

## 2025 年广东省揭阳、金中高三 2 月第一次调研数学试题

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 数列  $\{a_n\}$  满足：  $a_{n+2} + a_n = a_{n+1}$ ，  $a_1 = 1$ ，  $a_2 = 2$ ，  $S_n$  为其前  $n$  项和，则  $S_{2019} =$  ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 3                      D. 4

2. 已知函数  $y = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z}), \\ -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z}), \end{cases}$  的图象与直线  $y = m(x+2) (m > 0)$  恰有四个公共

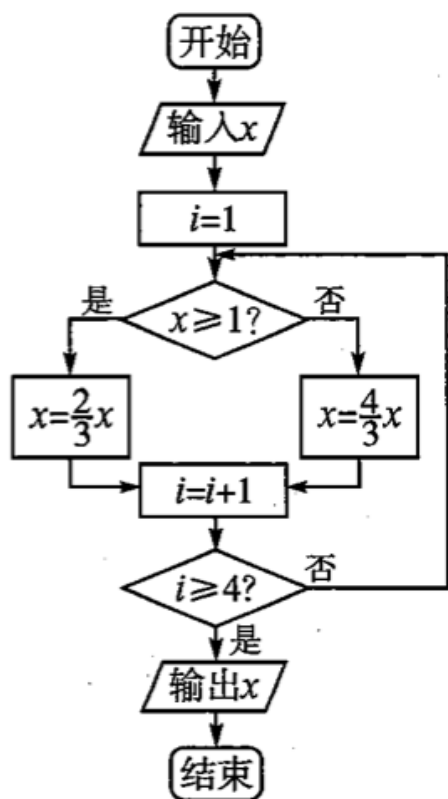
点  $A(x_1, y_1), B(x_1, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ ，其中  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ，则  $(x_4 + 2) \tan x_4 =$  ( )

- A. -1                      B. 0                      C. 1                      D.  $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$

3. 已知正四面体的内切球体积为  $v$ ，外接球的体积为  $V$ ，则  $\frac{V}{v} =$  ( )

- A. 4                      B. 8                      C. 9                      D. 27

4. 相传黄帝时代，在制定乐律时，用“三分损益”的方法得到不同的竹管，吹出不同的音调。如图的程序是与“三分损益”结合的计算过程，若输入的  $x$  的值为 1，输出的  $x$  的值为 ( )



- A.  $\frac{64}{81}$       B.  $\frac{32}{27}$       C.  $\frac{8}{9}$       D.  $\frac{16}{27}$

5. 已知集合  $A = \left\{ x \mid \frac{x-1}{x+2} < 0 \right\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1\}$ , 则  $A \cap B$  等于 ( )

- A.  $\{x \mid -1 < x < 1\}$     B.  $\{-1, 0, 1\}$     C.  $\{-1, 0\}$     D.  $\{0, 1\}$

6. 记  $M$  的最大值和最小值分别为  $M_{\max}$  和  $M_{\min}$ . 若平面向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ , 满足  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} \cdot \vec{b}| = \vec{c} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) = 2$ , 则 ( )

- A.  $\left| \vec{a} - \vec{c} \right|_{\max} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$       B.  $\left| \vec{a} + \vec{c} \right|_{\max} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$   
 C.  $\left| \vec{a} - \vec{c} \right|_{\min} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$       D.  $\left| \vec{a} + \vec{c} \right|_{\min} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$

7. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_3 = 7$ ,  $S_3 = 9$ , 则  $a_{10} =$  ( )

