

河南省洛阳市第一高级中学 2025 届高三上学期开学数学试

题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是向量, 则 “ $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ” 是 “ $\vec{a} = -\vec{b}$ 或 $\vec{a} = \vec{b}$ ” 的 ().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

2. 设 $\left(\frac{1}{3}\right)^a = 2, b = \log_{\frac{1}{2}} 3 - \log_{\frac{1}{2}} 9, c = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, 则有 ()

- A. $a < b < c$
B. $a < c < b$
C. $b < c < a$
D. $b < a < c$

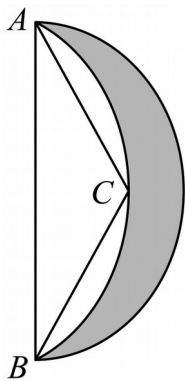
3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x < 1 \\ 3^x-2, & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $m < n$, 且 $f(m) = f(n)$, 则 $mf(n)$ 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{4}{3}, 7\right]$
B. $[-1, 7]$
C. $[-1, 7)$
D. $\left[-\frac{4}{3}, 7\right)$

4. 希波克拉底是古希腊医学家, 他被西方尊为“医学之父”, 除了医学, 他也研究数学. 特别是与“月牙形”有关的问题. 如图所示. 阴影部分的月牙形的边缘都是圆弧, 两段圆

弧分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆和以 AB 为直径的圆的一部分, 若 $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, $AC = BC = 1$, 则

该月牙形的面积为 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}\pi}{4} + \frac{1}{24}$ B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{4} - \frac{1}{24}$ C. $\frac{1\pi}{4} + \frac{1}{24}$ D. $\frac{3\sqrt{3}\pi}{4} - \frac{1}{8}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} = \frac{3c}{\cos C}$, 则

$\tan A + \tan C$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{8}{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4

6. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 点 P 在以 A 为圆心, 1 为半径的圆上, 则

$|PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ 的最小值为 ()

- A. $18 - 8\sqrt{2}$ B. $18 - 8\sqrt{3}$ C. $19 - 8\sqrt{3}$ D. $19 - 8\sqrt{2}$

7. 在棱长为 5 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, Q 是 DD_1 中点, 点 P 在正方体的内切球的

球面上运动, 且 $CP \perp AQ$, 则点 P 的轨迹长度为 ()

- A. $\sqrt{5}\pi$ B. $2\sqrt{5}\pi$ C. $\frac{5\pi}{4}$ D. 5π

8. 若函数 $f(x) = a^x + b^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 和 b 的可能取值为 ()

A. $a = \ln 1.2, b = 5$

B. $a = \ln 15, b = 0.2$

C. $a = e^{0.2}, b = 0.8$

D. $a = e^{1.8}, b = 0.2$

二、多选题

9. 关于函数 $f(x) = \log_3 \frac{x-3}{x+1}$ ，下列结论正确的是（ ）

A. 定义域为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称

D. $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增

10. 下列说法正确的有（ ）

A. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 - z_2 > 0$ ，则 $z_1 > z_2$

B. 若复数 z_1, z_2 满足 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ ，则 $z_1 z_2 = 0$

C. 若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

D. 若复数 z 满足 $z + \frac{1}{z} = -1$ ，则 $z^{2024} + \frac{1}{z^{2024}} = -1$

11. 甲、乙、丙、丁四人玩报数游戏：第一轮，甲报数字 1，乙报数字 2，3，丙报数字 4，5，6，丁报数字 7，8，9，10；第二轮，甲报数字 11，12，13，14，15，依次循环，直到报出数字 10000，游戏结束，则（ ）

A. 甲在第 10 轮报了 33 个数字

B. 数字 2023 是丁报的

C. 甲共报了 37 轮

D. 甲在前四轮所报数字之和为 1540

三、填空题

12. 设 $f(x) = |\log_2 x + ax + b| (a > 0)$, 记函数 $y = f(x)$ 在区间 $[t, t+1] (t > 0)$ 上的最大值为

$M_t(a, b)$, 若对任意 $b \in \mathbf{R}$, 都有 $M_t(a, b) \geq \frac{a}{2} + 1$, 则实数 t 的最大值为_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 2, AB = 2AC$, D 为 BC 的中点, 则 $\tan \angle ADC$ 的最大值为_____.

