $\{-1, 0, \frac{1}{3}\}$)

3. 注意下列性质:

(1) 集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的所有子集的个数是 2^n ; (2) 若 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$, $A \cap B = B$;

(3) 德摩根定律: $C_U(A \cap B) = (C_U A) \cup (C_U B)$, $C_U(A \cup B) = (C_U A) \cap (C_U B)$

4. 你会用补集思想解决问题吗? (排除法、间接法)

如: 已知关于 x 的不等式 $\frac{ax-5}{x^2-a} < 0$ 的解集为 M , 若 $3 \in M$ 且 $5 \notin M$, 求实数 a 的取值范围。

$$\begin{aligned} (\because 3 \in M, \therefore \frac{a \cdot 3 - 5}{3^2 - a} < 0 \\ \Rightarrow a \in \left[1, \frac{5}{3}\right) \cup (9, 25) \\ \because 5 \notin M, \therefore \frac{a \cdot 5 - 5}{5^2 - a} \geq 0 \end{aligned}$$

5. 可以判断真假的语句叫做命题, 逻辑连接词有“或”($\vee$), “且”($\wedge$) 和 “非”($\neg$).

若 $p \wedge q$ 为真, 当且仅当 p 、 q 均为真 若 $p \vee q$ 为真, 当且仅当 p 、 q 至少有一个为真

若 $\neg p$ 为真, 当且仅当 p 为假

6. 命题的四种形式及其相互关系是什么?

7. 对映射的概念了解吗? 映射 $f: A \rightarrow B$, 是否注意到 A 中元素的任意性和 B 中与之对应元素的唯一性, 哪几种对应能构成映射? (一对一, 多对一, 允许 B 中有元素无原象。)

8. 函数的三要素是什么? 如何比较两个函数是否相同? (定义域、对应法则、值域)

9. 求函数的定义域有哪些常见类型?

例: 函数 $y = \frac{\sqrt{x(4-x)}}{\lg(x-3)^2}$ 的定义域是 _____ (答: $(0, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4)$)

10. 如何求复合函数的定义域?

如: 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$, $b > -a > 0$, 则函数 $F(x) = f(x) + f(-x)$ 的定义域是 _____ (答: $[a, -a]$)

11. 求一个函数的解析式或一个函数的反函数时, 注明函数的定义域了吗?

如: $f(\sqrt{x+1}) = e^x + x$, 求 $f(x)$.

$$\text{令 } t = \sqrt{x+1}, \text{ 则 } t \geq 0 \quad \therefore x = t^2 - 1 \quad \therefore f(t) = e^{t^2-1} + t^2 - 1 \quad \therefore f(x) = e^{x^2-1} + x^2 - 1 (x \geq 0)$$

12. 反函数存在的条件是什么? (一一对应函数)

求反函数的步骤掌握了吗? (①反解 x ; ②互换 x 、 y ; ③注明定义域)

如：求函数 $f(x) = \begin{cases} 1+x & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 的反函数 （答： $f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & (x > 1) \\ -\sqrt{-x} & (x < 0) \end{cases}$ ）

13. 反函数的性质有哪些？

①互为反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称； ②保存了原来函数的单调性、奇函数性；

③设 $y = f(x)$ 的定义域为 A ，值域为 C ， $a \in A$ ， $b \in C$ ，则 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

$$\therefore f^{-1}[f(a)] = f^{-1}(b) = a, f[f^{-1}(b)] = f(a) = b$$

14. 如何用定义证明函数的单调性？ （取值、作差、判正负）

如何判断复合函数的单调性？ $(y = f(u), u = \varphi(x), \text{ 则 } y = f[\varphi(x)])$
（外层） （内层）