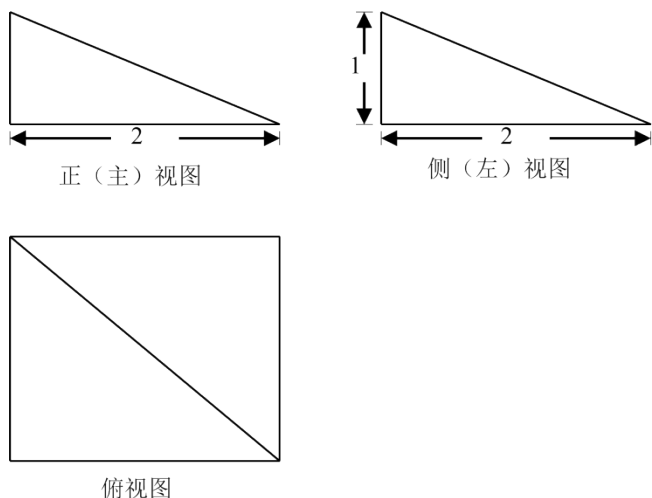
- A. 25      B. 32      C. 35      D. 40

8. 函数  $\square(\square) = \sqrt{2\square - 3} + \frac{1}{\square - 3}$  的定义域为 ( )

- A.  $[\frac{3}{2}, 3) \cup (3, +\infty)$     B.  $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

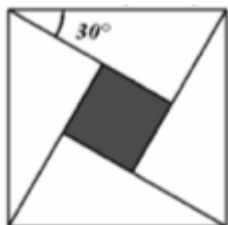
- C.  $[\frac{3}{2}, +\infty)$       D.  $(3, +\infty)$

9. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的体积为（ ）



- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{4}{3}$       C. 2      D. 4

10. 如图所示，三国时代数学家在《周脾算经》中利用弦图，给出了勾股定理的绝妙证明.图中包含四个全等的直角三角形及一个小正方形（阴影），设直角三角形有一个内角为  $30^\circ$ ，若向弦图内随机抛掷 200 颗米粒（大小忽略不计，取  $\sqrt{3} \approx 1.732$ ），则落在小正方形（阴影）内的米粒数大约为（ ）



- A. 20      B. 27      C. 54      D. 64

11. 集合  $\left\{x \in N^* \mid \frac{12}{x} \in Z\right\}$  中含有的元素个数为（ ）

- A. 4      B. 6      C. 8      D. 12

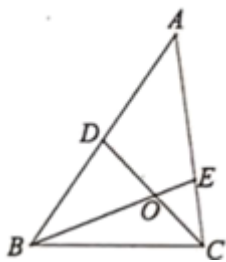
12. 一辆邮车从  $A$  地往  $B$  地运送邮件，沿途共有  $n$  地，依次记为  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $A_1$  为  $A$  地， $A_n$  为  $B$  地). 从  $A_1$  地出发时，装上发往后面  $n-1$  地的邮件各 1 件，到达后面各地后卸下前面各地发往该地的邮件，同时装上该地发往后面各地的邮件各 1 件，记该邮车到达  $A_1, A_2, \dots, A_n$  各地装卸完毕后剩余的邮件数记为  $a_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ). 则  $a_k$  的表达式为（ ）.

- A.  $k(n-k+1)$       B.  $k(n-k-1)$       C.  $n(n-k)$       D.  $k(n-k)$

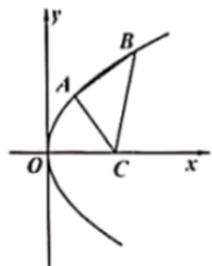
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y - 2 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = 3x - 2y$  的最小值是\_\_\_\_\_, 最大值是\_\_\_\_\_.

14. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 4$ ,  $D$  是  $AB$  的中点,  $E$  在边  $AC$  上,  $AE = 2EC$ ,  $CD$  与  $BE$  交于点  $O$ , 若  $OB = \sqrt{2} OC$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值为\_\_\_\_\_.



