

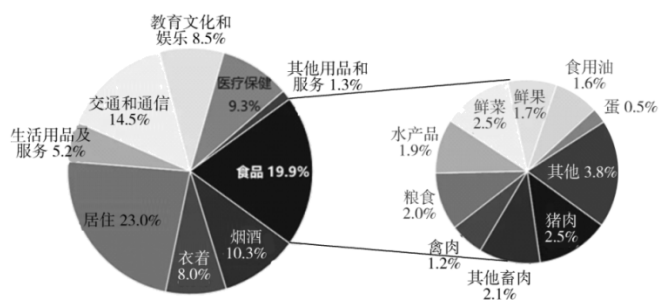
江西省江西师大附中 2024 届高三 5 月热身考试数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 据国家统计局发布的数据，2019 年 11 月全国 CPI （居民消费价格指数），同比上涨 4.5%， CPI 上涨的主要因素是猪肉价格的上涨，猪肉加上其他畜肉影响 CPI 上涨 3.27 个百分点。下图是 2019 年 11 月 CPI 一篮子商品权重，根据该图，下列结论错误的是（ ）



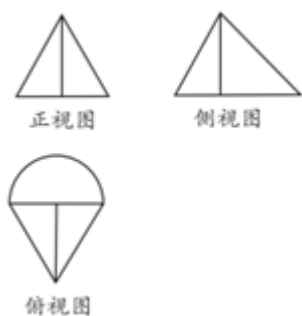
- A. CPI 一篮子商品中所占权重最大的是居住
- B. CPI 一篮子商品中吃穿住所占权重超过 50%
- C. 猪肉在 CPI 一篮子商品中所占权重约为 2.5%
- D. 猪肉与其他畜肉在 CPI 一篮子商品中所占权重约为 0.18%
2. 若 $(1+ax)(1+x)^5$ 的展开式中 x^2, x^3 的系数之和为 -10 ，则实数 a 的值为（ ）
- A. -3 B. -2 C. -1 D. 1
3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+4}, & x > 0 \end{cases}$ ，若 $f(x_0) < 2$ ，则 x_0 的取值范围是（ ）
- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0]$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, 0)$
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $(S_n+1)(S_{n+2}+1) = (S_{n+1}+1)^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$)， $a_1=1, a_2=2$ ，则 $S_n =$ （ ）
- A. $\frac{n(n+1)}{2}$ B. 2^{n+1} C. $2^n - 1$ D. $2^{n+1} + 1$
5. 已知直线 $l: x + m^2y = 0$ 与直线 $n: x + y + m = 0$ 则“ $l \parallel n$ ”是“ $m=1$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 某设备使用年限 x (年) 与所支出的维修费用 y (万元) 的统计数据 (x, y) 分别为 $(2, 1.5)$, $(3, 4.5)$, $(4, 5.5)$, $(5, 6.5)$, 由最小二乘法得到回归直线方程为 $\hat{y} = 1.6x + \hat{a}$, 若计划维修费用超过 15 万元将该设备报废, 则该设备的使用年限为 ()

- A. 8 年 B. 9 年 C. 10 年 D. 11 年

7. 某几何体的三视图如图所示, 其中正视图是边长为 4 的正三角形, 俯视图是由边长为 4 的正三角形和一个半圆构成, 则该几何体的体积为 ()

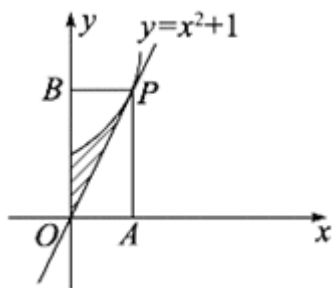


- A. $8 + \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$ B. $8 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ C. $4 + \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$ D. $4 + \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$

8. 已知向量 $\vec{a} = (1, 4)$, $\vec{b} = (-2, m)$, 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $m =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -8 D. 8

