关于滞后变量模型

一、滞后变量模型

在经济运行过程中，广泛存在时间滞后效应。某些经济变量不仅受到同期各种因素的影响，而且也受到过去某些时期的各种因素甚至自身的过去值的影响。

通常把这种过去时期的，具有滞后作用的变量叫做滞后变量（Lagged Variable），含有滞后变量的模型称为**滞后变量模型**。

滞后变量模型考虑了时间因素的作用，使静态分析的问题有可能成为动态分析。**含有滞后解释变量的模型，又称动态模型（Dynamical Model）**。

1、滞后效应与与产生滞后效应的原因

因变量受到自身或另一解释变量的前几期值影响的现象称为滞后效应。

表示前几期值的变量称为滞后变量。

如：消费函数

通常认为，本期的消费除了受本期的收入影响之外，还受前1期，或前2期收入的影响：

$$C_t=\beta_0+\beta_1 Y_t+\beta_2 Y_{t-1}+\beta_3 Y_{t-2}+\mu_t$$

Y_{t-1}，Y_{t-2}为滞后变量。

• 产生滞后效应的原因

1、心理因素：人们的心理定势，行为方式滞后于经济形势的变化，如中彩票的人不可能很快改变其生活方式。

2、技术原因：如当年的产出在某种程度上依赖于过去若干期内投资形成的固定资产。

3、制度原因：如定期存款到期才能提取，造成了它对社会购买力的影响具有滞后性。

2、滞后变量模型

以滞后变量作为解释变量，就得到**滞后变量模型**。它的一般形式为：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \cdots + \beta_q Y_{t-q} + \alpha_0 X_t + \alpha_1 X_{t-1} + \cdots + \alpha_s X_{t-s} + \mu_t$$

q，s：滞后时间间隔

自回归分布滞后模型（autoregressive distributed lag model, ADL）：既含有Y对自身滞后变量的回归，还包括着X分布在不同时期的滞后变量

有限自回归分布滞后模型：滞后期长度有限

无限自回归分布滞后模型：滞后期无限，

（1）分布滞后模型（distributed-lag model）

分布滞后模型：模型中没有滞后被解释变量，仅有解释变量X的当期值及其若干期的滞后值：

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{s} \beta_i X_{t-i} + \mu_t$$

β_0：**短期**(short-run)或**即期乘数**(impact multiplier)，表示本期X变化一单位对Y平均值的影响程度。

β_i（i=1, 2…, s）：**动态乘数**或**延迟系数**，表示各滞后期X的变动对Y平均值影响的大小。

$\sum_{i=0}^{s}\beta_i$ 称为**长期（long-run）**或**均衡乘数（total distributed-lag multiplier）**，表示X变动一个单位，由于滞后效应而形成的对Y平均值总影响的大小。

如果各期的X值保持不变，则X与Y间的长期或均衡关系即为

$$E(Y)=\alpha+(\sum_{i=0}^{s}\beta_i)X$$

2、自回归模型（autoregressive model）

自回归模型：模型中的解释变量仅包含X的当期值与被解释变量Y的一个或多个滞后值

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \sum_{i=1}^{q} \beta_i Y_{t-i} + \mu_t$$