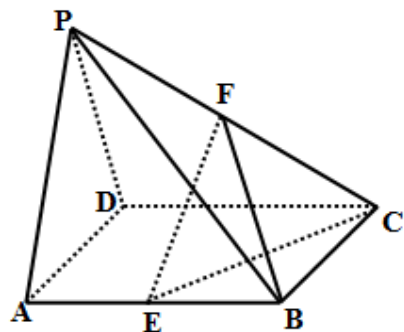
15. 如图所示, 点  $A(1, 2)$ ,  $B$  均在抛物线  $y^2 = 4x$  上, 等腰直角  $\triangle ABC$  的斜边为  $BC$ , 点  $C$  在  $x$  轴的正半轴上, 则点  $B$  的坐标是\_\_\_\_\_.



16.  $(x + 2y)(x - y)^5$  展开式中  $x^3 y^3$  的系数为\_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 如图所示, 在四棱锥  $P - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是棱长为 2 的正方形, 侧面  $PAD$  为正三角形, 且面  $PAD \perp$  面  $ABCD$ ,  $E, F$  分别为棱  $AB, PC$  的中点.



(1) 求证:  $EF \parallel$  平面  $PAD$ ;

(2) 求二面角  $P - EC - D$  的正切值.

18. (12 分) 设函数  $f(x) = |x + a| + |x - b|$ ,

(1) 当  $a=1$ ,  $b=2$ , 求不等式  $f(x) \geq 6$  的解集;

(2) 已知  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $f(x)$  的最小值为 1, 求证:  $\frac{1}{2a+1} + \frac{4}{2b+1} \geq \frac{9}{4}$ .

19. (12 分) 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴, 且在两种坐标系中取相同的长度单位, 建立极坐标系, 判断

直线  $l: \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-2t \end{cases}$  ( $t$  为参数) 与圆  $C: \rho^2 + 2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta = 0$  的位置关系.

20. (12 分) 在直角坐标系  $xOy$  中, 把曲线  $C_1: \begin{cases} x=2\cos \alpha \\ y=2\sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数) 上每个点的横坐标变为原来的  $\sqrt{3}$  倍, 纵坐标

不变, 得到曲线  $C_2$ . 以坐标原点为极点, 以  $x$  轴正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线  $C_3$  的极坐标方程

$$\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = 4\sqrt{2}.$$

(1) 写出  $C_2$  的普通方程和  $C_3$  的直角坐标方程;

(2) 设点  $M$  在  $C_2$  上, 点  $N$  在  $C_3$  上, 求  $|MN|$  的最小值以及此时  $M$  的直角坐标.

21. (12 分) 联合国粮农组织对某地区最近 10 年的粮食需求量部分统计数据如下表:

| 年份      | 2010 | 2012 | 2014 | 2016 | 2018 |
|---------|------|------|------|------|------|
| 需求量(万吨) | 236  | 246  | 257  | 276  | 286  |

(1) 由所给数据可知, 年需求量与年份之间具有线性相关关系, 我们以“年份—2014”为横坐标  $x$ , “需求量—257”为纵坐标  $y$ , 请完成如下数据处理表格:

| 年份—2014 |  |  | 0 |  |  |
|---------|--|--|---|--|--|
| 需求量—257 |  |  | 0 |  |  |

(2) 根据回归直线方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  分析, 2020 年联合国粮农组织计划向该地区投放粮食 300 万吨, 问是否能够满足该地区的粮食需求?

参考公式: 对于一组数据  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , 其回归直线  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  的斜率和截距的最小二乘估计分

别为: 
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

22. (10 分) 已知  $a, b, c$  分别是  $\triangle ABC$  三个内角  $A, B, C$  的对边,  $a \cos C + \sqrt{3}c \sin A = b + c$ .

(1) 求  $A$ ;

(2) 若  $a = \sqrt{3}$ ,  $b + c = 3$ , 求  $b$ ,  $c$ .

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. D

【解析】

用  $n+1$  去换  $a_{n+2} + a_n = a_{n+1}$  中的  $n$ ，得  $a_{n+3} + a_{n+1} = a_{n+2}$ ，相加即可找到数列  $\{a_n\}$  的周期，再利用

$S_{2019} = 336S_6 + a_1 + a_2 + a_3$  计算.