当内、外层函数单调性相同时 $f[\varphi(x)]$ 为增函数，否则 $f[\varphi(x)]$ 为减函数。）

如：求 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 2x)$ 的单调区间

15. 如何利用导数判断函数的单调性？

在区间 (a, b) 内，若总有 $f'(x) \geq 0$ 则 $f(x)$ 为增函数。（在个别点上导数等于

零，不影响函数的单调性），反之也对，若 $f'(x) \leq 0$ 呢？

如：已知 $a > 0$ ，函数 $f(x) = x^3 - ax$ 在 $[1, +\infty)$ 上是单调增函数，则 a 的最大值是（ ）

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

$$(\text{令 } f'(x) = 3x^2 - a = 3\left(x + \sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{a}{3}}\right) \geq 0 \text{ 则 } x \leq -\sqrt{\frac{a}{3}} \text{ 或 } x \geq \sqrt{\frac{a}{3}})$$

由已知 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数，则 $\sqrt{\frac{a}{3}} \leq 1$ ，即 $a \leq 3$ $\therefore a$ 的最大值为 3）

16. 函数 $f(x)$ 具有奇偶性的必要（非充分）条件是什么？（ $f(x)$ 定义域关于原点对称）

若 $f(-x) = -f(x)$ 总成立 $\Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow$ 函数图象关于原点对称

若 $f(-x) = f(x)$ 总成立 $\Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow$ 函数图象关于 y 轴对称

注意如下结论：

（1）在公共定义域内：两个奇函数的乘积是偶函数；两个偶函数的乘积是偶函数；一个偶函数与奇函数的乘积是奇函数 （2）若 $f(x)$ 是奇函数且定义域中有原点，则 $f(0) = 0$ 。

如：若 $f(x) = \frac{a \cdot 2^x + a - 2}{2^x + 1}$ 为奇函数，则实数 $a =$ _____

又如： $f(x)$ 为定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数，当 $x \in (0, 1)$ 时， $f(x) = \frac{2^x}{4^x + 1}$ ，求 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上的解析式。

$$(\text{令 } x \in (-1, 0), \text{ 则 } -x \in (0, 1), f(-x) = \frac{2^{-x}}{4^{-x} + 1} \text{ 又 } f(x) \text{ 为奇函数, } \therefore f(x) = -\frac{2^{-x}}{4^{-x} + 1} = -\frac{2^x}{1 + 4^x})$$

$$\text{又 } f(0) = 0, \therefore f(x) = \begin{cases} -\frac{2^x}{4^x + 1} & x \in (-1, 0) \\ 0 & x = 0 \\ \frac{2^x}{4^x + 1} & x \in (0, 1) \end{cases}$$

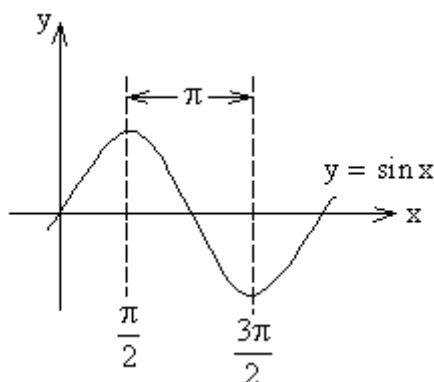
17. 你熟悉周期函数的定义吗？

（若存在实数 T ($T \neq 0$)，在定义域内总有 $f(x+T) = f(x)$ ，则 $f(x)$ 为周期函数， T 是一个周期。）

如：若 $f(x+a) = -f(x)$ ，则 _____ （答： $f(x)$ 是周期函数， $T = 2a$ 为 $f(x)$ 的一个周期）

又如：若 $f(x)$ 图象有两条对称轴 $x = a$ ， $x = b$ ($\Leftrightarrow$) 即 $f(a+x) = f(a-x)$ ， $f(b+x) = f(b-x)$

则 $f(x)$ 是周期函数， $2|a-b|$ 为一个周期，如：



18. 你掌握常用的图象变换了吗？

$f(x)$ 与 $f(-x)$ 的图象关于 y轴 对称 $f(x)$ 与 $-f(x)$ 的图象关于 x轴 对称

$f(x)$ 与 $-f(-x)$ 的图象关于 原点 对称 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的图象关于 直线 $y = x$ 对称