14. 将一个圆形纸片裁成两个扇形, 再分别卷成甲、乙两个圆锥的侧面, 甲、乙两个圆锥的

侧面积分别为 $S_{\text{甲}}$ 和 $S_{\text{乙}}$, 体积分别为 $V_{\text{甲}}$ 和 $V_{\text{乙}}$. 若 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = 2$, 则 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题

15. 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - ax$, 其中 $a \in \mathbf{R}$

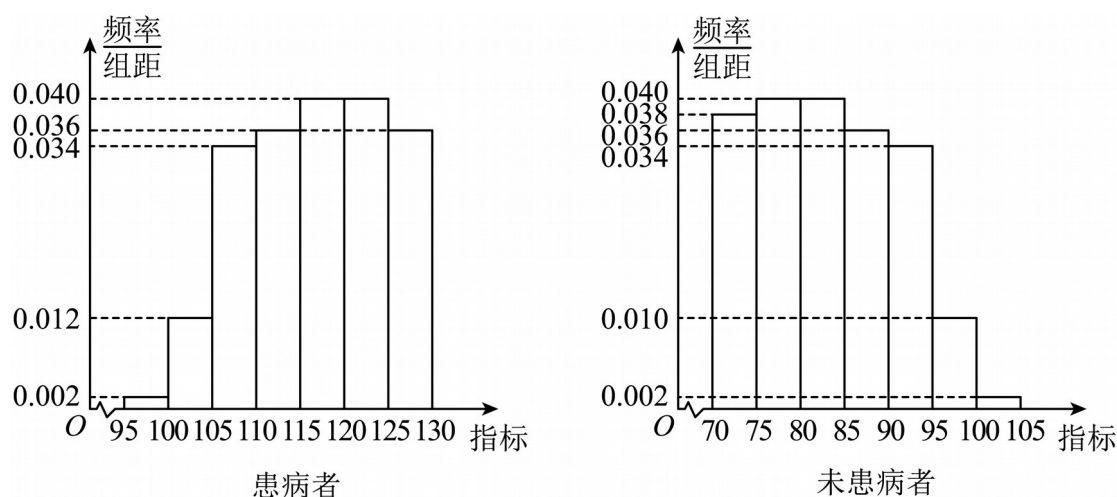
(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 不单调, 求出实数 a 的取值范围.

16. 某研究小组经过研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异,

已知该疾病的患病率为 5%, 经过大量调查, 得到如图的患病者和未患病者该指标的频率

分布直方图:



利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值 c ，将该指标大于 c 的人判定为阳性，小于或等于 c 的人判定为阴性.将患病者判定为阴性或将未患病者判定为阳性均为误诊.假设数据在组内均匀分布，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.

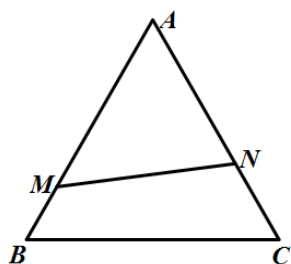
(1)当临界值 $c = 97.5$ 时，已知某人是患病者，求该人被误诊的概率；

(2)当 $c \in [95, 105]$ 时，求利用该指标作为检测标准的误诊率 $f(c)$ 的解析式，并求使

$f(c)$ ($c \in [95, 105]$) 最小的临界值 c .

17. 如图，在公园内有一块边长为 100 米的等边三角形空地（记为 $\triangle ABC$ ），现修成草坪，

图中 MN 把草坪分成面积相等的两部分，点 M 在 AB 上，点 N 在 AC 上.



