

高中常用二级结论 + 例题讲义

目录

结论一	奇函数的性质	2
结论二	函数周期性问题	2
结论三	函数的对称性	4
结论四	反函数的性质	5
结论五	两个经典不等式	6
结论六	三点共线的充要条件	6
结论七	三角形“四心”向量形式的充要条件	8
结论八	等差数列	9
结论九	等比数列	11
结论十	多面体的外接球和内切球	12
结论十一	焦点三角形的面积公式	14
结论十二	圆锥曲线的切线问题	15
结论十三	圆锥曲线的中点弦问题	17
结论十四	圆锥曲线中的一类定值问题	18
结论十五	圆锥曲线中的一类定点问题	20
结论十六	抛物线中的三类直线与圆相切问题	22

结论一 奇函数的性质

已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 D 上的奇函数, 则对任意的 $x \in D$, 都有 $f(x) + f(-x) = 0$. 特别地, 若奇函数 $f(x)$ 在 D 上有最值, 则 $f(x)_{\max} + f(x)_{\min} = 0$, 且若 $0 \in D$, 则 $f(0) = 0$.

例1. (2023·全国·高三对口高考) 函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上的奇函数, $F(x) = f(x) + 1$, 则 $F(x)$ 的最大值与最小值之和为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】C

【详解】因为 $f(x)$ 与 $F(x)$ 的单调性相同, 且 $f(x)$ 为奇函数,

设 $f(x)$ 在 $x_0 \in [-a, a]$ 处取到最大值, 则 $f(x)$ 在 $-x_0 \in [-a, a]$ 处取到最小值,

可得 $f(x_0) + f(-x_0) = 0$, 且 $F(x)$ 在 x_0 处取到最大值, 在 $-x_0$ 处取到最小值,

所以 $F(x_0) + F(-x_0) = [f(x_0) + 1] + [f(-x_0) + 1] = [f(x_0) + f(-x_0)] + 2 = 2$.

故选: C.

【变式训练】

1. 已知函数 $f(x) = ax^5 + bx^3 + 3$ 且 $f(2023) = 16$, 则 $f(-2023)$ 的值为 _____

【答案】-10

【详解】因为 $f(x) = ax^5 + bx^3 + 3$, 所以 $f(2023) = a \times 2023^5 + b \times 2023^3 + 3 = 16$,

所以 $a \times 2023^5 + b \times 2023^3 = 13$,

所以 $f(-2023) = a \times (-2023)^5 + b \times (-2023)^3 + 3$

$$= -(a \times 2023^5 + b \times 2023^3) + 3 = -13 + 3 = -10,$$

故答案为: -10.

2. 若关于 x 的函数 $f(x) = \frac{2021x^3 + ax^2 + x + a^2}{x^2 + a}$ 的最大值为 M , 最小值为 N , 且 $M + N = 4$, 则实数 a 的值为 ()

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 1

【解题思路】根据函数奇偶性求解即可.

【解答过程】解: $f(x) = \frac{2021x^3 + ax^2 + x + a^2}{x^2 + a} = a + \frac{2021x^3 + x}{x^2 + a}$,

$$\text{令 } g(x) = f(x) - a = \frac{2021x^3 + x}{x^2 + a},$$

$$g(-x) = \frac{2021(-x)^3 - x}{x^2 + a} = -g(x),$$

$\therefore g(x)$ 为奇函数,

$$\therefore g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 0,$$

$$\therefore M + N = g(x)_{\max} + a + g(x)_{\min} + a = 4,$$

$$\therefore a = 2.$$

故选: C.

结论二 函数周期性问题

函数周期性的常用结论与技巧

设函数 $y=f(x)$, $x \in R$, $a > 0$.

①若 $f(x+a)=f(x-a)$, 则函数的周期 $T=2a$;

②若 $f(x+a)=-f(x)$, 则函数的周期 $T=2a$;

③若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$, 则函数的周期 $T=2a$;

④若 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$, 则函数的周期 $T=2a$;

⑤若 $f(x+a)=f(x+b)$, 则函数的周期 $T=|a-b|$.

例1. 已知函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{x} + 4$ 在 $[-8, 8]$ 上的最大值和最小值分别为 M 、 m , 则 $M+m =$ ()

A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

【答案】A

【分析】设 $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{x}$, $x \in (-8, 8)$, 证明函数 $g(x)$ 为奇函数, 则有 $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 0$, 从而可得出答案.

【详解】解: 设 $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{x}$, $x \in (-8, 8)$,

因为 $g(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{x} = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x}\right) = -g(x)$,

所以函数 $g(x)$ 为奇函数,

所以 $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 0$,

所以 $f(x)_{\max} + f(x)_{\min} = [g(x)_{\max} + 4] + [g(x)_{\min} + 4] = 8$,

所以 $M+m=8$.