$f(x)$ 与 $f(2a-x)$ 的图象关于 直线 $x = a$ 对称 $f(x)$ 与 $-f(2a-x)$ 的图象关于 点 $(a, 0)$ 对称

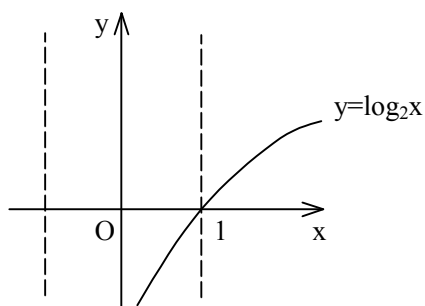
将 $y = f(x)$ 图象 $\xrightarrow[\text{右移 } a(a>0) \text{ 个单位}]{\text{左移 } a(a>0) \text{ 个单位}}$ $y = f(x+a)$ $\xrightarrow[\text{下移 } b(b>0) \text{ 个单位}]{\text{上移 } b(b>0) \text{ 个单位}}$ $y = f(x+a) + b$
 $y = f(x-a)$ $y = f(x+a) - b$

注意如下“翻折”变换：

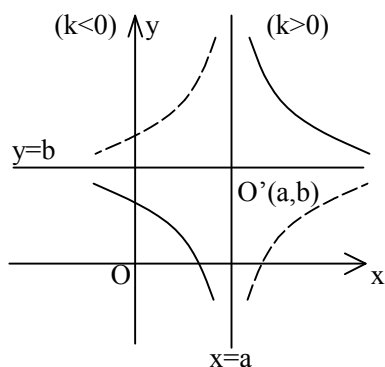
$f(x) \longrightarrow |f(x)|$

$f(x) \longrightarrow f(|x|)$

如： $f(x) = \log_2(x+1)$ 作出 $y = |\log_2(x+1)|$ 及 $y = \log_2|x+1|$ 的图象



19. 你熟练掌握常用函数的图象和性质了吗？



(1) 一次函数: $y = kx + b$ ($k \neq 0$)

(2) 反比例函数: $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 推广为 $y = b + \frac{k}{x-a}$ ($k \neq 0$) 是中心 $O'(a, b)$ 的双曲线。

(3) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) $= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ 图象为抛物线

顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, 对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$

开口方向: $a > 0$, 向上, 函数 $y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$, $a < 0$, 向下, $y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a}$

应用: ① “三个二次” (二次函数、二次方程、二次不等式) 的关系——二次方程

$ax^2 + bx + c = 0$, $\Delta > 0$ 时, 两根 x_1 、 x_2 为二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴

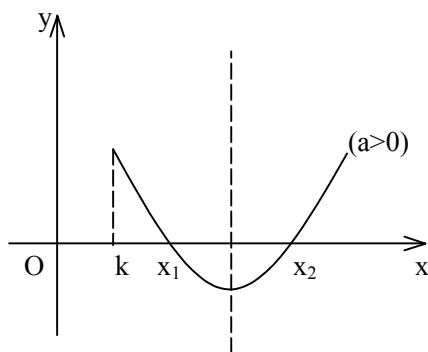
的两个交点, 也是二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0) 解集的端点值。

② 求闭区间 $[m, n]$ 上的最值。

③ 求区间定 (动), 对称轴动 (定) 的最值问题。

④ 一元二次方程根的分布问题。(看 4 点)

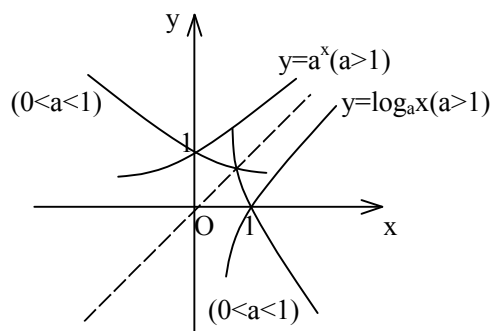
如: 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根都大于 $k \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > k \\ f(k) > 0 \end{cases}$



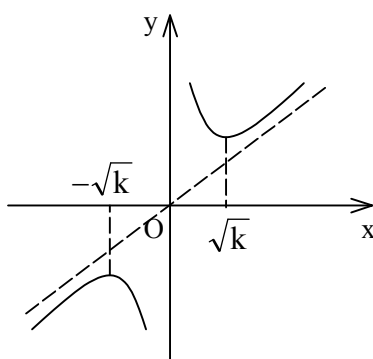
一根大于 k , 一根小于 $k \Leftrightarrow f(k) < 0$

(4) 指数函数: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(5) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 由图象记性质! (注意底数的限定!)