而

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 Y_{t-1} + \mu_t$$

称为**一阶自回归模型（first-order autoregressive model）**。

二、分布滞后模型的参数估计

1、分布滞后模型估计的困难

无限期的分布滞后模型，由于样本观测值的有限性，使得无法直接对其进行估计。

有限期的分布滞后模型，OLS会遇到如下问题：

1、没有先验准则确定滞后期长度；

2、如果滞后期较长，将缺乏足够的自由度进行估计和检验；

3、同名变量滞后值之间可能存在高度线性相关，即模型存在高度的多重共线性。

2、分布滞后模型的修正估计方法

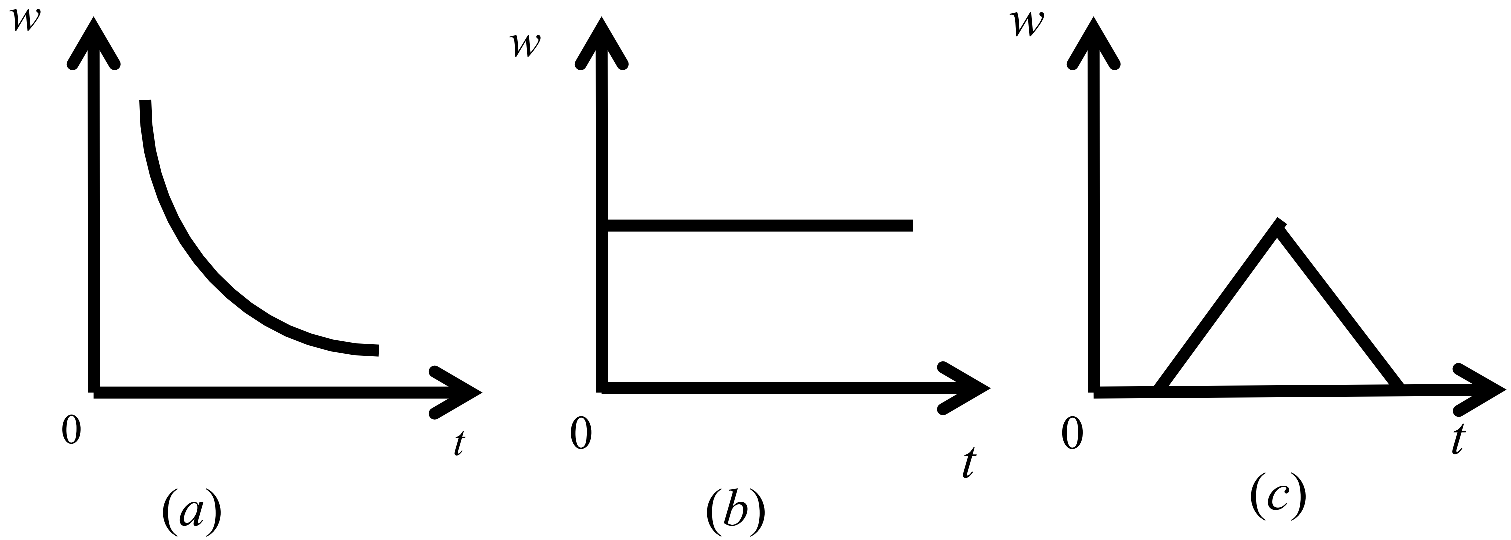
人们提出了一系列的修正估计方法，但并不很完善。

各种方法的基本思想大致相同：都是**通过对各滞后变量加权，组成线性合成变量而有目的地减少滞后变量的数目，以缓解多重共线性，保证自由度。**

(1)经验加权法

根据实际问题的特点、实际经验给各滞后变量指定权数，滞后变量按权数线性组合，构成新的变量。权数据的类型有：

常见的滞后结构类型



•**递减型：**

即认为**权数是递减的**，X的近期值对Y的影响较远期值大。

如消费函数中，收入的近期值对消费的影响作用显然大于远期值的影响。

例如：**滞后期为 3**的一组权数可取值如下：

1/2， 1/4， 1/6， 1/8

则新的线性组合变量为：

$$W_{1t}=\frac{1}{2}X_t+\frac{1}{4}X_{t-1}+\frac{1}{6}X_{t-2}+\frac{1}{8}X_{t-3}$$

- **矩型：**

即认为**权数是相等的**，X的逐期滞后值对值Y的影响相同。

如滞后期为3，指定相等权数为1/4，则新的线性组合变量为：

$$W_{2t}=\frac{1}{4}X_t+\frac{1}{4}X_{t-1}+\frac{1}{4}X_{t-2}+\frac{1}{4}X_{t-3}$$