故选: A.

【变式训练】

1. 已知函数 $y=f(x+1)$ 是定义在 R 上的偶函数, 且 $f(x+3)+f(1-x)=2$, 则 ()

A. $f(1) = 0$ B. $f(2) = 0$ C. $f(3) = 1$ D. $f(4) = 1$

【答案】D

【详解】解: 因为函数 $y=f(x+1)$ 是定义在 R 上的偶函数,

所以 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 则 $f(1-x)=f(x+1)$,

又 $f(x+3)+f(1-x)=2$,

所以 $f(x+3)+f(x+1)=2$, 即 $f(x+2)=-f(x)+2$, $f(x+4)=-f(x+2)+2=f(x)$,

函数 $f(x)$ 的周期为 4,

取 $x = 0$, 则 $f(2) + f(0) = 2f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = f(0) = 1$,

所以 $f(4) = f(0) = 1$, 则 D 选项正确, B 、 C 选项错误;

由已知条件不能确定 $f(1)$ 的值, A 选项错误;

故选: D .

2. 若定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = -f(x)$, 且当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = x - 1$, 则 $f(\frac{7}{2})$ 的值等于

()

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

【解题思路】根据题意, 先分析函数的周期性, 结合函数的解析式分析可得答案.

【解答过程】解: 根据题意, 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = -f(x)$, 则有 $f(2-x) = -f(-x)$, 变形可得 $f(x+2) = -f(x)$,

则有 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,

$$\text{则 } f(\frac{7}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = -f(\frac{3}{2}),$$

$$\text{当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时, } f(x) = x - 1, f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } f(\frac{7}{2}) = -\frac{1}{2}, \text{ 故选: } D.$$

结论三 函数的对称性

1. 点对称

设函数 $f(x)$ 的定义域为 I , 且 $(a, 0)$ 是 $f(x)$ 的对称中心, 则有:

$$\textcircled{1} f(a+x) = -f(a-x);$$

$$\textcircled{2} f(x) = -f(2a-x)$$

$$\textcircled{3} f(-x) = -f(2a+x)$$

2. 拓展:

$$\textcircled{1} \text{ 若 } f(a+x) = f(b-x), \text{ 则 } f(x) \text{ 关于 } x = \frac{b+a}{2} \text{ 对称};$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } f(a+x) = -f(b-x), \text{ 则 } f(x) \text{ 关于 } (\frac{b+a}{2}, 0) \text{ 对称};$$

例1. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 且 $f(x+1)$ 为奇函数, 当 $x < 1$ 时, $f(x) = -x^2 - 4x$,

则 $f(x) = \frac{3}{2}$ 的所有根之和等于 ()

A. 4

B. 2

C. -12

D. -6

【答案】A

【分析】根据二次函数对称性求和即可.

【详解】解: 当 $x < 1$ 时, $f(x) = -(x^2 + 4x) = -(x+2)^2 + 4$,

∴ 对称轴为 $x = -2$,

∵ $f(x+1)$ 为奇函数,

∴ $f(x+1) = -f(-x+1)$,

∴ $f(x) = -f(2-x)$,

∴ $f(x)$ 关于 $(1,0)$ 中心对称,

设 (x, y) 为 $y = f(x) (x > 1)$ 图像上任意一点,

则 $(2-x, -y)$ 在 $f(x) = -x^2 - 4x$ 上,

∴ $-y = -(4-x)^2 + 4$,

即 $y = (x-4)^2 - 4$,

对称轴为 $x = 4$.

作出图像如下:

由图像知 $f(x) = \frac{3}{2}$ 有 4 个根,

不妨设 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$,

由二次函数的对称性知

$x_1 + x_2 = 2 \times (-2) = -4$,

$x_3 + x_4 = 2 \times 4 = 8$,

∴ $f(x) = \frac{3}{2}$ 所有根的和为 $8 - 4 = 4$.

故选: A.