(6) “对勾函数” $y = x + \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 利用它的单调性求最值与利用均值不等式求最值的区别是什么?



20. 你在基本运算上常出现错误吗?

指数运算: $a^0 = 1$ ($a \neq 0$), $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($a \geq 0$), $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ ($a > 0$)

对数运算: $\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N$ ($M > 0, N > 0$)

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N, \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

对数恒等式: $a^{\log_a x} = x$ 对数换底公式: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$

21. 如何解抽象函数问题? (赋值法、结构变换法)

如: (1) $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 证明 $f(x)$ 为奇函数。

(先令 $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ 再令 $y = -x$,)

(2) $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 证明 $f(x)$ 是偶函数。

(先令 $x = y = -t \Rightarrow f[(-t)(-t)] = f(t \cdot t)$

$\therefore f(-t) + f(-t) = f(t) + f(t) \quad \therefore f(-t) = f(t) \dots\dots$)

(3) 证明单调性: $f(x_2) = f[(x_2 - x_1) + x_1] = \dots\dots$

22. 掌握求函数值域的常用方法了吗？

(二次函数法(配方法)，反函数法，换元法，均值定理法，判别式法，利用函数单调性法，导数法等。)

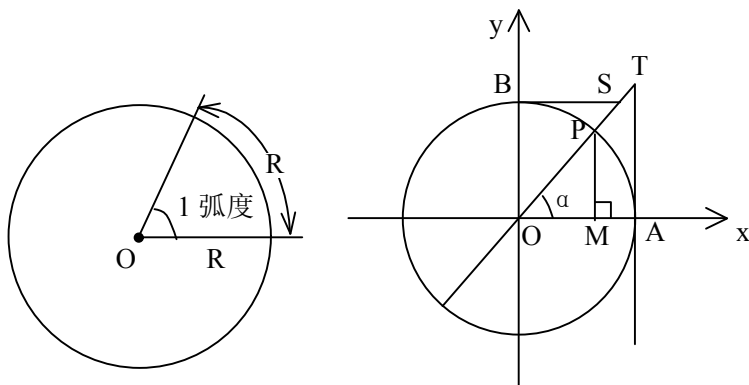
如求下列函数的最值：

$$(1) y = 2x - 3 + \sqrt{13 - 4x} \quad (2) y = \frac{2\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 3} \quad (3) x > 3, y = \frac{2x^2}{x - 3}$$

$$(4) y = x + 4 + \sqrt{9 - x^2} \quad (\text{设 } x = 3\cos\theta, \theta \in [0, \pi]) \quad (5) y = 4x + \frac{9}{x}, x \in (0, 1]$$

23. 你记得弧度的定义吗？能写出圆心角为 α ，半径为 R 的弧长公式和扇形面积公式吗？

$$(l = |\alpha| \cdot R, S_{\text{扇}} = \frac{1}{2} l \cdot R = \frac{1}{2} |\alpha| \cdot R^2)$$

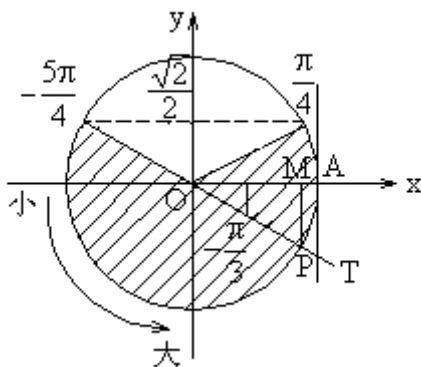


24. 熟记三角函数的定义，单位圆中三角函数线的定义 $\sin \alpha = MP$, $\cos \alpha = OM$, $\tan \alpha = AT$

如：若 $-\frac{\pi}{8} < \theta < 0$ ，则 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ 的大小顺序是 _____

