

第二章 静电场

目录

1 2.1 静电场方程

2 2.2 电位

3 2.3 介质中电场

4 2.4 电容

5 2.5 边界条件

6 2.6 边值问题

7 2.7 静电场能量

8 2.8 作业

目录

上海交通大学



1 2.1 静电场方程

2 2.2 电位

3 2.3 介质中电场

4 2.4 电容

5 2.5 边界条件

6 2.6 边值问题

7 2.7 静电场能量

8 2.8 作业



真空中静电场的基本方程

上海交通大学

静电场的源—电荷和电荷密度

宏观上，可以用电荷密度来描述带电体的电荷分布。为此，定义体电荷密度为

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} = \frac{dQ}{dv} \quad C/m^3 \quad (1)$$

其中 ΔQ 是体积元 Δv 内包含的总电荷量。



真空中静电场的基本方程

上海交通大学

静电场的源—电荷和电荷密度

当电荷存在于一无限薄的薄层或截面很小的细线上时，将薄层或细线上的电荷分布分别用面电荷密度或线电荷密度来描述较为方便。

定义面电荷密度 ρ_s 和线电荷密度 ρ_l 分别为

$$\rho_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} = \frac{dQ}{ds} \quad C/m^2 \quad (2)$$

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \quad C/m \quad (3)$$

其中 ΔQ 分别是薄层的面积元 Δs 或细线的长度元 Δl 上的电荷量。

于是，一个体积为 V 、表面积为 s 以及线长为 l 上包含的总电荷可分别对以上三式进行体、面和线积分得到，其表达式分别为

$$Q = \int_V \rho dv, \quad Q = \int_s \rho_s ds, \quad Q = \int_l \rho_l dl \quad (4)$$



静电场的基本方程

库仑定律与电场强度

若两个带电体的尺寸远小于带电体之间的距离，则带电体可视为点电荷。库仑定律是关于两个点电荷之间相互作用力的定量描述，它是由法国物理学家库仑 (C. A. Coulomb) 于 1785 年通过实验总结出的定律。

库仑定律叙述为：在真空中，两个点电荷 Q_1 和 Q_2 (Q_1, Q_2 是点电荷的电荷量，为方便起见，按习惯将 Q_1, Q_2 称为点电荷) 之间相互作用力的方向沿着这两个点电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸，作用力的大小与电量 Q_1 和 Q_2 的乘积成正比，而与这两个点电荷之间的距离 R 的平方成反比。如 Figure 1所示。



静电场的基本方程

库仑定律与电场强度

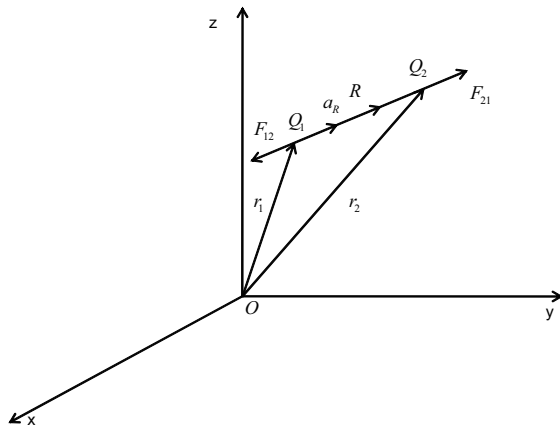


Figure 1: 两个点电荷间的库仑力



静电场的基本方程

库仑定律与电场强度

用数学表达式表示, 有

$$\vec{F}_{21} = \frac{Q_1 Q_2 \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \vec{a}_R \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} N \quad (5)$$

其中 $\vec{F}_{21}$ 表示点电荷 Q_1 作用在点电荷 Q_2 上的力,

$\epsilon_0 = (1/36\pi) \times 10^{-9} \approx 8.854 \times 10^{-12} F/m$, 为真空的介电常数,

$\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{a}_R R = \vec{a}_R |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, 是 Q_1 到 Q_2 的距离矢量。