【变式训练】

1. 定义在 R 上的偶函数 $y = f(x)$, 其图像关于点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 对称, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = -x + \frac{1}{2}$, 则 $f(\pi) =$ ()

A. $\frac{9}{2} - \pi$

B. $\frac{7}{2} - \pi$

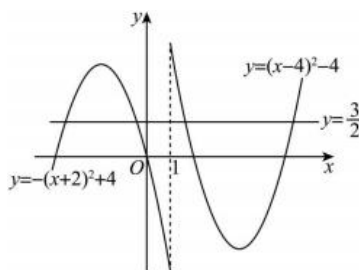
C. $\pi - \frac{3}{2}$

D. $\pi - \frac{7}{2}$

【答案】D

【解析】

因为 $y = f(x)$ 图像关于点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 对称, 所以 $f(\frac{1}{2} + x) + f(\frac{1}{2} - x) = 0$, 所以 $f(1+x) + f(-x) = 0$, 又 $y = f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x+2) = -f(1+x) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 最小正周期为 2, 所以 $f(\pi) = f(\pi-4) = f(4-\pi) = \pi-4 + \frac{1}{2} = \pi - \frac{7}{2}$.



结论四 反函数的性质

若函数 $y = f(x)$ 是定义在非空数集 D 上的单调函数, 则存在反函数 $y = f^{-1}(x)$. 特别地, $y = ax$ 与 $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 互为反函数, 两函数图象在同一直角坐标系内关于直线 $y = x$ 对称, 即 $(x_0, f(x_0))$ 与 $(f(x_0), x_0)$ 分别在函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象上.

例1. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax$ ($\frac{1}{e} \leq x \leq e$, e 为自然对数的底数) 与 $g(x) = e^x$ 的图象上存在关于直线 $y = x$ 对称的点, 则实数 a 取值范围是

- A. $[1, e + \frac{1}{e}]$ B. $[1, e - \frac{1}{e}]$ C. $[e - \frac{1}{e}, e + \frac{1}{e}]$ D. $[e - \frac{1}{e}, e]$

【答案】A

【解析】因为函数 $f(x) = x^2 - ax$ 与 $g(x) = e^x$ (e 为自然对数的底数) 的图象上存在关于直线 $y = x$ 对称的点, 所以函数 $f(x) = x^2 - ax$ 与 $h(x) = \ln x$ 的图像有公共点, 则 $x^2 - ax = \ln x$ 有解, 即 $a = x - \frac{\ln x}{x}$ 有解, 令 $F(x) = x - \frac{\ln x}{x}$, 则 $F'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2} < 0$ 在 $[\frac{1}{e}, 1)$ 成立, $F'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2} > 0$ 在 $(1, e]$ 上成立, 即 $F(x) = x - \frac{\ln x}{x}$ 在 $[\frac{1}{e}, 1)$ 单调递减, 在 $(1, e]$ 上单调递增, 且 $F(e) = e - \frac{1}{e}$, $F(\frac{1}{e}) = e + \frac{1}{e}$, $F(1) = 1$, 所以 $1 \leq a \leq e + \frac{1}{e}$; 故选A.

结论五 两个经典不等式

(1) 对数形式: $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$ ($x > -1$), 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立.

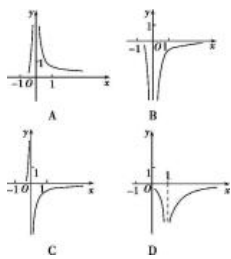
(2) 指数形式: $e^x \geq x + 1$ ($x \in \mathbb{R}$), 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立.

例1. 设函数 $f(x) = 1 - e^{-x}$. 证明: 当 $x > -1$ 时, $f(x) \geq \frac{x}{x+1}$.

证明 $x > -1$ 时, $f(x) \geq \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow x > -1, 1 - e^{-x} \geq \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{x+1} \geq e^{-x} (x > -1) \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{e^x} (x > -1) \Leftrightarrow x + 1 \leq e^x (x > -1)$. 当 $x > -1$ 时, $e^x \geq x + 1$ 恒成立, 所以当 $x > -1$ 时, $f(x) \geq \frac{x}{x+1}$.

【变式训练】

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1) - x}$, 则 $y = f(x)$ 的图象大致为 ()



【答案】B

【解析】因为 $f(x)$ 的定义域为 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ \ln(x+1) - x \neq 0 \end{cases}$ 即 $\{x | x > -1 \text{ 且 } x \neq 0\}$, 所以排除选项D.

令 $g(x) = \ln(x+1)x$, 则由经典不等式 $\ln(x+1) \leq x$ 知, $g(x) \leq 0$ 恒成立, 故 $f(x) = \frac{1}{g(x)} < 0$ 恒成立, 所以排

除 A, C , 故选 B .

结论六 三点共线的充要条件

设平面上三点 O, A, B 不共线, 则平面上任意一点 P 与 A, B 共线的充要条件是存在实数 λ 与 μ , 使得 $\vec{OP} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}$, 且 $\lambda + \mu = 1$. 特别地, 当 P 为线段 AB 的中点时, $\vec{OP} = \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB}$.