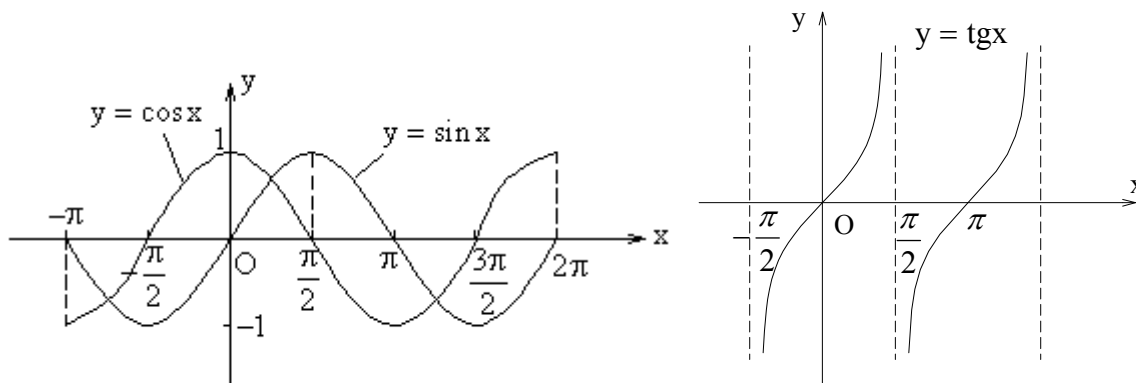
又如：求函数 $y = \sqrt{1 - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ 的定义域和值域。

$$\left(\because 1 - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 1 - \sqrt{2} \sin x \geq 0 \quad \therefore \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 如图:}$$



$$\therefore 2k\pi - \frac{5\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

25. 你能迅速画出正弦、余弦、正切函数的图象吗？并由图象写出单调区间、对称点、对称轴吗？



$$|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$$

$$y = \sin x \text{ 的增区间为 } \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{减区间为 } \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right] (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{图象的对称点为 } (k\pi, 0), \text{ 对称轴为 } x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

$$y = \cos x \text{ 的增区间为 } [2k\pi, 2k\pi + \pi] (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{减区间为 } [2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi] (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{图象的对称点为 } \left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right), \text{ 对称轴为 } x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$y = \tan x \text{ 的增区间为 } \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) k \in \mathbb{Z}, \text{ 对称点为 } \left(k\frac{\pi}{2}, 0\right), k \in \mathbb{Z}$$

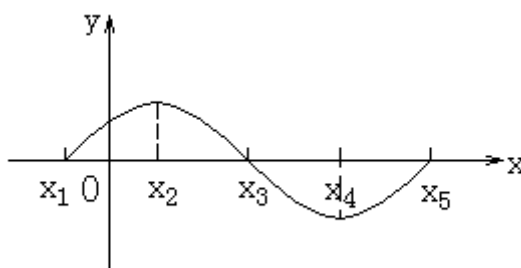
26. 正弦型函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象和性质要熟记。[或 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$]

$$(1) \text{ 振幅 } |A|, \text{ 周期 } T = \frac{2\pi}{|\omega|} \quad \text{若 } f(x_0) = \pm A, \text{ 则 } x = x_0 \text{ 为对称轴。}$$

$$\text{若 } f(x_0) = 0, \text{ 则 } (x_0, 0) \text{ 为对称点, 反之也对。}$$

$$(2) \text{ 五点作图: 令 } \omega x + \varphi \text{ 依次为 } 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \text{ 求出 } x \text{ 与 } y, \text{ 依点 } (x, y) \text{ 作图象。}$$

$$(3) \text{ 根据图象求解析式。 (求 } A, \omega, \varphi \text{ 值)}$$



$$\text{如图列出 } \begin{cases} \omega(x_1) + \varphi = 0 \\ \omega(x_2) + \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{解条件组求 } \omega, \varphi \text{ 值}$$

