专题 7　三角恒等变换与解三角形

考情解读

和差角公式、二倍角公式是高考的热点，常与三角函数式的求值、化简交汇命题．既有选择题、填空题，又有解答题，难度适中，主要考查公式的灵活运用及三角恒等变换能力.

重点知识梳理

1．和差角公式

(1)$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$;

(2)$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$;

(3)$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

2．倍角公式

(1)$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;

(2)$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$;

(3)$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

3．半角公式

(1)$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$;

(2)$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$;

(3)$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$;

(4)$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

4．正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$($2R$ 为ΔABC 外接圆的直径).

5．余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

6．面积公式

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$

7．解三角形

(1)已知两角及一边，利用正弦定理求解；

(2)已知两边及一边的对角，利用正弦定理或余弦定理求解，解的情况可能不唯一，需讨论；

(3)已知两边及其夹角，利用余弦定理求解；

(4)已知三边，利用余弦定理求解.

8．“变”是解决三角问题的主题，变角、变名、变表达形式、变换次数等比比皆是，强化变换意识，抓住万变不离其宗——即公式不变，方法不变，要通过分析、归类把握其规律.

高频者点突破

高频考点一　三角函数概念，同角关系及诱导公式

例 1、（2018 年浙江卷）在ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．若 $a=$万，$b=2$，$A=60°$， 则 $\sin B=$_____，$c=$_____.

【变式探究】【2017 北京，理 12】在平面直角坐标系xOy 中，角α与角β均以 Ox 为始边，它们的终边关于y 轴对称.若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$， $\cos(\alpha-\beta)=$_____.

【变式探究】 (1)已知θ是第四象限角，且 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$_____.

(2)若 $\tan\alpha>0$，则(　　)

A．$\sin\alpha>0$　　B．$\cos\alpha>0$

C．$\sin 2\alpha>0$　D．$\cos 2\alpha>0$

高频考点二　三角函数的求值与化简

例 2、(1)$\sin 20°\cos 10°-\cos 160°\sin 10°=$(　　)

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C．$-\frac{1}{2}$　D.$\frac{1}{2}$

(2)设$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，$\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，且 $\tan\alpha = \frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则(　　)

A．$3\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　B．$3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

C．$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　D．$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

高频考点三　解三角形

例 3、【2019 年高考浙江卷】在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=4$，$BC=3$，点 D 在线段 AC 上，若 $\angle BDC=45^\circ$，则 $BD=$_____，$\cos\angle ABD=$_____.

【举一反三】（2018 年全国Ⅱ卷理数）在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，BC=1，AC=5，则AB=

A. $4\sqrt{2}$　B. $\sqrt{30}$　C. $\sqrt{29}$　D. 25

【变式探究】在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=\sqrt{13}$，$BC=3$，$\angle C=120^\circ$，则 $AC=$(　　)

A．1　B．2　C．3　D．4

【变式探究】在 $\triangle ABC$ 中，$B=\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$，则 $\cos A=$(　　)

A.$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　B.$\frac{\sqrt{10}}{10}$　C．$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　D．$-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

高频考点四 正、余弦定理的应用

例 4、【2019 年高考全国Ⅰ卷】 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，设

$(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

（1）求 A；

（2）若 $\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$.

【举一反三】（2018 年天津卷）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 已知 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$.

（I）求角 B 的大小；

（II）设 $a=2$，$c=3$，求 b 和 $\sin(2A-B)$ 的值

【变式探究】【2017 课标 II，理 17】 ΔABC 的内角 A、B、C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$,

（1）求 $\cos B$；

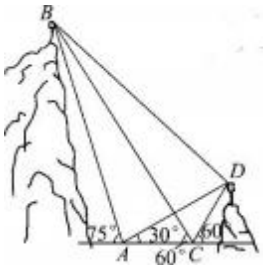
（2）若 $a+c=6$，ΔABC 的面积为 2，求 b。

【变式探究】（1）在 $\triangle ABC$ 中，$B=120^\circ$，$AB=\sqrt{2}$，A 的角平分线 $AD=\sqrt{3}$，则 $AC=$_____.

（2）在ΔABC 中，$\angle A=\frac{3\pi}{4}$，$AB=6$，$AC=3\sqrt{2}$，点 D 在 BC 边上，$AD=BD$，求 AD 的长.