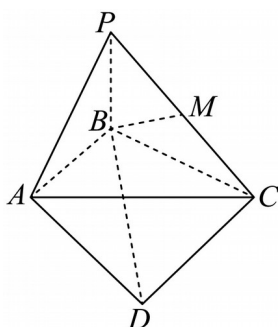
(1) 若 $AM = 75$ 米，求 AN 长；

(2) 如果 MN 是灌溉水管，为了节约成本，希望灌溉水管 MN 最短，请确定点 M, N 的位

置，并求 MN 的最小值.

18. 如图，在多面体 $PABCD$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$, $\triangle DAB, \triangle DBC$ 都是等边三角形，

$AC = 2\sqrt{2}, PB = \sqrt{2}, PB \perp$ 平面 ABC, M 为 PC 的中点.



(1) 证明: $BM \perp AD$;

(2) 求 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值.

19. 已知数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且满足 $b_1 \neq 0, b_n + t = 2\sqrt{T_n}$.

(1) 证明: $t \leq 1$.

(2) 当 $t = 0$ 时，求证: $T_n \geq (n+1)^2$;

(3) 是否存在常数 t ，使得 $\{b_n\}$ 为等比数列？若存在，求出所有满足条件的 t 的值；若不存在，

请说明理由.

参考答案:

1. B

【分析】根据向量数量积分析可知 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ 等价于 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，结合充分、必要条件分析判断.

【详解】因为 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$ ，可得 $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ ，即 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，

可知 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ 等价于 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，

若 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，可得 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，即 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，可知必要性成立；

若 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，即 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，无法得出 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，

例如 $\vec{a} = (1, 0), \vec{b} = (0, 1)$ ，满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，但 $\vec{a} \neq \vec{b}$ 且 $\vec{a} \neq -\vec{b}$ ，可知充分性不成立；

综上所述，“ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ”是“ $\vec{a} \neq \vec{b}$ 且 $\vec{a} \neq -\vec{b}$ ”的必要不充分条件.

故选：B.

2. B

【分析】根据指数函数与对数函数的性质，借助特殊值0，可得 a 最小，再利用 $b^3 > c^3$ 得出 b, c 大小.

【详解】由 $\left(\frac{1}{3}\right)^a = 2$ 可得 $a = \log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$ ，

$b = \log_{\frac{1}{2}} 3 - \log_{\frac{1}{2}} 9 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > 1$ ， $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} > 0$ ，

下面比较 b, c ,

因为 $3^2 > \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 8$, 所以 $3 > 2^{\frac{3}{2}}$,

所以 $b = \log_2 3 > \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$,

而 $c^3 = (\sqrt[3]{2})^3 = 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$, 故 $c < \frac{3}{2}$, 所以 $c < b$,

综上, $b > c > a$.

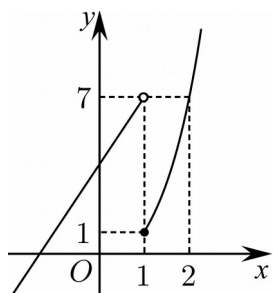
故选: B

3. D

【分析】作出 $f(x)$ 的图象, 得到 $m = \frac{3^n - 6}{3}, n \in [1, 2)$, 问题转化为

$mf(n) = \frac{3^n - 6}{3} \times (3^n - 2), n \in [1, 2)$, 换元后进行求解, 得到答案.

【详解】作出 $f(x)$ 的图象, 如图所示:



由 $3m + 4 = 3^n - 2, n \in [1, 2)$, 可得 $m = \frac{3^n - 6}{3}, n \in [1, 2)$,

则 $mf(n) = \frac{3^n - 6}{3} \times (3^n - 2), n \in [1, 2)$,

令 $t = 3^n, t \in [3, 9)$,

$$\text{则 } mf(n) = \frac{(t-6)(t-2)}{3} = \frac{1}{3}[(t-4)^2 - 4], t \in [3, 9),$$

$$\text{故 } mf(n) \in \left[-\frac{4}{3}, 7\right).$$

故选: D.