静电场的基本方程

库仑定律与电场强度

电场中某点的电场强度在量值和方向上等于一个实验电荷（一般取为单位正电荷）在该点所受的力，即

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0} \quad \text{V/m} \quad (6)$$

式中试验电荷量 Q_0 及其体积应尽可能小，从而使原电场受到的影响可忽略不计。

这样，若空间中任一点 P 处的电场强度为 $\vec{E}$ ，则作用于该点处点电荷 Q 的作用力为

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad (7)$$

由此，可写出真空中距点电荷 Q 的距离为 R 处的点的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{Q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (8)$$



静电场的基本方程

库仑定律与电场强度

一般地, 若真空中有 n 个点电荷, 则空间中任意点 P 处的总电场强度为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{R_i^3} \vec{R}_i \quad (9)$$

式中, $\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$ 代表从 Q_i 所在点到 P 点的距离矢量, 方向由点电荷 Q_i 所在点 (源点) 指向场点 P 。



静电场的基本方程

库仑定律与电场强度

对真空中有限区域内连续分布的体电荷，设体电荷分布的体积为 v ，则体积 v 之外的任一点 P 处的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\vec{r}')\vec{R}}{R^3} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (10)$$

式中： $\vec{r}$ 为点 P 的矢径， $\vec{r}'$ 为体电荷元 dv' 所在点的矢径。

类似地，以线、面分布的电荷产生的电场强度的表达式也容易写出，此时只需将上式中的 $\rho(\vec{r}')dv'$ 分别改写为 $\rho_l(\vec{r}')dl'$ 和 $\rho_s(\vec{r}')ds'$ 即可。



静电场的基本方程

高斯定理与电通量密度

除电场强度 $\vec{E}$ 外，通常还引出另外一个场矢量 $\vec{D}$ ，称为电通量密度（或电位移矢量）。

真空中，电通量密度 $\vec{D}$ 可由电场强度 $\vec{E}$ 定义为

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad \text{C/m}^2 \quad (11)$$

应指出，到目前为止，我们仅限于讨论真空或自由空间的情况（由后续内容可知，对简单媒质， $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ ）。