【举一反三】如图，A，B，C，D 都在同一个与水平面垂直的平面内，B，D 为两岛上的两座灯塔的塔

顶．测量船于水面 A 处测得 B 点和 D 点仰角分别为 75°，30°，于水面 C 处测得 B 点和 D 点的仰角均为 60°，$AC=0.1$ km.试探究图中B，D 间距离与另外哪两点间距离相等，然后求B，D 的距离(计算结果精确到 0.01 km，$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{6}\approx2.449$)．



真题感悟

1．【2019 年高考全国Ⅱ卷】$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c .若$b=6,a=2c,B=\frac{\pi}{3}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

2．【2019 年高考江苏卷】已知$\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{2}{3}$，则$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值是__▲__.

3．【2019 年高考浙江卷】在 $\triangle ABC$ 中，经$ABC=90$。，$AB=4$，$BC=3$，点D在线段 AC 上，若经$BDC=45$。，则 $BD=$_____，$\cos$经$ABD=$_____.

4．【2019 年高考全国Ⅰ卷】$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

（1）求 A；

（2）若$\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$.

5．【2019 年高考全国Ⅲ卷】$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知$a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$.

（1）求 B；

（2）若$\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $c=1$，求$\triangle ABC$ 面积的取值范围.

6．【2019 年高考北京卷】在$\triangle ABC$ 中，$a=3$，$b-c=2$，$\cos B=-\frac{1}{2}$.

（1）求 b，c 的值；

（2）求 $\sin(B-C)$ 的值.

7．【2019 年高考天津卷】在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c ．已知 $b+c=2a$ ，

$3c\sin B = 4a\sin C$.

（1）求 $\cos B$ 的值；

（2）求 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

8．【2019 年高考江苏卷】在△*ABC* 中，角 *A*，*B*，*C* 的对边分别为 *a*，*b*，*c*.

（1）若 *a*=3*c*，*b*=$\sqrt{2}$，cos*B*=$\frac{2}{3}$，求 *c* 的值；

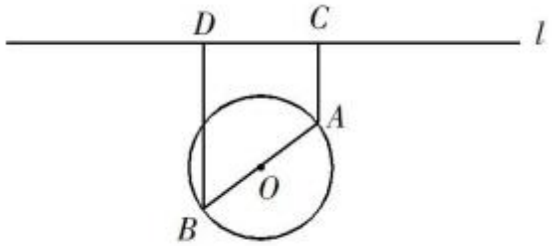
（2）若 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$，求 $\sin(B+\frac{\pi}{2})$ 的值.

9．【2019 年高考江苏卷】如图，一个湖的边界是圆心为 *O* 的圆，湖的一侧有一条直线型公路 *l*，湖上有桥 *AB*（*AB* 是圆 *O* 的直径）．规划在公路 *l* 上选两个点 *P*、*Q*，并修建两段直线型道路 *PB*、*QA*．规划要求：线段 *PB*、*QA* 上的所有点到点 *O* 的距离均不小于圆 *O* 的半径．已知点 *A*、*B* 到直线 *l* 的距离分别为 *AC* 和 *BD*（*C*、*D* 为垂足），测得 *AB*=10，*AC*=6，*BD*=12（单位：百米）.

（1）若道路 *PB* 与桥 *AB* 垂直，求道路 *PB* 的长；

（2）在规划要求下，*P* 和 *Q* 中能否有一个点选在 *D* 处？并说明理由；

（3）在规划要求下，若道路 *PB* 和 *QA* 的长度均为 *d*（单位：百米）.求当 *d* 最小时，*P*、*Q* 两点间的距离.



10．【2019 年高考浙江卷】设函数 $f(x)=\sin x, x\in\mathbf{R}$.

（1）已知 $\theta\in[0,2\pi)$，函数 $f(x+\theta)$ 是偶函数，求 θ 的值；

（2）求函数 $y=[f(x+\frac{\pi}{12})]^2+[f(x+\frac{\pi}{4})]^2$ 的值域.