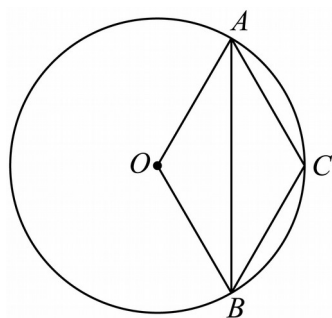
4. A

【分析】求出 $\triangle ABC$ 的外接圆半径, 得弓形面积, 再求得大的半圆面积, 相减可得结论.

【详解】因为 $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, $AC = BC = 1$,

$$\text{所以 } AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \frac{2\pi}{3} = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3, \text{ 所以 } AB = \sqrt{3},$$

设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O , 半径为 R , 如图所示,



$$\text{由正弦定理得 } \frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AB}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 2R, \text{ 所以 } R = 1,$$

内侧圆弧为 $\triangle ABC$ 的外接圆的一部分, 且其对应的圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$,

$$\text{则弓形 } ABC \text{ 的面积为 } S_{\text{扇形} OAB} - S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4},$$

外侧的圆弧以 AB 为直径，所以半圆 AB 的面积为 $\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{8}$ ，

则月牙形的面积为 $\frac{3\pi \times 3}{8} - \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{24}$ 。

故选：A.

5. B

【分析】由正弦定理得 $\tan A + \tan B = 3 \tan C$ ，再通过两角和的正切公式得 $\tan A \tan B = 4$ ，

最后使用基本不等式求解即可.

【详解】因为 $\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} = \frac{3c}{\cos C}$ ，

由正弦定理得 $\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{3 \sin C}{\cos C}$ ，

所以 $\tan A + \tan B = 3 \tan C$ ，

又因为 $C = \pi - (A + B)$ ，

所以 $\tan A + \tan B = -3 \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ ，

所以 $1 = \frac{3}{\tan A \tan B - 1}$ ，

即 $\tan A \tan B = 4$ 。

所以 $\tan B = \frac{4}{\tan A}$ ， $\tan C = \frac{1}{3}(\tan A + \tan B) = \frac{1}{3}\left(\tan A + \frac{4}{\tan A}\right)$ ，

显然 $\tan A$ 必为正（否则 $\tan A$ 和 $\tan C$ 都为负，就两个钝角），

$$\text{所以 } \tan A + \tan C = \frac{4}{3} \tan A + \frac{4}{3 \tan A} \geq 2\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{8}{3},$$

当且仅当 $\frac{4}{3} \tan A = \frac{4}{3 \tan A}$, 即 $\tan A = 1, A = \frac{\pi}{4}$ 取等号.

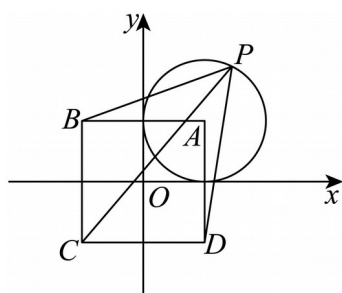
$$\text{所以 } \tan A + \tan C \geq \frac{8}{3}.$$

故选: B.

6. D

【分析】不妨设 $A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1), D(1,-1)$, $P(1+\cos\theta, 1+\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi)$, 根据两点间距离公式结合正弦函数的最值分析求解.

【详解】不妨设 $A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1), D(1,-1)$,



因为 $|AP| = 1$, 设 $P(1+\cos\theta, 1+\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi)$,

$$\text{则 } |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = (2+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta + (2+\cos\theta)^2 + (2+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta + (2+\sin\theta)^2$$

$$= 8\sin\theta + 8\cos\theta + 19 = 8\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 19,$$

因为 $\theta \in [0, 2\pi)$, 则 $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right)$,

可知当 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{5\pi}{4}$ 时, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 取得最小值 -1 ,

所以 $|PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ 的最小值为 $19 - 8\sqrt{2}$.

故选: D.

【点睛】结论点睛: 以 (a, b) 为圆心, 半径为 r 的圆上的任一点 P 可设为

$$(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$$

7. B

【分析】建立空间直角坐标系, 作出辅助线, 得到 $AQ \perp$ 平面 $CDRH$, 由点到平面的距离

和球的半径得到点 P 的轨迹为以 $\sqrt{5}$ 为半径的圆, 从而求出点 P 的轨迹长度.