△正切型函数 $y = A \tan(\omega x + \varphi)$, $T = \frac{\pi}{|\omega|}$

27. 在三角函数中求一个角时要注意两个方面——先求出某一个三角函数值，再判定角的范围。

如： $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, 求x值。

$$\left(\because \pi < x < \frac{3\pi}{2}, \therefore \frac{7\pi}{6} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{3}, \therefore x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{4}, \therefore x = \frac{13}{12}\pi\right)$$

28. 在解含有正、余弦函数的问题时，你注意（到）运用函数的有界性了吗？

如：函数 $y = \sin x + \sin|x|$ 的值域是 _____

$$(x \geq 0 \text{ 时}, y = 2 \sin x \in [-2, 2], x < 0 \text{ 时}, y = 0, \therefore y \in [-2, 2])$$

29. 熟练掌握三角函数图象变换了吗？（平移变换、伸缩变换）

平移公式：

$$(1) \text{ 点 } P(x, y) \xrightarrow[\text{平移至}]{\vec{a}=(h, k)} P'(x', y'), \text{ 则 } \begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k \end{cases}$$

$$(2) \text{ 曲线 } f(x, y) = 0 \text{ 沿向量 } \vec{a} = (h, k) \text{ 平移后的方程为 } f(x - h, y - k) = 0$$

如：函数 $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ 的图象经过怎样的变换才能得到 $y = \sin x$ 的图象？

30. 熟练掌握同角三角函数关系和诱导公式了吗？

$$\text{如： } 1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = \tan \alpha \cdot \cot \alpha = \cos \alpha \cdot \sec \alpha = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} = \cos 0 = \cdots \cdots \text{称为1的代换。}$$

“ $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ”化为 α 的三角函数——“奇变，偶不变，符号看象限”，

“奇”、“偶”指 k 取奇、偶数。

$$\text{如： } \cos \frac{9\pi}{4} + \tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \sin(21\pi) = \text{_____} \quad \text{又如：函数 } y = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha}, \text{ 则 } y \text{ 的值为 } \text{_____}$$

A. 正值或负值 B. 负值 C. 非负值 D. 正值

$$\left(y = \frac{\sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\cos \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha (\cos \alpha + 1)}{\cos^2 \alpha (\sin \alpha + 1)} > 0, \because \alpha \neq 0\right)$$

31. 熟练掌握两角和、差、倍、降幂公式及其逆向应用了吗？

$$\text{理解公式之间的联系： } \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \xrightarrow{\text{令 } \alpha = \beta} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \xrightarrow{\text{令}\alpha=\beta} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \downarrow \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta} &= 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \\ \downarrow \\ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2 \alpha} &\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ & &\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\end{aligned}$$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi), \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \quad \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = 2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$$

应用以上公式对三角函数式化简。（化简要求：项数最少、函数种类最少，分母中不含三角函数，能求值，尽可能求值。） 具体方法：

（1）角的变换：如 $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$, $\frac{\alpha + \beta}{2} = \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)$ （2）名的变换：化弦或化切

（3）次数的变换：升、降幂公式 （4）形的变换：统一函数形式，注意运用代数运算。

如：已知 $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos 2\alpha} = 1$, $\tan(\alpha - \beta) = -\frac{2}{3}$, 求 $\tan(\beta - 2\alpha)$ 的值。

（由已知得： $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} = 1$, $\therefore \tan \alpha = \frac{1}{2}$ 又 $\tan(\beta - \alpha) = \frac{2}{3}$

$$\therefore \tan(\beta - 2\alpha) = \tan[(\beta - \alpha) - \alpha] = \frac{\tan(\beta - \alpha) - \tan \alpha}{1 + \tan(\beta - \alpha) \cdot \tan \alpha} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

32. 正、余弦定理的各种表达形式你还记得吗？如何实现边、角转化，而解斜三角形？

$$\text{余弦定理: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

（应用：已知两边一夹角求第三边；已知三边求角。）

$$\text{正弦定理: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R \sin A \\ b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C \end{cases}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot b \sin C$$

$$\therefore A + B + C = \pi, \therefore A + B = \pi - C \quad \therefore \sin(A + B) = \sin C, \sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{如}\triangle ABC\text{中, } 2\sin^2 \frac{A + B}{2} + \cos 2C = 1$$