【详解】

由已知， $a_{n+2} + a_n = a_{n+1}$  ①，所以  $a_{n+3} + a_{n+1} = a_{n+2}$  ②，①+②，得  $a_{n+3} = -a_n$ ，

从而  $a_{n+6} = a_n$ ，数列是以 6 为周期的周期数列，且前 6 项分别为 1, 2, 1, -1, -2, -1，所以  $S_6 = 0$ ，

$S_{2019} = 336(a_1 + a_2 + \dots + a_6) + a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 1 + 2 + 1 = 4$ .

故选：D.

本题考查周期数列的应用，在求  $S_{2019}$  时，先算出一个周期的和即  $S_6$ ，再将  $S_{2019}$  表示成  $336S_6 + a_1 + a_2 + a_3$  即可，本题是一道中档题.

2. A

【解析】

先将函数解析式化简为  $y = |\cos x|$ ，结合题意可求得切点  $x_4$  及其范围  $x_4 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，根据导数几何意义，即可求得

$(x_4 + 2)\tan x_4$  的值.

【详解】

$$\text{函数 } y = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z}), \\ -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

即  $y = |\cos x|$

直线  $y = m(x+2) (m > 0)$  与函数  $y = |\cos x|$  图象恰有四个公共点，结合图象知直线  $y = m(x+2) (m > 0)$  与函数

$y = -\cos x$  相切于  $x_4$ ， $x_4 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，

因为  $y' = \sin x$ ，

$$\text{故 } k = \sin x_4 = \frac{-\cos x_4}{x_4 + 2},$$

$$\text{所以 } (x_4 + 2) \tan x_4 = (x_4 + 2) \times \frac{\sin x_4}{\cos x_4} = (x_4 + 2) \times \frac{-1}{(x_4 + 2)} = -1.$$

故选：A.

本题考查了三角函数的图像与性质的综合应用，由交点及导数的几何意义求函数值，属于难题.

3. D

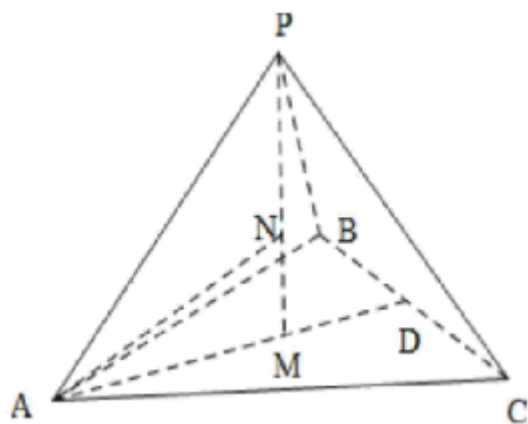
### 【解析】

设正四面体的棱长为1，取  $BC$  的中点为  $D$ ，连接  $AD$ ，作正四面体的高为  $PM$ ，首先求出正四面体的体积，再利用等体法求出内切球的半径，在  $Rt\triangle AMN$  中，根据勾股定理求出外接球的半径，利用球的体积公式即可求解.

### 【详解】

设正四面体的棱长为1，取  $BC$  的中点为  $D$ ，连接  $AD$ ，

作正四面体的高为  $PM$ ，



$$\text{则 } AD = \frac{\sqrt{3}}{2}, AM = \frac{2}{3} AD = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore PM = \sqrt{PA^2 - AM^2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12},$$

设内切球的半径为  $r$ ，内切球的球心为  $O$ ，

$$\text{则 } V_{P-ABC} = 4V_{O-ABC} = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} r,$$

$$\text{解得： } r = \frac{\sqrt{6}}{12};$$

设外接球的半径为  $R$ ，外接球的球心为  $N$ ，

则  $|MN| = |PM - R|$  或  $|R - PM|$ ， $AN = R$ ，

在  $Rt\triangle AMN$  中，由勾股定理得：

$$AM^2 + MN^2 = AN^2,$$

$$\therefore \frac{1}{3} + \left( \frac{\sqrt{6}}{3} - R \right)^2 = R^2, \text{ 解得 } R = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\therefore \frac{R}{r} = 3,$$

$$\therefore \frac{V}{v} = \frac{R^3}{r^3} = 27$$

故选：D

本题主要考查了多面体的内切球、外接球问题，考查了椎体的体积公式以及球的体积公式，需熟记几何体的体积公式，属于基础题.

