考点测试　离散型随机变量的分布列及数字特征

高考概览	高考在本考点的常考题型为解答题，分值为12分，近两年难度有所增大
考点研读	1.理解取有限个值的离散型随机变量及其分布列的概念，了解分布列对于刻画随机现象的重要性 2．理解取有限个值的离散型随机变量的均值、方差的概念 3．能计算简单离散型随机变量的均值、方差，并能解决一些实际问题

目录

狂刷小题・基础练

KUANG SHUA XIAO TI　JI CHU LIAN

一、基础小题

1．已知随机变量 X 的概率分布为 $P(X=n)=\dfrac{\lambda}{n(n+1)}(n=1,2,3)$，其中 λ 是常数，则 $P(1\leqslant X<3)$的值为(　　)

A．$\dfrac{8}{9}$

B．$\dfrac{2}{3}$

C．$\dfrac{1}{3}$

D．$\dfrac{2}{9}$

解析　因为 $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$，即 $\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{\lambda}{6}+\dfrac{\lambda}{12}=1$，解得 $\lambda=\dfrac{4}{3}$，所以 $P(1\leqslant X<3)=P(X=1)+P(X=2)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{8}{9}$.故选 A.

2．已知随机变量 X 的分布列如下表所示，若 $E(X)=\frac{1}{3}$，则 $D(X)=$（　　）

X	-2	0	1
P	a	$\frac{1}{3}$	b

A.$\frac{49}{81}$

B.$\frac{8}{9}$

C.$\frac{23}{27}$

D.$\frac{23}{81}$

答案

解析 因为 $E(X)=\frac{1}{3}$，且各概率之和为 1，所以 $\begin{cases}-2a+0\times\frac{1}{3}+b=\frac{1}{3},\\ a+\frac{1}{3}+b=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{9},\\ b=\frac{5}{9},\end{cases}$ 所以 $D(X)=\frac{1}{9}\times\left(-2-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times\left(0-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$. 故选 B.

3．现在有 10 张奖券，8 张 2 元的，2 张 5 元的，某人从中随机无放回地抽取 3 张奖券，则此人得奖金额的数学期望为(　　)

A．6

B．$\frac{39}{5}$

C．$\frac{41}{5}$

D．9

解析　记此人得奖金额为随机变量 X，则 X 的可能取值为 6，9，12，且 $P(X=6)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$，$P(X=9)=\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$，$P(X=12)=\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$，则 $E(X)=6\times\frac{7}{15}+9\times\frac{7}{15}+12\times\frac{1}{15}=\frac{39}{5}$.故选 B.

4．一个袋子中共有 8 个大小相同的球，其中 3 个红球，5 个白球，从中随机摸出 2 个球，则取到红球的个数 X 的期望为(　　)

A．$\frac{3}{4}$　　　B．$\frac{4}{5}$

C．$\frac{5}{4}$　　　D．$\frac{4}{3}$

解析　由题意知，取到红球的个数 X 的可能取值为 0，1，2，$P(X=0)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$，$E(X)=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$.故选 A.

5．已知盒中装有 1 个黑球与 2 个白球，每次从盒子中随机摸出 1 个球，并换入 1 个黑球．设三次摸球后盒子中所剩黑球的个数为 X，则 $E(X)=$(　　)

A．$\dfrac{40}{27}$　　　　B．2

C．$\dfrac{55}{27}$　　　　D．$\dfrac{65}{27}$

解析　由题意知，X的可能取值为1，2，3，$P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$，$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}+\frac{4}{27}+\frac{2}{27}=\frac{14}{27}$，$P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{27}$，$E(X)=\frac{1}{27}\times1+\frac{14}{27}\times2+\frac{12}{27}\times3=\frac{1+28+36}{27}=\frac{65}{27}$.故选D.

6. (多选)若随机变量 X 服从两点分布，其中 $P(X=0)=\frac{1}{3}$，$E(X)$，$D(X)$ 分别为随机变量 X 的均值与方差，则下列结论正确的是(　　)

A. $P(X=1)=E(X)$

B. $E(3X+2)=4$

C. $D(3X+2)=4$

D. $D(X)=\frac{4}{9}$

解析　∵随机变量 X 服从两点分布，其中 $P(X=0)=\frac{1}{3}$，∴$P(X=1)=\frac{2}{3}$，$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$，$D(X)=\left(0-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.对于 A，$P(X=1)=E(X)$，故 A 正确；对于 B，$E(3X+2)=3E(X)+2=3\times\frac{2}{3}+2=4$，故 B 正确；对于 C，$D(3X+2)=9D(X)=9\times\frac{2}{9}=2$，故 C 错误；对于 D，$D(X)=\frac{2}{9}$，故 D 错误．故选 AB.