（1）求角C；

（2）若 $a^2 = b^2 + \frac{c^2}{2}$, 求 $\cos 2A - \cos 2B$ 的值。

((1) 由已知式得: $1 - \cos(A+B) + 2\cos^2 C - 1 = 1$

又 $A+B = \pi - C$, $\therefore 2\cos^2 C + \cos C - 1 = 0$

$\therefore \cos C = \frac{1}{2}$ 或 $\cos C = -1$ (舍) 又 $0 < C < \pi$, $\therefore C = \frac{\pi}{3}$

(2) 由正弦定理及 $a^2 = b^2 + \frac{1}{2}c^2$ 得:

$$2\sin^2 A - 2\sin^2 B = \sin^2 C = \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$$

$$1 - \cos 2A - 1 + \cos 2B = \frac{3}{4} \quad \therefore \cos 2A - \cos 2B = -\frac{3}{4}$$

33. 用反三角函数表示角时要注意角的范围。

反正弦: $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \in [-1, 1]$ 反余弦: $\arccos x \in [0, \pi]$, $x \in [-1, 1]$

反正切: $\arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ($x \in \mathbb{R}$)

34. 不等式的性质有哪些?

(1) $a > b$, $c > 0 \Rightarrow ac > bc$
 $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

(2) $a > b$, $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

(3) $a > b > 0$, $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$ (4) $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(5) $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ (6) $|x| < a$ ($a > 0$) $\Leftrightarrow -a < x < a$, $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ 或 $x > a$

如: 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 则下列结论不正确的是 ()

A. $a^2 < b^2$

B. $ab < b^2$

C. $|a| + |b| > |a + b|$

D. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ 答案: C

35. 利用均值不等式:

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in \mathbb{R}^+$); $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 求最值时, 你是否注

意到 “ $a, b \in \mathbb{R}^+$ ” 且 “等号成立” 时的条件, 积(ab)或和($a+b$)其中之一为定

值? (一正、二定、三相等) 注意如下结论:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (a, b \in \mathbb{R}_+) \quad \text{当且仅当 } a = b \text{ 时等号成立。}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (a, b \in \mathbb{R}) \quad \text{当且仅当 } a = b = c \text{ 时取等号。}$$

$$a > b > 0, m > 0, n > 0, \text{ 则 } \frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m} < 1 < \frac{a+n}{b+n} < \frac{a}{b}$$

如: 若 $x > 0$, $2 - 3x - \frac{4}{x}$ 的最大值为 _____

(设 $y = 2 - \left(3x + \frac{4}{x}\right) \leq 2 - 2\sqrt{12} = 2 - 4\sqrt{3}$ 当且仅当 $3x = \frac{4}{x}$, 又 $x > 0$, $\therefore x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时, $y_{\max} = 2 - 4\sqrt{3}$)

又如: $x + 2y = 1$, 则 $2^x + 4^y$ 的最小值为 _____ ($\because 2^x + 2^{2y} \geq 2\sqrt{2^{x+2y}} = 2\sqrt{2^1} = 2$, $\therefore$ 最小值为 $2\sqrt{2}$)

36. 不等式证明的基本方法都掌握了吗? (比较法、分析法、综合法、数学归纳法等)

并注意简单放缩法的应用。

如: 证明 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$

$$(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n})$$

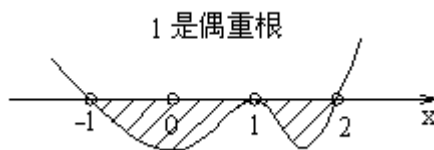
$$= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$= 2 - \frac{1}{n} < 2)$$

37. 解分式不等式 $\frac{f(x)}{g(x)} > a$ ($a \neq 0$) 的一般步骤是什么?