4. B

**【解析】**

根据循环语句，输入  $x = 1$ ，执行循环语句即可计算出结果.

**【详解】**

输入  $x = 1$ ，由题意执行循环结构程序框图，可得：

第1次循环： $x = \frac{2}{3}$ ， $i = 2 < 4$ ，不满足判断条件；

第2次循环： $x = \frac{8}{9}$ ， $i = 3 < 4$ ，不满足判断条件；

第4次循环： $x = \frac{32}{27}$ ， $i = 4 \geq 4$ ，满足判断条件；输出结果  $x = \frac{32}{27}$ .

故选：B

本题考查了循环语句的程序框图，求输出的结果，解答此类题目时结合循环的条件进行计算，需要注意跳出循环的判定语句，本题较为基础.

5. C

**【解析】**

先化简集合  $A$ ，再与集合  $B$  求交集.

**【详解】**

因为  $A = \left\{ x \mid \frac{x-1}{x+2} < 0 \right\} = \{ x \mid -2 < x < 1 \}$ ， $B = \{ -1, 0, 1 \}$ ，

所以  $A \cap B = \{-1, 0\}$ .

故选: C

本题主要考查集合的基本运算以及分式不等式的解法, 属于基础题.

6. A

【解析】

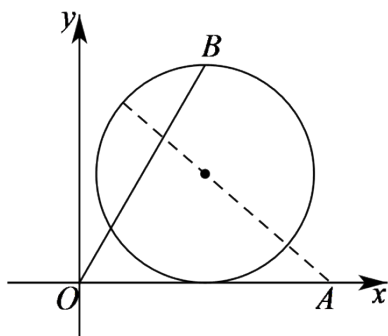
设  $\theta$  为  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的夹角, 根据题意求得  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , 然后建立平面直角坐标系, 设  $\vec{a} = \vec{OA} = (2, 0)$ ,  $\vec{b} = \vec{OB} = (1, \sqrt{3})$ ,

$\vec{c} = \vec{OC} = (x, y)$ , 根据平面向量数量积的坐标运算得出点  $C$  的轨迹方程, 将  $|\vec{a} - \vec{c}|$  和  $|\vec{a} + \vec{c}|$  转化为圆上的点到定点距离, 利用数形结合思想可得出结果.

【详解】

由已知可得  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta = 2$ , 则  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ ,

建立平面直角坐标系, 设  $\vec{a} = \vec{OA} = (2, 0)$ ,  $\vec{b} = \vec{OB} = (1, \sqrt{3})$ ,  $\vec{c} = \vec{OC} = (x, y)$ ,



由  $\vec{c} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) = 2$ , 可得  $(x, y) \cdot (4 - 2x, 2\sqrt{3} - 2y) = 2$ ,

即  $4x - 2x^2 + 2\sqrt{3}y - 2y^2 = 2$ ,

化简得点  $C$  的轨迹方程为  $(x-1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ , 则  $|\vec{a} - \vec{c}| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ ,

则  $|\vec{a} - \vec{c}|$  转化为圆  $(x-1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$  上的点与点  $(2, 0)$  的距离,  $\therefore |\vec{a} - \vec{c}|_{\max} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$ ,

$|\vec{a} - \vec{c}|_{\min} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$ ,

$|\vec{a} + \vec{c}| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$ ,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/696031203154010215>