例2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AN} = \frac{1}{2} \vec{AC}$, P 是 BN 上的一点, 若 $\vec{AP} = m \vec{AB} + \frac{3}{8} \vec{AC}$, 则实数 m 的值为 _____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】 方法一 $\because B, P, N$ 三点共线,

$\therefore \vec{BP} \parallel \vec{PN}$, $\therefore$ 存在实数 λ , 使得 $\vec{BP} = \lambda \vec{PN} (\lambda > 0)$

$\therefore \vec{AP} - \vec{AB} = \lambda (\vec{AN} - \vec{AP})$,

$\because \lambda > 0, \therefore \vec{AP} = \frac{1}{1+\lambda} \vec{AB} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{AN}$.

$\because \vec{AN} = \frac{1}{2} \vec{AC}, \vec{AP} = m \vec{AB} + \frac{3}{8} \vec{AC}$,

$\therefore \vec{AP} = m \vec{AB} + \frac{3}{4} \vec{AN}$,

$\therefore \begin{cases} \frac{1}{1+\lambda} = m, \\ \frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{3}{4}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \lambda = 3, \\ m = \frac{1}{4}. \end{cases}$

方法二 $\because \vec{AN} = \frac{1}{2} \vec{AC}, \vec{AP} = m \vec{AB} + \frac{3}{8} \vec{AC}$,

$\therefore \vec{AP} = m \vec{AB} + \frac{3}{4} \vec{AN}$.

$\because B, P, N$ 三点共线, $\therefore m + \frac{3}{4} = 1, \therefore m = \frac{1}{4}$.

【变式训练】

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 过中线 AD 的中点 E 任作一直线分别交 AB, AC 于 M, N 两点, 设 $\vec{AM} = x \vec{AB}$, $\vec{AN} = y \vec{AC} (xy \neq 0)$, 则 $4x + y$ 的最小值是 _____.

【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】 由 D 为 BC 的中点知, $\vec{AD} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$

又 $\vec{AM} = x \vec{AB}, \vec{AN} = y \vec{AC} (xy \neq 0)$, E 为 AD 的中点,

故 $\vec{AE} = \frac{1}{2} \vec{AD} = \frac{1}{4x} \vec{AM} + \frac{1}{4y} \vec{AN}$,

$\because M, E, N$ 三点共线, $\therefore \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} = 1$,

$\therefore 4x + y = (4x + y) \left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} \right) = \frac{y}{4x} + \frac{x}{y} + \frac{5}{4}$



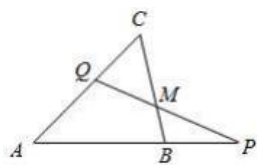
Commented [1]: 公众号: 慧博高中数学最新试题

$$\geq 2\sqrt{\frac{y}{4x} \cdot \frac{x}{y}} + \frac{5}{4} = \frac{9}{4},$$

当且仅当 $\frac{y}{4x} = \frac{x}{y}$, 即 $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{3}{4}$ 时取等号.

$\therefore 4x + y$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$.

2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{CM} = 2\vec{MB}$, 过点 M 的直线分别交射线 AB 、 AC 于不同的两点 P 、 Q , 若 $\vec{AP} = m\vec{AB}$, $\vec{AQ} = n\vec{AC}$, 则 $mn + m$ 的最小值为 ()



- A. 2 B. $2\sqrt{3}$ C. 6 D. $6\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

由已知, 可得 $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB})$

$$\vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{2}{3m}\vec{AP} + \frac{1}{3n}\vec{AQ},$$

因为 P, M, Q 三点共线, 所以 $\frac{2}{3m} + \frac{1}{3n} = 1$,

$$\text{所以 } mn + m = \frac{2n+m}{3} + m = \frac{2n}{3} + \frac{4m}{3} = \left(\frac{2n}{3} + \frac{4m}{3}\right) \left(\frac{2}{3m} + \frac{1}{3n}\right)$$

$$= \frac{10}{9} + \frac{4n}{9m} + \frac{4m}{9n} \geq \frac{10}{9} + 2\sqrt{\frac{4n}{9m} \times \frac{4m}{9n}}$$

$$= 2,$$

故选: A.

结论七 三角形“四心”向量形式的充要条件

设 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 则

$$(1) O \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的外心} \Leftrightarrow |\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = \frac{a}{2\sin A}.$$

$$(2) O \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的重心} \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}.$$

$$(3) O \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的垂心} \Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA}.$$

$$(4) O \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的内心} \Leftrightarrow a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC} = \vec{0}.$$

例1. (多选题) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形, 该三角形重心为点 G , 点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内任一点, 下列等式一定成立的是 ()

A. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2$

B. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/697056111140010052>