引言

二重积分是多元函数积分的基础，二重积分的计算要在熟悉定积分的基础上，运用坐标系将二重积分化为二次积分[1]。在我们学习的课程中，数学分析把二重积分作为我们学习的重难点，二重积分的计算是一种极限，这种极限是相加的[2]，能正确计算出二重积分是我们学习多元函数积分学必须掌握的基本能力之一。二重积分在积分学中占据着重要位置，三重积分和曲面积分的计算都要借助于二重积分[3]，平面曲线积分通过格林公式也可转化成二重积分，所以二重积分的计算是多元积分学的基础。因此，我们要掌握二重积分的计算方法，其基本的计算方法主要有：利用直角坐标系计算二重积分；利用极坐标系计算二重积分[4]；利用其可加性、对称性、二重积分中值定理等性质来计算[5]。本文选择当二重积分适用极坐标系的情况作为介绍，也就是当积分区域为圆形、扇形或者被积函数中含有 $\frac{y}{x},x^2+y^2$ 时我们选用极坐标[6]。在计算时，如果我们选择了错误的方法去计算，或者当被积函数较为复杂时，那么二重积分的计算成为了我们学习的难题[7]。当积分区域变得复杂后，我们在采用一般的方法去计算，就很难计算出二重积分的值，且易出错又浪费时间[8]，或者一般方法无法进行计算，因此，本文首先从极坐标系出发，运用实例展现出二重积分在极坐标系下如何运算，并且把重点放在复杂区域上二重积分的数值计算，将此计算运用到 *Freefem++*程序中，通过 *Freefem++*运行出结果，减少二重积分计算过程的繁琐性[9]。

1. 二重积分的定义

二重积分是二元函数在空间上的积分，是某种特定形式的和的极限。定义如下：

(1)设 $z=f(x,y)$ 为有界闭区域 D 上的有界函数，将区域 D 任意分成 n 个子域 $\Delta\delta_i(i=1,2...n)$，并以 $\Delta\delta_i(i=1,2,3\cdots n)$ 表示第 i 个子域的面积。

(2)在每一个子域 $\Delta\delta_\mathrm{i}$ 上任取一点 $(\xi_i，\eta_i)$，作乘积 $f(\xi_i，\eta_i)\Delta\delta_i$。

(3)将所有成积相加，即作出和数，$\sum_i^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\delta_i$。

(4)记子域的最大直径为d，如果无论子域怎样划分以及(ξ_i,η_i)怎样选取，当上述和数$n\to\infty$，且$d\to 0$时的极限存在，此和数的极限存在，且该极限值与区域D的分法及(ξ_i,η_i)的取法无关，则称此极限为函数$f(x,y)$在区域上的二重积分，记为$\iint\limits_D f(x,y)d\delta$，即

$$\iint\limits_D f(\xi_i,\eta_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)d\delta_i \quad , \tag{1.1}$$

这时，称$f(x,y)$在D上可积，其中x,y称为积分变量，函数$f(x,y)$称为被积函数，$f(x,y)d\delta$称为被积表达式，$d\delta$称为面积元素，D称为积分区域，$\iint$ 称为二重积分符号。

2.二重积分在极坐标系下的运算

2.1 二重积分在极坐标下的表达式

利用极坐标系来计算二重积分，我们就需要求出极坐标系下二重积分的表达式，要灵活运用极点以及区域D确定好r和θ的范围[10]。令

$x=\rho cos\theta$，$y=\rho sin\theta$，则函数$f(x,y)$的极坐标形式为$f(\rho cos\theta,\rho sin\theta)$。为了得到极坐标下的面积元素$d\delta$的转换，用坐标曲线网去分割$D$，即用$\rho=a$（$a$为常数)，即$O$为圆心$r$为半径的圆，$\theta=b$（$b$为常数)，此时区域$D$由$\rho$和$\theta$分割成许多较小的区域，设$\varDelta\delta$就是$r$到$r+dr$和从$\theta$到$\theta+d\theta$的小区域，其面积为

$$\varDelta\delta=\frac{1}{2}(r=\varDelta r)^2\varDelta\theta-\frac{1}{2}r^2\varDelta\theta$$

可得二重积分在极坐标下的表达式为：

$$\iint\limits_D f(x,y)d\delta=\iint\limits_{D'} f(\rho cos\theta,\rho sin\theta)\rho d\rho d\theta \quad , \tag{2.1}$$

其换元思想类似于定积分的换元法。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/696004010231011001