【详解】以点 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

$$\text{则 } Q\left(0, 0, \frac{5}{2}\right), A(5, 0, 0), C(0, 5, 0),$$

$$\text{球心 } O\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \text{ 取 } A_1D_1 \text{ 的中点 } R, B_1C_1 \text{ 的中点 } H, \text{ 连接 } DR, RH, HC,$$

$$\text{则 } R\left(\frac{5}{2}, 0, 5\right), \overrightarrow{DR} \cdot \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{5}{2}, 0, 5\right) \cdot \left(-5, 0, \frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{2} + \frac{25}{2} = 0,$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AQ} = (0, 5, 0) \cdot \left(-5, 0, \frac{5}{2}\right) = 0,$$

故 $DR \perp AQ$, $CD \perp AQ$,

又 $DR \cap CD = D$, $DR, CD \subset$ 平面 $CDRH$,

故 $AQ \perp$ 平面 $CDRH$,

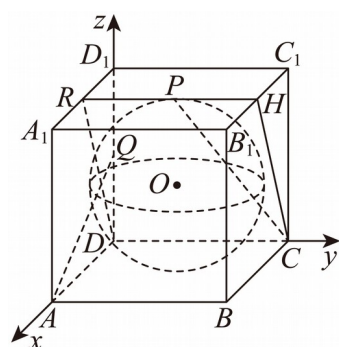
故当 P 位于平面 $CDRH$ 与内切球 O 的交线上时, 满足 $CP \perp AQ$,

此时 $O\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 到平面 $CDRH$ 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{AQ}|} = \frac{\left| \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \cdot \left(-5, 0, \frac{5}{2}\right) \right|}{\sqrt{25 + \frac{25}{4}}} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{5\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$r = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{5}{4}} = \sqrt{5}$, 其中 r 为平面 $CDRH$ 截正方体内切球所得截面圆的半径,

故点 P 的轨迹为以 $\sqrt{5}$ 为半径的圆,



故点 P 的轨迹长度为 $2\sqrt{5}\pi$.

故选: B

8. D

【分析】二次求导得到 $f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 要想 $f(x) = a^x + b^x$ 在

$(0, +\infty)$ 上单调递增, 只需 $ab \geq 1$, 再逐项检验.

【详解】 $f(x) = a^x + b^x$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $b > 0$ 且 $b \neq 1$,

$f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b$, 令 $g(x) = f'(x)$,

则 $g'(x) = a^x (\ln a)^2 + b^x (\ln b)^2 > 0$ 恒成立,

故 $f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

要想 $f(x) = a^x + b^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

只需 $f'(0) = \ln a + \ln b \geq 0$, 即只需 $ab \geq 1$,

对 A, 令 $h(x) = x - 1 - \ln x$, $x > 1$,

则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

故 $h(x) = x - 1 - \ln x$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $h(1.2) > h(1) = 0$, 即 $0.2 > \ln 1.2$, 则 $ab = 5 \ln 1.2 < 5 \times 0.2 = 1$, A 错误;

对 B, $ab = 0.2 \ln 15 = \frac{\ln 15}{5} < \frac{\ln 16}{5} < \frac{\ln 16}{4} = \ln 2 < 1$, B 错误;

对 C, 令 $q(x) = (1-x)e^x$, $x \in (0, 1)$,

则 $q'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x < 0$ 恒成立,

故 $q(x) = (1-x)e^x$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

故 $q(0.2) < q(0) = 1$, 即 $ab = 0.8e^{0.2} < 1$, C 错误;

对 D, 令 $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$, $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $x \in (e, +\infty)$, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减,

故 $\varphi(4) > \varphi(5)$, 即 $\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4} > \frac{\ln 5}{5}$,

因为 $\frac{1.8}{5} = 0.36 > \frac{\ln 2}{2} \therefore \frac{1.8}{5} > \frac{\ln 5}{5}$, $\therefore e^{1.8} > 5 \therefore 0.2e^{1.8} > 1$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/696120113225010213>