- 倒V型

权数先递增后递减呈倒“V”型。

例如：在一个较长建设周期的投资中，历年投资X为产出Y的影响，往往在周期期中投资对本期产出贡献最大。

如滞后期为4，权数可取为

1/6， 1/4， 1/2， 1/3， 1/5

则新变量为

$$W_{3t}=\frac{1}{6}X_t+\frac{1}{4}X_{t-1}+\frac{1}{2}X_{t-2}+\frac{1}{3}X_{t-3}+\frac{1}{5}X_{t-4}$$

经验权数法的优点是：简单易行

缺点是：设置权数的随意性较大

通常的做法是：

多选几组权数，分别估计出几个模型，然后根据常用的统计检验（R方检验，F检验，t检验，D-W检验），从中选择最佳估计式。

例1 对一个分布滞后模型：

$$Y_t = \alpha_0 + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \beta_3 X_{t-3} + \mu_t$$

给定递减权数：1/2， 1/4， 1/6， 1/8

令 $$W_{1t} = \frac{1}{2}X_t + \frac{1}{4}X_{t-1} + \frac{1}{6}X_{t-2} + \frac{1}{8}X_{t-3}$$

原模型变为：$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 W_{1t} + \mu_t$

该模型可用OLS法估计。假如参数估计结果为

$$\hat{\alpha}_0 = 0.5 \qquad \hat{\alpha}_1 = 0.8$$

则原模型的估计结果为：

$$\hat{Y}_t = 0.5 + \frac{0.8}{2}X_t + \frac{0.8}{4}X_{t-1} + \frac{0.8}{6}X_{t-2} + \frac{0.8}{8}X_{t-3} = 0.5 + 0.4X_t + 0.2X_{t-1} + 0.133X_{t-2} + 0.1X_{t-3}$$

【例2】 已知1955—1974年期间美国制造业库存量 和销售额 的统计资料如表1（金额单位：亿美元）。设定有限分布滞后模型为：

运用经验加权法，选择下列三组权数：

（1）1，1/2，1/4，1/8

（2）1/4，1/2，2/3，1/4

（3）1/4，1/4，1/4，1/4

分别估计上述模型，并从中选择最佳的方程。

记新的线性组合变量分别为：

$$Z_1 = X_t + \frac{1}{2}X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} + \frac{1}{8}X_{t-3}$$

$$Z_2 = \frac{1}{4}X_t + \frac{1}{2}X_{t-1} + \frac{2}{3}X_{t-2} + \frac{1}{4}X_{t-3}$$

z_1, z_2, z_3

$$Z_3 = \frac{1}{4}X_t + \frac{1}{4}X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} + \frac{1}{4}X_{t-3}$$

由上述公式生成线性组合变量 z_1, z_2, z_3 的数据。然后分别估计如下经验加权模型。

回归分析结果整理如下

模型一：

t $1t$

$2,$

模型二：

t $2,t$

$2,$

模型三：

$$\hat{Y}_t \quad 121.7394 \quad 2.23973 Z_{3t}$$

$$(\quad 4.8131) \quad (38.68578)$$

$$R^2 \quad 0.990077 \quad DW \quad 1.15853$$

$$F \quad 1496$$

从上述回归分析结果可以看出，模型一的扰动项无一阶自相关，模型二、模型三扰动项存在一阶正自相关；再综合判断可决系数、F 检验值、t 检验值，可以认为：最佳的方程是模型一，即权数为（1，1/2，1/4，1/8）的分布滞后模型。