9. 如图在直角坐标系 xOy 中, 过原点 O 作曲线 $y = x^2 + 1$ ($x \geq 0$) 的切线, 切点为 P , 过点 P 分别作 x 、 y 轴的垂线, 垂足分别为 A 、 B , 在矩形 $OAPB$ 中随机选取一点, 则它在阴影部分的概率为 ()



- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

10. 给出下列四个命题: ①若“ p 且 q ”为假命题, 则 p 、 q 均为假命题; ②三角形的内角是第一象限角或第二象限角;
③若命题 $p: \exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 \geq 0$, 则命题 $\neg p: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$; ④设集合 $A = \{x | x > 1\}$, $B = \{x | x > 2\}$, 则“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件; 其中正确命题的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. 点 M 在曲线 $G: y = 3 \ln x$ 上, 过 M 作 x 轴垂线 l , 设 l 与曲线 $y = \frac{1}{x}$ 交于点 N , $\vec{OP} = \frac{\vec{OM} + \vec{ON}}{3}$, 且 P 点的纵坐标始终为 0, 则称 M 点为曲线 G 上的“水平黄金点”, 则曲线 G 上的“水平黄金点”的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

12. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的周期为 4, 当 $x \in [-2, 2)$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - x - 4$, 则 $f(-\log_3 6) + f(\log_3 54) =$

()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2} - \log_3 2$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3} + \log_3 2$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若函数 $f(x) = mx^2 - e^x + 1$ (e 为自然对数的底数) 在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 两处取得极值, 且 $x_2 \geq 2x_1$, 则实数 m 的取值范围是_____.

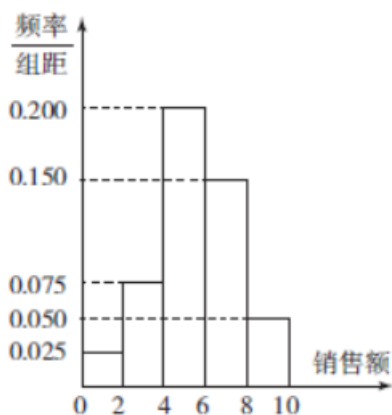
14. 函数 $f(x) = (a-1)^x - 3$ ($a > 1, a \neq 2$) 过定点_____.

15. 过圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 的圆心且与直线 $2x + 3y = 0$ 垂直的直线方程为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, BC 为定长, $|\vec{AB} + 2\vec{AC}| = 3|\vec{BC}|$, 若 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 2, 则边 BC 的长为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某网络商城在 2019 年 1 月 1 日开展“庆元旦”活动, 当天各店铺销售额破十亿, 为了提高各店铺销售的积极性, 采用摇号抽奖的方式, 抽取了 40 家店铺进行红包奖励. 如图是抽取的 40 家店铺元旦当天的销售额 (单位: 千元) 的频率分布直方图.



- 求抽取的这 40 家店铺, 元旦当天销售额的平均值;
- 估计抽取的 40 家店铺中元旦当天销售额不低于 4000 元的有多少家;
- 为了了解抽取的各店铺的销售方案, 销售额在 $[0, 2)$ 和 $[8, 10]$

的店铺中共抽取两家店铺进行销售研究，求抽取的店铺销售额在 $[0,2)$ 中的个数 ζ 的分布列和数学期望.

18.（12分）设椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F ，过 F 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$.

- （1）当直线 l 的倾斜角为 45° 时，求线段 AB 的中点的横坐标；
- （2）设点 A 关于 x 轴的对称点为 C ，求证： M,B,C 三点共线；
- （3）设过点 M 的直线交椭圆于 G,H 两点，若椭圆上存在点 P ，使得 $\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}=\lambda\overrightarrow{OP}$ （其中 O 为坐标原点），求实数 λ 的取值范围.