7．设 X 是一个离散型随机变量，其分布列为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$1-2q$	q^2

则 $q=$ $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解析　依题意知，$\frac{1}{2}+1-2q+q^2=1$，即 $q^2-2q+\frac{1}{2}=0$，解得 $q=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$(舍去)或 $q=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. 体育课的排球发球项目考试的规则是：每位学生最多可发球 3 次，一旦发球成功，则停止发球，否则一直发到 3 次为止．设学生一次发球成功的概率为 $p(p\neq 0)$，发球次数为 X，若 X 的数学期望 $E(X)>1.75$，则 p 的取值范围是 $\underline{\left(0,\ \frac{1}{2}\right)}$．

解析　由已知条件可得 $P(X=1)=p$，$P(X=2)=(1-p)p$，$P(X=3)=(1-p)^2p+(1-p)^3=(1-p)^2$，则 $E(X)=P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)=p+2(1-p)p+3(1-p)^2=p^2-3p+3>1.75$，解得 $p>\frac{5}{2}$ 或 $p<\frac{1}{2}$，又由 $p\in(0,1)$，可得 $p\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$.

二、高考小题

9．(2022·浙江高考)现有 7 张卡片，分别写上数字 1，2，2，3，4，5，6.从这 7 张卡片中随机抽取 3 张，记所抽取卡片上数字的最小值为 X，则 $P(X=2)=$ $\underline{\quad\dfrac{16}{35}\quad}$，$E(X)=$ $\underline{\quad\dfrac{12}{7}\quad}$.

解析　从写有数字 1，2，2，3，4，5，6 的 7 张卡片中随机抽取 3 张，共有 C_7^3种取法，其中所抽取的卡片上数字的最小值为 2 的取法有 $C_4^1+C_2^1C_4^2$种，所以 $P(X=2)=\dfrac{C_4^1+C_2^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{16}{35}$，由已知可得 X 的可能取值为 1，2，3，4，$P(X=1)=\dfrac{C_6^2}{C_7^3}=\dfrac{15}{35}$，$P(X=2)=\dfrac{16}{35}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^2}{C_7^3}=\dfrac{3}{35}$，$P(X=4)=\dfrac{1}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$，所以 $E(X)=1\times\dfrac{15}{35}+2\times\dfrac{16}{35}+3\times\dfrac{3}{35}+4\times\dfrac{1}{35}=\dfrac{12}{7}$.

10．(2021·浙江高考)袋中有 4 个红球，m 个黄球，n 个绿球．现从中任取两个球，记取出的红球数为 X，若取出的两个球都是红球的概率为$\frac{1}{6}$，一红一黄的概率为$\frac{1}{3}$，则 $m-n=$____1____，$E(X)=$____$\frac{8}{9}$____．

解析　由题意可得，$P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_{4+m+n}^2}=\frac{12}{(4+m+n)(3+m+n)}=\frac{1}{6}$，化简，得$(m+n)^2+7(m+n)-60=0$，解得 $m+n=5$(负值舍去)，取出的两个球一红一黄的概率 $P=\frac{C_4^1C_m^1}{C_9^2}=\frac{4m}{36}=\frac{1}{3}$，解得 $m=3$，故 $n=2$.所以 $m-n=1$，易知 X 的所有可能取值为 0，1，2，且 $P(X=2)=\frac{1}{6}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\frac{5}{9}$，$P(X=0)=\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{5}{18}$，所以 $E(X)=0\times\frac{5}{18}+1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{1}{6}=\frac{8}{9}$.

三、模拟小题

11．(2024·湖北襄阳第四中学高三上开学考试)设随机变量 X 的分布列如表，则 $P(|X-1|\leqslant 1)=($　　$)$

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	m	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

A.$\frac{1}{4}$　　　　B.$\frac{1}{3}$

C.$\frac{2}{3}$　　　　D.$\frac{5}{6}$

解析　由分布列的性质可得$\frac{1}{3}+m+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=1$，则 $m=\frac{1}{4}$，$P(|X-1|\leqslant 1)=P(0\leqslant X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.故选 C.