（2）阿尔蒙（Almon）多项式法

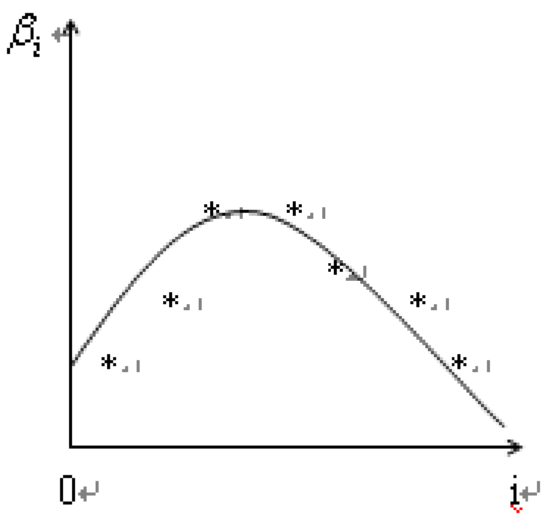
目的： 消除多重共线性的影响。

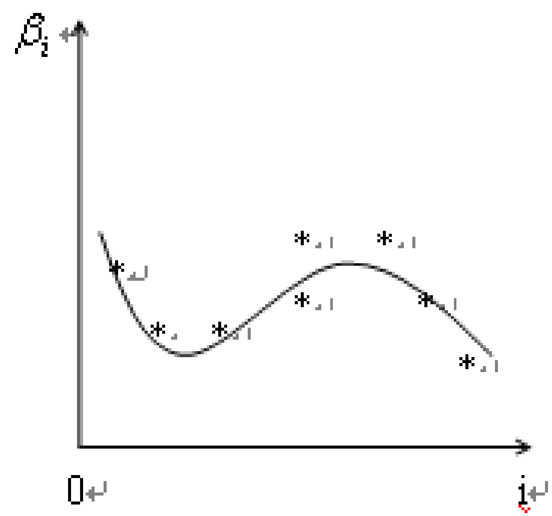
基本原理： 在有限分布滞后模型滞后长度 s 已知的情况下，滞后项系数有一取值结构，把它看成是相应滞后期 i 的函数。在以滞后期 i 为横轴、滞后系数取值为纵轴的坐标系中，如果这些滞后系数落在一条光滑曲线上，或近似落在一条光滑曲线上，则可以由一个关于 i 的次数较低的 m 次多项式很好地逼近，即

$$ {}^{2} \qquad {}^{m} $$

$$ {}_{i} \quad {}_{0} \quad {}_{1} \quad {}_{2} \quad {}_{m} $$

此式称为阿尔蒙多项式变换。





阿尔蒙（Almon）多项式法

主要思想：针对有限滞后期模型，通过阿尔蒙变换，定义新变量，以减少解释变量个数，然后用OLS法估计参数。

主要步骤为：

第一步，阿尔蒙变换

对于分布滞后模型

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{s} \beta_i X_{t-i} + \mu_t$$

假定其回归系数β_i可用一个关于滞后期i的适当阶数的多项式来表示，即：

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (i+1)^k \qquad i=0,1,\cdots,s$$

其中，m<s-1。阿尔蒙变换要求先验地确定适当阶数k，例如取k=2，得

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{2} \alpha_k (i+1)^k = \alpha_1 (i+1) + \alpha_2 (i+1)^2 \qquad (*)$$

将(*)代入分布滞后模型 $Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{s} \beta_i X_{t-i} + \mu_t$ 得

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{s} \left(\sum_{k=1}^{2} \alpha_k (i+1)^k\right) X_{t-i} + \mu_t$$

$$= \alpha + \alpha_1 \sum_{i=0}^{s} (i+1) X_{t-i} + \alpha_2 \sum_{i=0}^{s} (i+1)^2 X_{t-2} + \mu_t$$