19.（12分）语音交互是人工智能的方向之一，现在市场上流行多种可实现语音交互的智能音箱.主要代表有小米公司的“小爱同学”智能音箱和阿里巴巴的“天猫精灵”智能音箱，它们可以通过语音交互满足人们的部分需求.某经销商为了了解不同智能音箱与其购买者性别之间的关联程度，从某地区随机抽取了100名购买“小爱同学”和100名购买“天猫精灵”的人，具体数据如下：

	“小爱同学”智能音箱	“天猫精灵”智能音箱	合计
男	45	60	105
女	55	40	95
合计	100	100	200

- （1）若该地区共有13000人购买了“小爱同学”，有12000人购买了“天猫精灵”，试估计该地区购买“小爱同学”的女性比购买“天猫精灵”的女性多多少人？
- （2）根据列联表，能否有95%的把握认为购买“小爱同学”、“天猫精灵”与性别有关？

附：
$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2\geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20.（12分）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ ，点 $A(1,0),B(0,1)$ ，点 P 满足 $\overrightarrow{OA}+\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$ （其中 O 为坐标原点），点 B,P 在椭圆 C 上.

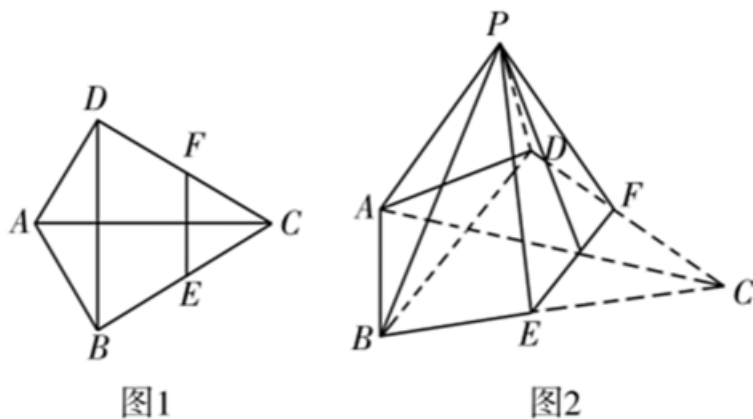
- （1）求椭圆 C 的标准方程；
- （2）设椭圆的右焦点为 F ，若经过点 F 的直线 $l:y=kx+m(k<0,m>0)$ 与椭圆 C 交于 M,N 两点.且与圆

$x^2 + y^2 = 1$ 相切. $VMNF$ 的周长是否为定值?若是, 求出定值; 若不是, 请说明理由.

21. (12 分) 如图 1, $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABC$ 是处在同一个平面内的两个全等的直角三角形,

$\angle ACB = \angle ACD = 30^\circ$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = 2$, 连接是 BD , E 边 BC 上一点, 过 E 作 $EF \parallel BD$, 交 CD

于点 F , 沿 EF 将 $\triangle CEF$ 向上翻折, 得到如图 2 所示的六面体 $P-ABEFD$,



(1) 求证: $BD \perp AP$;

(2) 设 $\vec{BE} = \lambda \vec{EC}$ ($\lambda \in R$), 若平面 $PEF \perp$ 底面 $ABEFD$, 若平面 PAB 与平面 PDF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求 λ 的值;

(3) 若平面 $PEF \perp$ 底面 $ABEFD$, 求六面体 $P-ABEFD$ 的体积的最大值.

22. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $c \sin A = a \sin\left(C + \frac{\pi}{3}\right)$.

(I) 求角 C 的大小;

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, $a - b = 1$, 求 c 和 $\cos(2A - C)$ 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

A.从第一个图观察居住占 23%，与其他比较即可. B. CPI 一篮子商品中吃穿住所占 $23\%+8\%+19.9\%=50.9\%$ ，再判断. C. 食品占 19.9%，再看第二个图，分清 2.5%是在 CPI 一篮子商品中，还是在食品中即可. D. 易知猪肉与其他畜肉在 CPI 一篮子商品中所占权重约为 $2.1\%+2.5\%=4.6\%$.

【详解】

- A. CPI 一篮子商品中居住占 23%，所占权重最大的，故正确.
B. CPI 一篮子商品中吃穿住所占 $23\%+8\%+19.9\%=50.9\%$ ，权重超过 50%，故正确.
C. 食品占 19.9%，分解后后可知猪肉是占在 CPI 一篮子商品中所占权重约为 2.5%，故正确.
D. 猪肉与其他畜肉在 CPI 一篮子商品中所占权重约为 $2.1\%+2.5\%=4.6\%$ ，故错误.