(移项通分, 分子分母因式分解, x 的系数变为 1, 穿轴法解得结果。)

38. 用“数轴标根法”解高次不等式——“奇穿, 偶回”, 从最大根的右上方开始



如: $(x+1)(x-1)^2(x-2)^3 < 0$

39. 解含有参数的不等式要注意对字母参数的讨论 如: 对数或指数的底数 $a > 1$ 或 $0 < a < 1$ 讨论

40. 对含有两个绝对值的不等式如何去解? (找零点, 分段讨论, 去掉绝对值符号, 最后取各段的并集。)

例如: 解不等式 $|x-3| - |x+1| < 1$ (解集为 $\left\{x \mid x > \frac{1}{2}\right\}$)

41. 会用不等式 $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ 证明较简单的不等问题

如: 设 $f(x) = x^2 - x + 13$, 实数 a 满足 $|x - a| < 1$ 求证: $|f(x) - f(a)| < 2(|a| + 1)$

证明: $|f(x) - f(a)| = |(x^2 - x + 13) - (a^2 - a + 13)|$

$$= |(x-a)(x+a-1)| \quad (\because |x-a| < 1)$$

$$= |x-a||x+a-1| < |x+a-1|$$

$$\leq |x| + |a| + 1$$

$$\text{又 } |x| - |a| \leq |x-a| < 1, \therefore |x| < |a| + 1$$

$$\therefore |f(x) - f(a)| < 2|a| + 2 = 2(|a| + 1) \quad (\text{按不等号方向放缩})$$

42. 不等式恒成立问题, 常用的处理方式是什么? (可转化为最值问题, 或“ Δ ”问题)

如: $a < f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a < f(x)$ 的最小值

$a > f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a > f(x)$ 的最大值

$a > f(x)$ 能成立 $\Leftrightarrow a > f(x)$ 的最小值

例如：对于一切实数 x ，若 $|x-3|+|x+2| > a$ 恒成立，则 a 的取值范围是_____

(设 $u = |x-3|+|x+2|$ ，它表示数轴上到两定点 -2 和 3 距离之和

$$u_{\min} = 3 - (-2) = 5, \therefore 5 > a, \text{ 即 } a < 5 \quad \text{或者: } |x-3|+|x+2| \geq |(x-3)-(x+2)| = 5, \therefore a < 5)$$

43. 等差数列的定义与性质

定义： $a_{n+1} - a_n = d$ (d 为常数)， $a_n = a_1 + (n-1)d$

等差中项： x, A, y 成等差数列 $\Leftrightarrow 2A = x + y$

$$\text{前}n\text{项和} S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

性质： $\{a_n\}$ 是等差数列

(1) 若 $m + n = p + q$ ，则 $a_m + a_n = a_p + a_q$ ；

(2) 数列 $\{a_{2n-1}\}, \{a_{2n}\}, \{ka_n + b\}$ 仍为等差数列； $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} \cdots$ 仍为等差数列；

(3) 若三个数成等差数列，可设为 $a-d, a, a+d$ ；

(4) 若 a_n, b_n 是等差数列 S_n, T_n 为前 n 项和，则 $\frac{a_m}{b_m} = \frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$ ；

(5) $\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow S_n = an^2 + bn$ (a, b 为常数，是关于 n 的常数项为0的二次函数)

S_n 的最值可求二次函数 $S_n = an^2 + bn$ 的最值；或者求出 $\{a_n\}$ 中的正、负分界项，即：

当 $a_1 > 0, d < 0$ ，解不等式组 $\begin{cases} a_n \geq 0 \\ a_{n+1} \leq 0 \end{cases}$ 可得 S_n 达到最大值时的 n 值。

当 $a_1 < 0, d > 0$ ，由 $\begin{cases} a_n \leq 0 \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases}$ 可得 S_n 达到最小值时的 n 值。

如：等差数列 $\{a_n\}$ ， $S_n = 18, a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 3, S_3 = 1$ ，则 $n =$ _____

(由 $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 3 \Rightarrow 3a_{n-1} = 3, \therefore a_{n-1} = 1$ 又 $S_3 = \frac{(a_1 + a_3)}{2} \cdot 3 = 3a_2 = 1, \therefore a_2 = \frac{1}{3}$

$$\therefore S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_2 + a_{n-1}) \cdot n}{2} = \frac{\left(\frac{1}{3} + 1\right)n}{2} = 18 \quad \therefore n = 27)$$

44. 等比数列的定义与性质

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/695104303204011140>