定义新变量

$$W_{1t}=\sum_{i=0}^{s}(i+1)X_{t-i} \qquad W_{2t}=\sum_{i=0}^{s}(i+1)^2X_{t-i}$$

将原模型转换为：

$$Y_t=\alpha+\alpha_1W_{1t}+\alpha_2W_{2t}+\mu_t$$

第二步，模型的OLS估计

对变换后的模型进行OLS估计，得

$$\hat{\alpha},\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2$$

再计算出：

$$\beta_i=\sum_{k=1}^{2}\alpha_k(i+1)^k=\alpha_1(i+1)+\alpha_2(i+1)^2$$

求出滞后分布模型参数的估计值：

$$\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\cdots,\hat{\beta}_s$$

由于$m+1<s$，可以认为原模型存在的自由度不足和多重共线性问题已得到改善。

需注意的是，在实际估计中，阿尔蒙多项式的阶数m一般取2或3，不超过4，否则达不到减少变量个数的目的。

例3 表1给出了中国**电力基本建设投资X**与**发电量Y**的相关资料，拟建立一多项式分布滞后模型来考察两者的关系。

表5.2.1 中国电力工业基本建设投资与发电量

年度	基本建设投资X（亿元）	发电量（亿千瓦时）	年度	基本建设投资X（亿元）	发电量（亿千瓦时）
1975	30.65	1958	1986	161.6	4495
1976	39.98	2031	1987	210.88	4973
1977	34.72	2234	1988	249.73	5452
1978	50.91	2566	1989	267.85	5848
1979	50.99	2820	1990	334.55	6212
1980	48.14	3006	1991	377.75	6775
1981	40.14	3093	1992	489.69	7539
1982	46.23	3277	1993	675.13	8395
1983	57.46	3514	1994	1033.42	9218
1984	76.99	3770	1995	1124.15	10070
1985	107.86	4107			

由于无法预见知电力行业基本建设投资对发电量影响的时滞期，需取不同的滞后期试算。

经过试算发现，在2阶阿尔蒙多项式变换下，滞后期数取到第6期，估计结果的经济意义比较合理。2阶阿尔蒙多项式估计结果如下：

$$\hat{Y}_t = 3319.5 + 3.061W_{0t} + 0.101W_{1t} - 0.271W_{2t}$$

（13.62）（1.86）（0.15）（-0.67）

$\overline{R^2}$=0.9405　　F=74.81　　DW=0.42

求得的分布滞后模型参数估计值为

$\hat{\beta}_0$=0.323，$\hat{\beta}_1$=1.777，$\hat{\beta}_2$=2.690，$\hat{\beta}_3$=3.061，$\hat{\beta}_4$=2.891，$\hat{\beta}_5$=2.180，$\hat{\beta}_6$=0.927

最后得到分布滞后模型估计式为：

$$Y_t = 3319.5 + 0.323X_t + 1.777X_{t-1} + 2.690X_{t-2} + 3.061X_{t-3}$$

（13.62） (0.19) (2.14) (1.88) (1.86)

$$+2.891X_{t-4} + 2.180X_{t-5} + 0.927X_{t-6}$$

(1.96) (1.10) (0.24)

为了比较，下面给出直接对滞后6期的模型进行OLS估计的结果：

$$Y_t = 3361.9 + 8.424X_t - 11.43X_{t-1} + 15.14X_{t-2} + 4.71X_{t-3}$$

（12.43） (1.80) (-1.89) (1.21) (0.36)

$$-14.70X_{t-4} + 26.94X_{t-5} - 25.42X_{t-6}$$

(-0.93) (1.09) (-1.12)