故选：D

【点睛】

本题主要考查统计图的识别与应用，还考查了理解辨析的能力，属于基础题.

2、B

【解析】

由 $(1+ax)(1+x)^5 = (1+x)^5 + ax(1+x)^5$ ，进而分别求出展开式中 x^2 的系数及展开式中 x^3 的系数，令二者之和等于 -10，可求出实数 a 的值.

【详解】

$$\text{由 } (1+ax)(1+x)^5 = (1+x)^5 + ax(1+x)^5,$$

则展开式中 x^2 的系数为 $C_5^2 + aC_5^1 = 10 + 5a$ ，展开式中 x^3 的系数为 $C_5^3 + aC_5^2 = 10 + 10a$ ，

二者的系数之和为 $(10 + 5a) + (10a + 10) = 15a + 20 = -10$ ，得 $a = -2$.

故选：B.

【点睛】

本题考查二项式定理的应用，考查学生的计算求解能力，属于基础题.

3、B

【解析】

对 x_0 分类讨论，代入解析式求出 $f(x_0)$ ，解不等式，即可求解.

【详解】

$$\text{函数 } f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+4}, & x > 0 \end{cases}, \text{ 由 } f(x_0) < 2$$

$$\text{得} \begin{cases} 2^{-x_0} < 2 \\ x_0 \geq 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \sqrt{x_0 + 4} < 2 \\ x_0 > 0 \end{cases}$$

解得 $-1 < x_0 < 0$.

故选:B.

【点睛】

本题考查利用分段函数性质解不等式，属于基础题.

4、C

【解析】

根据已知条件判断出数列 $\{S_n + 1\}$ 是等比数列，求得其通项公式，由此求得 S_n .

【详解】

由于 $(S_n + 1)(S_{n+2} + 1) = (S_{n+1} + 1)^2 (n \in \mathbb{N}^*)$ ，所以数列 $\{S_n + 1\}$ 是等比数列，其首项为 $S_1 + 1 = a_1 + 1 = 2$ ，第二项为

$S_2 + 1 = a_1 + a_2 + 1 = 4$ ，所以公比为 $\frac{4}{2} = 2$ ，所以 $S_n + 1 = 2^n$ ，所以 $S_n = 2^n - 1$.

故选：C

【点睛】

本小题主要考查等比数列的证明，考查等比数列通项公式，属于基础题.

5、B

【解析】

利用充分必要条件的定义可判断两个条件之间的关系.

【详解】

若 $l \parallel n$ ，则 $1 \times 1 = m^2 \times 1$ ，故 $m = 1$ 或 $m = -1$ ，

当 $m = 1$ 时，直线 $l: x + y = 0$ ，直线 $n: x + y + 1 = 0$ ，此时两条直线平行；

当 $m = -1$ 时，直线 $l: x + y = 0$ ，直线 $n: x + y - 1 = 0$ ，此时两条直线平行.

所以当 $l \parallel n$ 时，推不出 $m = 1$ ，故“ $l \parallel n$ ”是“ $m = 1$ ”的不充分条件，

当 $m = 1$ 时，可以推出 $l \parallel n$ ，故“ $l \parallel n$ ”是“ $m = 1$ ”的必要条件，

故选：B.

【点睛】

本题考查两条直线的位置关系以及必要不充分条件的判断，前者应根据系数关系来考虑，后者依据两个条件之间的推出关系，本题属于中档题.

6、D

【解析】

根据样本中心点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 在回归直线上, 求出 $\hat{a}$, 求解 $\hat{y} > 15$, 即可求出答案.