静电场的基本方程

高斯定理与电通量密度

高斯定理叙述为：穿过真空或自由空间中任意封闭面的电通量等于此封闭面所包围的自由电荷总电量，即

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad (12)$$

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (13)$$

这是由德国的高斯 (K. F. Gauss) 于 1839 年导出的高斯定理的积分形式。

若体电荷分布于封闭面所包围的体积内，则上式可写成

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_v \rho dv \quad (14)$$



静电场的基本方程

高斯定理与电通量密度

对上式左端应用散度定理，则

$$\int_v \nabla \cdot \vec{D} dv = \int_v \rho dv \quad (15)$$

此式对任意的封闭面 s 所包围的体积均应成立，因此两端体积分中的被积函数应相等。于是，在空间任一点处，可得

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (16)$$

这是高斯定理的微分形式，即空间任一点处电通量密度的散度等于该点处的体电荷密度。上述方程是静电场的基本方程之一。



静电场的基本方程

静电场的无旋性

如前所述，静电场中试验电荷（取为单位正电荷）所受到的作用力为

$$\vec{F} = Q_0 \vec{E} \quad (17)$$

这样，外力使试验电荷自场中 a 点移到 b 点所作的功为

$$W_{ba} = -Q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (18)$$

利用此式不难证明外力做功（或电场力做功）仅取决于静电场中起点 a 和终点 b 的位置，而与 Q_0 所经过的路径无关。



静电场的基本方程

静电场的无旋性

这样，若使点电荷沿闭合路径移动，则外力所作的功为

$$W_{ba} = -Q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (19)$$

或

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (20)$$

这表明，静电场中电场强度 Q_0 是无旋的或保守的，即静电场是无旋场或保守场。

对上式利用斯托克斯定理，得

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (21)$$

上述方程也是静电场的基本方程之一。

目录



1 2.1 静电场方程

2 2.2 电位

3 2.3 介质中电场

4 2.4 电容

5 2.5 边界条件

6 2.6 边值问题

7 2.7 静电场能量

8 2.8 作业



电位和电位方程

电位与电位差

■ 电位

由此可见, $\vec{E}$ 可由一个标量函数表达因此引入**电位** V

$$\vec{E} = -\nabla V$$

关于电位的讨论: 电位为电场的辅助函数, 是一个标量函数。“—”表示电场指向**电位减小最快**的方向。在直角坐标系中

$$\vec{E} = -\left(\vec{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (22)$$



电位和电位方程

电位与电位差

■ 电位差

电位差反映了电位空间中不同点处电位的变化量。

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial l} \vec{a}_l \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial l} \vec{a}_l) \\ \Rightarrow dV &= -\vec{E} \cdot d\vec{l} \\ \Rightarrow V_{ba} &= V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

关于电位差的说明：

A、意义：b、a 两点间的电位差等于将单位正电荷从 b 点移到 a 点过程中电场力做的功。

B、两点间的电位差有确定的值，只与首尾两点的位置有关，与积分路径无关。



电位和电位方程

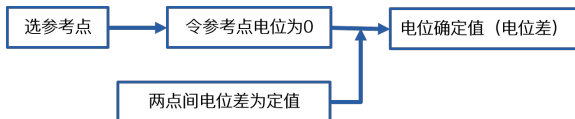
上海交通大学

电位参考点

显然，电位函数 V 不是唯一确定的，可以加上任意一个常数仍表示同一电场，即

$$V' = V + C \neq V, \quad \vec{E} = -\nabla V' = \nabla(V + C) = -\nabla V \quad (23)$$

为了使空间各点电位具有确定值，必须选定空间某一点作为电位参考点，且令参考点的电位为 0，由于空间各点与参考点之间的电位差具有确定值，所以该点的电位也就具有确定值。即



选择参考点的原则：

A. 应使电位表达式有意义； B. 应使电位表达式最简单； C. 同一问题只能有一个电位参考点； 电位参考点的电位一般设为 0。



电位和电位方程

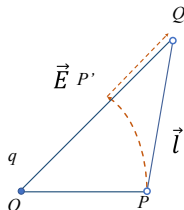
上海交通大学

几种常见的电位方程

(1)、点电荷的电位

$$\begin{cases} V_P - V_Q = - \int_Q^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\int_P^{P'} + \int_{P'}^Q) \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_R \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_P - V_Q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{P'}^Q \frac{\vec{a}_R \cdot d\vec{R}}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_P} - \frac{1}{R_Q} \right) \quad (24)$$



若参考点选在无穷远处, 即 $R_Q \rightarrow \infty$, 则

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_P}, \quad R_P = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (25)$$

说明:

若电荷分布在有限区域内, 一般选择无穷远处为电位参考点。



电位和电位方程

上海交通大学

几种常见的电位方程

(2)、分布电荷体系在空间中产生的电位

体电荷:
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')dV}{R}$$

面电荷:
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_S(\vec{r}')dS}{R}$$

线电荷:
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l(\vec{r}')dV}{R}$$

式中: $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, 电位参考点均选在无穷远处。

引入电位函数的意义:

简化电场的求解! 在某些情况下, 直接求解电场强度很困难, 但求解电位函数则相对简单, 因此可以通过先求解电位函数, 再求解电场强度。
——间接求解法。



电位和电位方程

静电场电位方程的建立

在存在电荷分布的区域内（有源区），均匀媒质中的电位方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \vec{E} = -\nabla V \end{cases} \quad (26)$$
$$\Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