1.（2018 年全国Ⅱ卷理数）在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，BC=1，AC=5，则AB=

A. $4\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{30}$　　C. $\sqrt{29}$　　D. 25

2.（2018 年全国Ⅲ卷理数）$\triangle ABC$ 的内角A，B，C 的对边分别为a，b，8，若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，

则C=

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

3.（2018 年浙江卷）在ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．若 $a=\sqrt{7}$，$b=2$，$A=60°$，则 $\sin B=$_____，$c=$_____．

4.（2018 年江苏卷）在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,C，$\angle ABC=120°$，$\angle ABC$的平分线交AC于点 D，且$BD=1$，则$4a+C$的最小值为_____．

5.（2018 年天津卷）在ΔABC中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 已知$b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$.

（I）求角 B 的大小；

（II）设 $a=2$，$c=3$，求 b 和$\sin(2A-B)$的值.

6.（2018 年北京卷）在ΔABC 中，$a=7$，$b=8$，$\cos B=-\frac{1}{7}$.

（Ⅰ）求$\angle A$；

（Ⅱ）求 AC 边上的高.

1.【2017 山东，理 9】在ΔABC 中，角A，B，C 的对边分别为a，b，c．若ΔABC 为锐角三角形，且满足 $\sin B(1+2\cos C)=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$，则下列等式成立的是

（A）$a=2b$　　（B）$b=2a$　　（C）$A=2B$　　（D）$B=2A$

2.【2017 北京，理 12】在平面直角坐标系xOy 中，角α与角β均以 Ox 为始边，它们的终边关于y 轴对称.若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos(\alpha-\beta)=$_____.

3.【2017 浙江，14】已知ΔABC，$AB=AC=4$，$BC=2$．点 D 为 AB 延长线上一点，$BD=2$，连结 CD，则 ΔBDC 的面积是_____，$\cos\angle BDC=$_____.

4.【2017 课标 II，理 17】ΔABC 的内角 A、B、C 所对的边分别为a,b,c，已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$，

（1）求 $\cos B$；

（2）若 $a+c=6$，ΔABC 的面积为 2，求b。

1.【2016 高考新课标2 理数】若 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）

（A）$\frac{7}{25}$　　（B）$\frac{1}{5}$　　（C）$-\frac{1}{5}$　　（D）$-\frac{7}{25}$

2.【2016 高考新课标 3 理数】若 $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ ，则 $\cos^2\alpha + 2\sin 2\alpha =$ （　　）

(A) $\frac{64}{25}$　　(B) $\frac{48}{25}$　　(C) 1　　(D) $\frac{16}{25}$

3.【2016 年高考四川理数】 $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$=_____.

1.【2016 高考新课标 3 理数】在 $\triangle ABC$ 中，$B=\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于$\frac{1}{3}BC$,则 $\cos A=$ （　　）

（A）$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　（B）$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　（C）$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　（D）$-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2.【2016 高考新课标 2 理数】ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos C=\frac{5}{13}$，$a=1$，则$b=$_____.

3.【2016 高考天津理数】在ΔABC 中，若 $AB=\sqrt{13}$，BC=3，经$C=120°$，则 $AC=$ （　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

4.【2016 高考江苏卷】在锐角三角形 ABC 中，若 $\sin A=2\sin B\sin C$，则 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是__▲__.

1.【2016 年高考四川理数】（本小题满分 12 分）

在ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c,且 $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}=\frac{\sin C}{c}$.

（I）证明：$\sin A\sin B=\sin C$；

（II）若$b^2+c^2-a^2=\frac{6}{5}bc$，求 $\tan B$.

2.【2016 高考浙江理数】（本题满分 14 分）在ΔABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 已知 $b+c=2a\cos B$.

（I）证明：$A=2B$；

（II）若ΔABC 的面积 $S=\frac{a^2}{4}$，求角 A 的大小.

3.【2016 高考山东理数】（本小题满分 12 分）

在ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2(\tan A+\tan B)=\frac{\tan A}{\cos B}+\frac{\tan B}{\cos A}$.

（Ⅰ）证明：$a+b=2c$;

（Ⅱ）求 $\cos C$ 的最小值.

专题 7　三角恒等变换与解三角形

考情解读

和差角公式、二倍角公式是高考的热点，常与三角函数式的求值、化简交汇命题．既有选择题、填空题，又有解答题，难度适中，主要考查公式的灵活运用及三角恒等变换能力.