【详解】

依题意 $\bar{x} = 3.5, \bar{y} = 4.5, (3.5, 4.5)$ 在回归直线上,

$$4.5 = 1.6 \times 3.5 + \hat{a}, \hat{a} = -1.1, \therefore \hat{y} = 1.6x - 1.1,$$

$$\text{由 } \hat{y} = 1.6x - 1.1 > 15, x > 10 \frac{1}{16},$$

估计第11年维修费用超过 15 万元.

故选:D.

【点睛】

本题考查回归直线过样本中心点、以及回归方程的应用, 属于基础题.

7、A

【解析】

由题意得到该几何体是一个组合体, 前半部分是一个高为 $2\sqrt{3}$ 底面是边长为 4 的等边三角形的三棱锥, 后半部分是一个

$$\text{个底面半径为 2 的半个圆锥, 体积为 } V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 \times 2\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \pi \times 4 \times 2\sqrt{3} = 8 + \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$$

故答案为 A.

点睛: 思考三视图还原空间几何体首先应深刻理解三视图之间的关系, 遵循“长对正, 高平齐, 宽相等”的基本原则, 其内涵为正视图的高是几何体的高, 长是几何体的长; 俯视图的长是几何体的长, 宽是几何体的宽; 侧视图的高是几何体的高, 宽是几何体的宽. 由三视图画出直观图的步骤和思考方法: 1、首先看俯视图, 根据俯视图画出几何体地面的直观图; 2、观察正视图和侧视图找到几何体前、后、左、右的高度; 3、画出整体, 然后再根据三视图进行调整.

8、B

【解析】

先求出向量 $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ 的坐标, 然后由 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 可求出参数 m 的值.

【详解】

$$\text{由向量 } \vec{a} = (1, 4), \vec{b} = (-2, m),$$

$$\text{则 } \vec{a} + \vec{b} = (-1, 4 + m), \vec{a} - \vec{b} = (3, 4 - m)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (4 + m)^2}, |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3^2 + (4 - m)^2}$$

又 $|\frac{1}{a} + \frac{1}{b}| = |\frac{1}{a} - \frac{1}{b}|$, 则 $\sqrt{1^2 + (4+m)^2} = \sqrt{3^2 + (4-m)^2}$, 解得 $m = \frac{1}{2}$.

故选: B

【点睛】

本题考查向量的坐标运算和模长的运算, 属于基础题.

9、A

【解析】

设所求切线的方程为 $y = kx$, 联立 $\begin{cases} y = kx (k > 0) \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$, 消去 y 得出关于 x 的方程, 可得出 $\Delta = 0$, 求出 k 的值, 进而求得

切点 P 的坐标, 利用定积分求出阴影部分区域的面积, 然后利用几何概型概率公式可求得所求事件的概率.

【详解】

设所求切线的方程为 $y = kx$, 则 $k > 0$,

联立 $\begin{cases} y = kx (k > 0) \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$, 消去 y 得 $x^2 - kx + 1 = 0$ ①, 由 $\Delta = k^2 - 4 = 0$, 解得 $k = 2$,

方程①为 $x^2 - 2x + 1 = 0$, 解得 $x = 1$, 则点 $P(1, 2)$,

所以, 阴影部分区域的面积为 $S = \int_0^1 (x^2 + 1 - 2x) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$,

矩形 $OAPB$ 的面积为 $S' = 1 \times 2 = 2$, 因此, 所求概率为 $P = \frac{S}{S'} = \frac{1}{6}$.

故选: A.

【点睛】

本题考查定积分的计算以及几何概型, 同时也涉及了二次函数的切线方程的求解, 考查计算能力, 属于中等题.

10、B

【解析】

①利用 $p \wedge q$ 真假表来判断, ②考虑内角为 90° , ③利用特称命题的否定是全称命题判断,

④利用集合间的包含关系判断.

【详解】

若“ p 且 q ”为假命题, 则 p 、 q 中至少有一个是假命题, 故①错误; 当内角为 90° 时, 不是象限角, 故②错误;

由特称命题的否定是全称命题知③正确; 因为 $B \subseteq A$, 所以 $x \in B \Rightarrow x \in A$, 所以“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件,

故④正确.

故选: B.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/696040012222011000>