即 $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ ，电位的泊松方程。

在无源区中， $\rho = 0$

$\nabla^2 V = 0$ ，电位的拉普拉斯方程。

应用：

用于求解静电场的边值问题。



电位和电位方程

上海交通大学

例 2.1

求无限长线电荷在真空中产生的电场。

分析： 电场方向垂直圆柱面，大小只与 r 有关。

解答： 取如 Figure 2 所示高斯面，由高斯定律，有

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) \cdot (2\pi r l \cdot \vec{a}_r) &= \frac{\rho_l \cdot l}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \vec{a}_r\end{aligned}$$

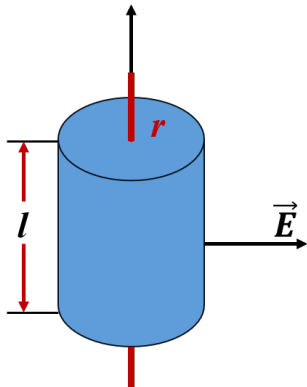


Figure 2: 例 2.1 题图



电位和电位方程

上海交通大学

例 2.2

真空中间距为 l 的两根无限长平行双导线构成的平行双线的横截面，假设平行双线上电荷均匀分布，线电荷密度分别为 $\pm\rho_l$ 。求空间任一点 p 处的电位。

解答：线电荷 $\pm\rho_l$ 在点 P 产生的电位

$$\begin{aligned} V_+ &= \int_p^{p_0} \vec{E}_+ \cdot d\vec{l} = \int_A^{p_0} \vec{E}_l \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{r_+}^{r_{0+}} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_{0+}}{r_+}\right) \end{aligned}$$

线电荷 $-\rho_l$ 在 P 点的产生的电位：

$$\begin{aligned} V_- &= \int_B^{p_0} \vec{E}_- \cdot d\vec{l} = - \int_{r_-}^{r_{0+}} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} dr \\ &= - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_{0-}}{r_-}\right) \end{aligned}$$

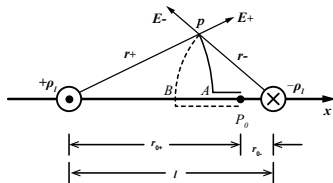


Figure 3: 例 2.2 题图



电位和电位方程

上海交通大学

例 2.2

P 点的总电位:

$$V_P = V_+ + V_- = \frac{\rho l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right) + \frac{\rho l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_{0+}}{r_{0-}}\right) = \frac{\rho l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right) + C$$

若 $r_{0+} = r_{0-} = l/2$, $C = 0$, 则 P 点电位为

$$V_P = \frac{\rho l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right) = \frac{\rho l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x - l/2)^2 + y^2}{(x + l/2)^2 + y^2}$$



电位和电位方程

上海交通大学

例 2.2

有两块无限大的导体平板分别置于 $x = 0$ 处, 已知 $x = 0$ 处, $V = 0$; $x = a$ 处, $V = V_0$ 在两导体平板间有体电荷密度 $\rho = \rho_0 x/a$ 的电荷分布。求两导体平板间的电位和电场分布。

解答:

两导体间的电位满足泊松方程: $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$,

由于电位 V 与 y, z 无关, 所以 $\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho_0 x}{\epsilon_0 a}$,

积分得, $V = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0 a} x^3 + C_1 x + C_2$

利用边界条件: $V|_{x=0} = 0$, $V|_{x=a} = V_0$, 可得 $C_1 = \frac{V_0}{a} + \frac{\rho_0 a}{6\epsilon_0}$, $C_2 = 0$.

则 $V = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0 a} x^3 + (\frac{V_0}{a} + \frac{\rho_0 a}{6\epsilon_0})x$

电场强度 $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dx} \vec{a}_x = [\frac{\rho_0}{2\epsilon_0 a} x^2 - (\frac{V_0}{a} + \frac{\rho_0 a}{6\epsilon_0})] \vec{a}_x$