重点知识梳理

1．和差角公式

(1)$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$;

(2)$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$;

(3)$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

2．倍角公式

(1)$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;

(2)$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$;

(3)$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

3．半角公式

(1)$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$;

(2)$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$;

(3)$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$;

(4)$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

4．正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$($2R$ 为ΔABC 外接圆的直径).

5．余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

6．面积公式

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$

7．解三角形

(1)已知两角及一边，利用正弦定理求解；

(2)已知两边及一边的对角，利用正弦定理或余弦定理求解，解的情况可能不唯一，需讨论；

(3)已知两边及其夹角，利用余弦定理求解；

(4)已知三边，利用余弦定理求解.

8．“变”是解决三角问题的主题，变角、变名、变表达形式、变换次数等比比皆是，强化变换意识，抓住万变不离其宗——即公式不变，方法不变，要通过分析、归类把握其规律.

高频考点突攻

高频考点一　三角函数概念，同角关系及诱导公式

例 1、（2018 年浙江卷）在ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．若 $a=\sqrt{7}$，$b=2$，$A=60°$，则 $\sin B=$_____，$c=$_____.

【答案】　(1). $\frac{\sqrt{21}}{7}$　　(2). 3

【解析】由正弦定理得$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$,所以$\sin B=\frac{2}{\sqrt{7}}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $\therefore 7=4+c^2-2c$, $\therefore c=3$（负值舍去）.

【变式探究】【2017 北京，理 12】在平面直角坐标系xOy 中，角α与角β均以 Ox 为始边，它们的终边关于y 轴对称.若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos(\alpha-\beta)=$_____.

【答案】$-\frac{7}{9}$

【解析】因为α 和 β关于 y 轴对称，所以$\alpha+\beta=\pi+2k\pi, k\in Z$，那么 $\sin\beta=\sin\alpha=\frac{1}{3}$，

$\cos\alpha=-\cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$（或 $\cos\beta=-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$），

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha-1=-\frac{7}{9}$.

【变式探究】 (1)已知θ是第四象限角，且 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$ _____.

【解析】基本法：将$\theta-\frac{\pi}{4}$转化为$\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}$.

由题意知 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，$\theta$是第四象限角，所以

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)>0$，所以 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{4}{5}$.

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

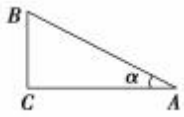
$$=-\frac{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}.$$

【答案】$-\frac{4}{3}$

速解法： 由题意知$\theta+\frac{\pi}{4}$为第一象限角，设$\theta+\frac{\pi}{4}=\alpha$，

$\therefore\theta=\alpha-\frac{\pi}{4}$,

$\therefore\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.



如图，不妨设在 RtΔACB 中， $\angle A=\alpha$， 由 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$可得，

$BC=3$，$AB=5$，$AC=4$，

$\therefore\angle B=\frac{\pi}{2}-\alpha$，　$\therefore\tan B=\frac{4}{3}$，

$\therefore\tan B=-\frac{4}{3}$.

【答案】$-\frac{4}{3}$

(2)若 $\tan\alpha>0$，则(　　)

A．$\sin\alpha>0$　　B．$\cos\alpha>0$

C．$\sin 2\alpha>0$　D．$\cos 2\alpha>0$

【解析】基本法：由 $\tan\alpha>0$ 得α是第一或第三象限角，若α是第三象限角，则 A，B 错；由 $\sin 2\alpha=2\sin$

$\alpha\cos\alpha$知 $\sin 2\alpha>0$，C 正确；α取$\frac{\pi}{3}$时，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{2}<0$，D 错．故选 C.

速解法：∵$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}>0$，即 $\sin\alpha\cos\alpha>0$，

∴$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha>0$，故选 C.

【答案】C

高频考点二　三角函数的求值与化简

例 2、(1)$\sin 20°\cos 10°-\cos 160°\sin 10°=$(　　)

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C．$-\frac{1}{2}$　D$\frac{1}{2}$

【解析】基本法：原式＝$\sin 20°\cos 10°+\cos 20°\sin 10°=\sin(20°+10°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$，故选 D.

速解法：从题目形式上看应是 $\sin(\alpha+\beta)$公式的展开式.

又∵$20°+10°=30°$，故猜想为 $\sin 30°=\frac{1}{2}$.