目录

上海交通大学



1 2.1 静电场方程

2 2.2 电位

3 2.3 介质中电场

4 2.4 电容

5 2.5 边界条件

6 2.6 边值问题

7 2.7 静电场能量

8 2.8 作业



电介质中的电场

上海交通大学

电偶极子的电位和电场强度

电偶极子，指真空中由一对相距小距离的等值异号电荷构成的场源系统。

电偶极矩， $\vec{p} = Q\vec{d}$ ，方向由负电荷指向正电荷。

选取如 Figure 4 所示得球坐标系，则 P 点电位为：

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_- - R_+}{R_- R_+} \quad (27)$$

$$V \approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} (R \gg d) \quad (28)$$

电场强度为

$$\vec{E} = -\nabla V = \vec{a}_R \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} + \vec{a}_\theta \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (29)$$

电介质中的电场

上海交通大学

电偶极子的电位和电场强度

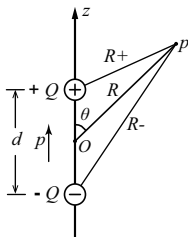


Figure 4: 电偶极子示意图

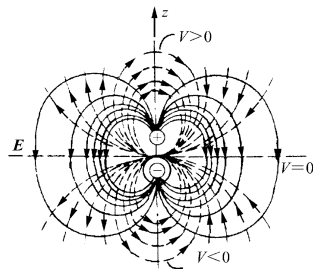


Figure 5: 电偶极子的电力线分布

$$R_+ = [R^2 + (\frac{d}{2})^2 - 2R(\frac{d}{2}) \cos \theta]^{1/2} \approx R - (\frac{d}{2}) \cos \theta$$

$$R_- = [R^2 + (\frac{d}{2})^2 + 2R(\frac{d}{2}) \cos \theta]^{1/2} \approx R + (\frac{d}{2}) \cos \theta$$

$$R_+ R_- = R^2 - [(\frac{d}{2} \cos \theta)]^2 \approx R^2$$



电介质中的电场

电介质

电介质：指导磁率为 μ_0 的媒质（电导率很小）。

1. 电介质可分为无极性介质和有极性介质。电介质可以看作内部存在大量不规则且方向迅速变化的分子极矩的电荷系统。
2. 热平衡时，分子无规则运动，分子极矩取向各方向概率相同，介质在宏观上不显出电特性。
3. 电介质的极化：在**外加电场**的作用下，无极分子变为有极性分子，有极分子的取向一致，**宏观上出现电偶极矩，表现出电特性。**



电介质中的电场

极化强度矢量

极化强度矢量：

用极化强度矢量 $\vec{P}$ 表示电介质被极化的程度。

$$\vec{P} = \lim_{\nabla V \rightarrow 0} \frac{1}{\nabla V} \sum \vec{p} \quad (30)$$

物理意义：单位体积内电偶极矩的矢量和。

说明：对于线性、各向同性电介质， $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ ， χ_e ：电介质的极化率。



电介质中的电场

上海交通大学

极化强度矢量

极化介质中体积元 dV 内电偶极矩在任意一点 P 处产生的电位微元为

$$d\phi = \frac{\vec{P} \cdot \vec{R} dV'}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) dV' - \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{R} dV' \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{a}_n}{R} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} -\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{R} dV'\end{aligned}\tag{31}$$

束缚体电荷密度: $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ 束缚面电荷密度: $\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \vec{a}_n$

注: $\vec{P} \cdot \nabla' 1/R = \nabla' \cdot (\vec{P}/R) - (\nabla' \cdot \vec{P})/R$



电介质中的电场

极化电荷

极化电荷：

电介质被极化后，在其内部和分界面上将出现电荷分布，这种电荷称为极化电荷。由于相对于自由电子而言，极化电荷不能自由运动，故也称为束缚电荷。

位于电介质内部的极化电荷称为体极化电荷，体极化电荷密度为

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

位于电介质表面的极化电荷称为面极化电荷，面极化电荷密度为

$$\rho_{pS} = \vec{P} \cdot \vec{a}_n$$



电介质中的电场

上海交通大学

电介质中的高斯定理荷

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

任一媒质中的电通量密度定义为

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad (32)$$

式中 ε 称为介质的介电常数, ε_r 是介质的相对介电常数。

微分形式的高斯定理:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (33)$$

积分形式的高斯定理:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (34)$$

说明: $\vec{D}$ 的源是自由电荷, 而 $\vec{E}$ 源既包含自由电荷也包含束缚电荷。



边界条件

上海交通大学

例 2.3

在真空中有一半径为 a 的球体，球体中均匀充满体电荷度为 ρ 的电荷，已知球内的介电常数为 ε_0 ，求球内、外的电位和电场强度的表达式。

分析： 本题有多种解题思路。典型的一种求解思路是利用高斯定理求出球内、外的电场强度在选取无穷远处为电位参考点的情况下，根据电场强度求球内、外的电位。这里采用另一种题思路。即利用电位方程和边界条件求电位，然后由电位求电场强度。

解答： (1) 求球内、外的电位

设球内外的电位分别为 ϕ_1 和 ϕ_2 ，又由于球内的电荷均匀分布，故球内外的场分布具有球对称性。于是， ϕ_1 和 ϕ_2 满足以下的泊松方程和拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi_1 = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\phi_1}{dR} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (R \leq a)$$

$$\nabla^2 \phi_2 = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\phi_2}{dR} \right) = 0, \quad (R > a)$$



边界条件

上海交通大学

例 2.3

将以上两个方程积分两次，可得 ϕ_1 和 ϕ_2 通解为：

$$\phi_1 = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 - \frac{A}{R} + B$$

$$\phi_2 = -\frac{C}{R} + D$$

若选取电位的参考点在无远处，则球外两区域中的电位 ϕ_1 和 ϕ_2 满足以下边界条件：

$$\begin{aligned}\phi_1|_{R=a} &= \phi_2|_{R=a} \\ \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial R}|_{R=a} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial R}|_{R=a} \\ \phi_2|_{R \rightarrow \infty} &= 0 \\ \phi_1|_{R=0} &\neq \infty\end{aligned}$$

将 ϕ_1 和 ϕ_2 的通解代入，得 $A=0$ ， $D=0$ ， $C=-\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}$ ， $B=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$ 。所以

$$\phi_1 = -\frac{\rho a^2}{6\varepsilon_0} + -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}, \quad (R \leq a)$$

$$\phi_2 = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 R}, \quad R > a$$

目录

上海交通大学



1 2.1 静电场方程

2 2.2 电位

3 2.3 介质中电场

4 2.4 电容

5 2.5 边界条件

6 2.6 边值问题

7 2.7 静电场能量

8 2.8 作业



静电场导体系统中的电容

静电场中导体的特点

导体是指内部有大量自由电荷的媒质。

静电平衡状态:

导体在静电场中处于静电平衡状态, 导体内部不存在电荷, 电荷只能分布在表面, 导体内部任意点电场强度为 0, 此时导体是等位体, 导体表面是等位面。

静电感应现象: 外电场使导体内部电荷重新分配的现象。

感应电荷:

带电导体的电位高低决定于所带电荷、自身形状以及附近电荷。



静电场导体系统中的电容

上海交通大学

电容器和电容

孤立导体的电位决定于本身的形状，并与所带电量成正比。

孤立导体的电容：孤立导体所带电荷量与其电位之比。

$$C = \frac{Q}{V} \quad (35)$$

关于孤立导体电容的说明：

电容 C 只与导体几何性质、导体间距和周围介质有关。两个导体构成电容器，若导体电位分别为 V_1 , V_2 ，带电量分别为 Q , $-Q$ ，则定义电容器电容为

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (36)$$



静电场导体系统中的电容

上海交通大学

例 2.4

平行双线，导线半径为 a ，导线轴线距离为 D ，求：平行双线单位长度的电容。 ($a \ll D$)

解答： 设导线单位长度带电分别为 $+\rho_l$ 和 $-\rho_l$ ，易于求得，在 P 点处，

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 x} \vec{e}_x, \quad \vec{E}_2 = \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0(D-x)} (-\vec{e}_x)$$