【答案】D

(2)设$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，且 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则(　　)

A．$3\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　B．$3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

C．$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　D．$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

【解析】基本法：由 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$得$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，即 $\sin\alpha\cos\beta=\cos\alpha+\sin\beta\cos\alpha$，所以 $\sin(\alpha-\beta)$ $=\cos\alpha$，又 $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，又因为$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta$ $<\frac{\pi}{2}$，$0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{\pi}{2}$，因为$\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$，所以 $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$，故选 C.

速解法一：∵$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$，

由 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$知，$\alpha$、$\beta$应为 2 倍角关系，A、B 项中有 3α， 不合题意，C 项中有 $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.

把$\beta=2\alpha-\frac{\pi}{2}$代入

$\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1+\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$

$=\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\tan\alpha$，题设成立．故选 C.

速解法二：$\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)$

$\therefore\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)$

又$\because\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\frac{\beta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$，

$\therefore 2\alpha=\frac{\pi}{2}+\beta$，$\therefore 2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.故选 C.

【答案】C

高频考点三　解三角形

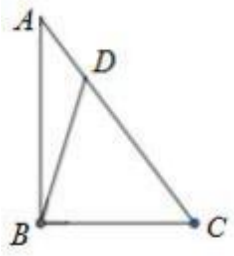
例 3、【2019 年高考浙江卷】在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=4$，$BC=3$，点D在线段AC上，若$\angle BDC=45^\circ$，则$BD=$_____，$\cos\angle ABD=$_____.

【答案】$\frac{12\sqrt{2}}{5}$，$\frac{7\sqrt{2}}{10}$

【解析】如图，在$\triangle ABD$中，由正弦定理有：$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle BAC}$，而$AB=4,\angle ADB=\frac{3\pi}{4}$，

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$，$\sin\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{5},\cos\angle BAC=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{5}$，所以$BD=\frac{12\sqrt{2}}{5}$.

$\cos\angle ABD=\cos(\angle BDC-\angle BAC)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\angle BAC+\sin\frac{\pi}{4}\sin\angle BAC=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.



【举一反三】（2018 年全国Ⅱ卷理数）在 $\triangle ABC$中，$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，BC=1，AC=5，则AB=

A. $4\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{30}$　　C. $\sqrt{29}$　　D. 25

【答案】A

【解析】因为$\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times(\frac{\sqrt{5}}{5})^2-1=-\frac{3}{5}$,

所以$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=1+25-2\times1\times5\times(-\frac{3}{5})=32\therefore c=4\sqrt{2}$，选 A.

【变式探究】在$\triangle ABC$ 中，若 $AB=\sqrt{13}$，$BC=3$，$\angle C=120^\circ$，则 $AC=$(　　)

A．1　B．2　C．3　D．4

【答案】A　【解析】设 $AC=x$，由余弦定理得，

$\cos 120^\circ=\frac{x^2+9-13}{2\times x\times3}=-\frac{1}{2}$,

$\therefore x^2-4=-3x$,

即 $x^2+3x-4=0$.

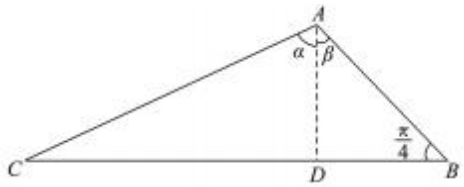
$\therefore x=1$ 或-4(舍).

$\therefore AC=1$，选 A.

【变式探究】在$\triangle ABC$ 中，$B=\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$，则 $\cos A=$(　　)

A.$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　B.$\frac{\sqrt{10}}{10}$　C．$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　D．$-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【答案】C　【解析】如图，作 $AD\perp BC$ 于 D.



设 $AD=1$，$\because B=\frac{\pi}{4}$，$\therefore BD=1$.

又$\because AD=\frac{1}{3}BC$，$\therefore CD=2$，

$\therefore AC=\sqrt{5}$，$AB=\sqrt{2}$，

$\therefore \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

$\therefore \cos A=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

高频考点四 正、余弦定理的应用

例 4、【2019 年高考全国Ⅰ卷】$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

（1）求 A；

（2）若 $\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$.

【答案】（1）$A=60°$；（2）$\sin C=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

【解析】（1）由已知得 $\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$，故由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$.

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.

因为 $0°<A<180°$，所以 $A=60°$.

（2）由（1）知 $B=120°-C$，由题设及正弦定理得 $\sqrt{2}\sin A+\sin(120°-C)=2\sin C$，

即 $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C=2\sin C$，可得 $\cos(C+60°)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由于 $0°<C<120°$，所以 $\sin(C+60°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故

$\sin C=\sin(C+60°-60°)$

$=\sin(C+60°)\cos 60°-\cos(C+60°)\sin 60°$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

【举一反三】（2018 年天津卷）在ΔABC中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 已知$b\sin A = a\cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$.

（I）求角 B 的大小；

（II）设 $a=2$，$c=3$，求 b 和$\sin(2A-B)$的值.

【答案】（I）；（II）$B = \frac{\pi}{3}$，$b = \sqrt{7}$，$\sin(2A-B) = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

【解析】（I）在ΔABC 中，由正弦定理$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$，可得$b\sin A = a\sin B$，

又由$b\sin A = a\cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$，得$a\sin B = a\cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$，

即$\sin B = \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$，可得$\tan B = 5$.

又因为$B \in (0, \pi)$，可得 $B = \frac{\pi}{3}$.

（II）在ΔABC 中，由余弦定理及 $a=2$，$c=3$，$B = \frac{\pi}{3}$，

有$b^2 = a^2 + 6^2 - 2a\cos B = 7$，故 b=万.

由$b\sin A = a\cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$，可得$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. 因为 $a<c$，故$\cos A = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

因此$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = \frac{1}{7}$.

所以，$\sin(2A-B) = \sin 2A\cos B - \cos 2A\sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

【变式探究】【2017 课标 II，理 17】ΔABC 的内角 A、B、C 所对的边分别为 a, b, c，已知 $\sin(A + C) = 8\sin^2\frac{B}{2}$，

（1）求 $\cos B$；

（2）若 $a + c = 6$，ΔABC 的面积为 2，求 b。

【答案】(1) $\cos B = \frac{15}{17}$；　　(2) b=2

【解析】b=2（1） 由题设及 $A + B + C = \pi$得$\sin B = 8\sin^2\frac{\pi}{2}$，故

$\sin B = 4〔1 - \cos B)$

上式两边平方，整理得 $17\cos^2 B - 32\cos B + 15 = 0$

解得 $\cos B = 1$（舍去），$\cos B = \frac{15}{17}$

（2）由 $\cos B=\frac{15}{17}$ 得 $\sin B=\frac{8}{17}$，故 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{4}{17}ac$

又 $S_{\Delta ABC}=2$，则 $ac=\frac{17}{2}$

由余弦定理 及a+c=6得

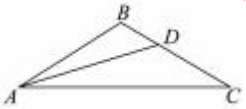
$$\begin{aligned}b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B\\&=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)\\&=36-2\times\frac{17}{2}\times(1+\frac{15}{17})\\&=4\end{aligned}$$

所以 b=2.

【变式探究】（1）在ΔABC 中，$B=120°$，$AB=\sqrt{2}$，A 的角平分线 $AD=\sqrt{3}$，则 $AC=$_____.

（2）在ΔABC 中，$\angle A=\frac{3\pi}{4}$，$AB=6$，$AC=3\sqrt{2}$，点 D 在 BC 边上，$AD=BD$，求 AD 的长.

【解析】 (1)如图，在ΔABD 中， 由正弦定理，



得 $\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，$\therefore\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore\angle ADB=45°$，$\therefore\angle BAD=180°-45°-120°=15°$.

$\therefore\angle BAC=30°$，$\angle C=30°$，

$\therefore BC=AB=\sqrt{2}$.

在ΔABC 中， 由正弦定理，

得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，$\therefore AC=\sqrt{6}$.

(2)设ΔABC 的内角$\angle BAC$，B，C 所对边的长分别是 a，b，c，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle BAC$

$=(3\sqrt{2})^2+6^2-2\times3\sqrt{2}\times6\times\cos\frac{3\pi}{4}$

$=18+36-(-36)=90$，

所以 $a=3\sqrt{10}$.

又由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin\angle BAC}{a}=\frac{3}{3\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/697111022143006160