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) \vec{e}_x$$

导线间电位差为：

$$U = \int_a^{D-a} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \frac{\rho_l}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{D-a}{a}$$

$$\text{电容: } C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(D-a) - \ln a}$$

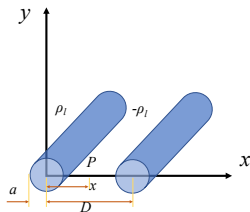


Figure 6: 例 2.4 题图



静电场导体系统中的电容

上海交通大学

例 2.5

计算同轴线内外导体间单位长度电容。

解答： 设同轴线内外导体单位长度带电量分别为 $+\rho_l$ 和 $-\rho_l$ ，则内外导体间电场分布为：

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

内外导体电位差为：

$$U = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

导体间电容为：

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln b - \ln a}$$

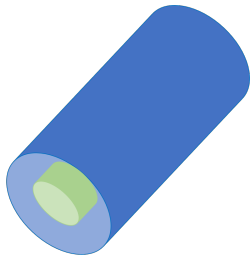


Figure 7: 例 2.5 题图

目录



1 2.1 静电场方程

2 2.2 电位

3 2.3 介质中电场

4 2.4 电容

5 2.5 边界条件

6 2.6 边值问题

7 2.7 静电场能量

8 2.8 作业



静电场的边界条件

电场强度的边界条件

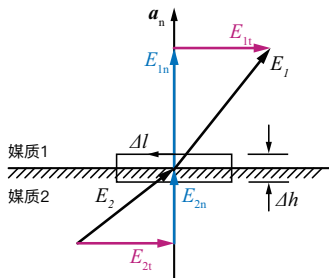
上海交通大学

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{l} - \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{l}$$

$$= E_{1t}\Delta l - E_{2t}\Delta l = - \int_{\Delta S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{a}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \Leftrightarrow E_{1t} = E_{2t}$$



结论：

电场强度在不同媒质分界面两侧**切向分量**连续。



静电场的边界条件

上海交通大学

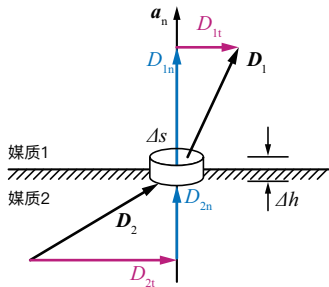
电通密度的边界条件

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \vec{D}_1 \cdot \vec{a}_n \Delta S - \vec{D}_2 \cdot \vec{a}_n \Delta S$$

$$= (D_{1n} - D_{2n}) \Delta S = \Delta Q$$

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{a}_n = \rho_S \quad (37)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \quad (38)$$



结论：

电通密度在不同媒质分界面两侧的法向分量不连续，其差值恰好等于分界面上自由电荷面密度。



两种媒质交界面上的边界条件

上海交通大学

电场矢量 E 和 D 的边界条件

在求解静电场的边值问题时，经常需要两种不同媒质交界面上的边界条件。

$$\vec{a}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\vec{a}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_S$$

A: 理想介质 1 与理想导体 2 的交界面:

$$Med.1 = \begin{cases} \vec{E}_{1t} = 0 \\ \vec{D}_{1n} = \rho_S \Rightarrow \vec{E}_{1n} = \rho_S / \varepsilon_1 \end{cases} \quad Cond.2 = \begin{cases} \vec{E}_{2t} = 0 \\ \vec{D}_{2n} = 0, \quad \vec{E}_{2n} = 0 \end{cases}$$

导体表面介质 1 中的静电场总是垂直于导体表面

B: 两种理想介质的交界面，不含自由面电荷:

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}, \quad \vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n} \quad \Leftrightarrow \varepsilon_1 \vec{E}_{1n} = \varepsilon_2 \vec{E}_{2n}$$

$$\vec{E}_{1n} - \vec{E}_{2n} = \frac{\rho_{pS}}{\varepsilon_0}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/697112160142010033>