$\overline{R}^2$=0.9770 F=42.54 DW=1.03

（3）科伊克（Koyck）方法

无限分布滞后模型中滞后项无限多，而样本观测总是有限的，因此不可能对其直接进行估计。要使模型估计能够顺利进行，必须施加一些约束或假定条件，将模型的结构作某种转化。

库伊克（Koyck）变换就是其中较具代表性的方法。

科伊克方法是将无限分布滞后模型转换为自回归模型，然后进行估计。

对于无限分布滞后模型：

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i X_{t-i} + \mu_t$$

科伊克变换假设β_i随滞后期i按几何级数衰减：

$$\beta_i = \beta_0 \lambda^i$$

其中，$0<\lambda<1$，称为分布滞后衰减率，$1-\lambda$称为**调整速率**（Speed of adjustment）。

通常称为分布滞后衰减率，值越接近零，衰减速度越快（如图）。

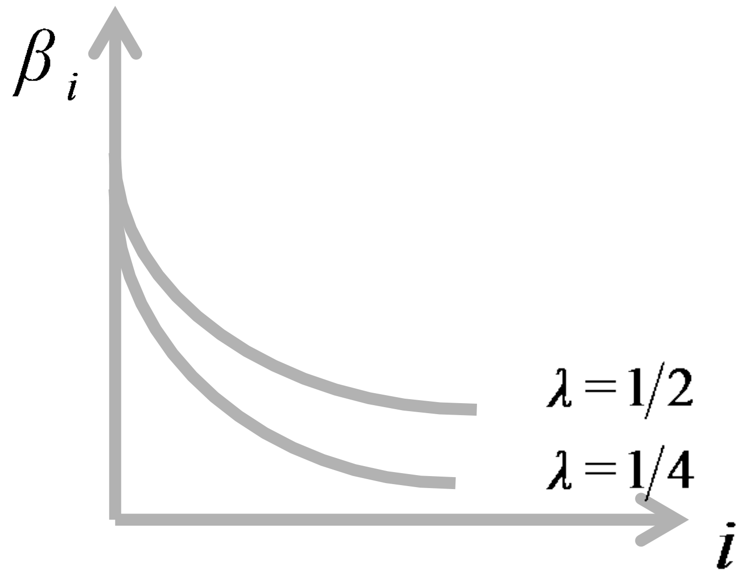


图 按几何级数衰减的滞后结构（库伊克）

科伊克变换的具体做法：

将科伊克假定$\beta_i=\beta_0\lambda^i$代入无限分布滞后模型，得

$$Y_t=\alpha+\beta_0\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i X_{t-i}+\mu_t \qquad (*)$$

滞后一期并乘以λ，得

$$\lambda Y_{t-1}=\lambda\alpha+\beta_0\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i X_{t-i}+\lambda\mu_{t-1} \qquad (**)$$

将（*）减去（**）得科伊克变换模型：

$$Y_t-\lambda Y_{t-1}=(1-\lambda)\alpha+\beta_0 X_t+\mu_t-\lambda\mu_{t-1}$$

整理得科伊克模型的一般形式：

$$Y_t=a+bX_t+cY_{t-1}+v_t$$

其中：$a=(1-\lambda)\alpha$，$b=\beta_0$，$c=\lambda$，$v_t=\mu_t-\lambda\mu_{t-1}$

科伊克模型的特点：

（1）以一个滞后因变量Y_{t-1}代替了大量的滞后解释变量X_{t-i}，最大限度地节省了自由度，解决了滞后期长度s难以确定的问题；

（2）由于滞后一期的因变量Y_{t-1}与X_t的线性相关程度可以肯定小于X的各期滞后值之间的相关程度，从而缓解了多重共线性。

但科伊克变换也同时产生了新问题：

（1）模型存在随机项和vt的一阶自相关性；
（2）滞后被解释变量Yt-1与随机项vt不独立。这些新问题需要进一步解决。
（3）它假定无限滞后分布呈几何递减滞后结构。 这种假定对某些经济变量可能不适用，如固定资 产投资对总产出影响的滞后结构就不是这种类型

三、自回归模型的参数估计

1、自回归模型的构造

- **一个无限期分布滞后模型可以通过科伊克变换转化为自回归模型。**
- 事实上，**许多滞后变量模型都可以转化为自回归模型**，自回归模型是经济生活中更常见的模型。
- 以**适应预期模型**以及**局部调整模型**为例进行说明。

（1）自适应预期（Adaptive expectation）模型

在某些实际问题中，因变量Y_t并不取决于解释变量的当前实际值X_t，而取决于X_t的“预期水平”或“长期均衡水平”X_t^e。

例如，家庭本期消费水平，取决于本期收入的预期值；

市场上某种商品供求量，决定于本期该商品价格的均衡值。

因此，**自适应预期模型**最初表现形式是

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t^e + \mu_t$$

难点

预期是对未来的判断，在大多数情况下，预期值是不可观测的。因此，实际应用中需要对预期的形成机理作出某种假定。自适应预期假定就是其中之一，具有一定代表性。

自适应预期假定：

经济活动主体对某经济变量的预期，是通过一种简单的学习过程而形成的，其机理是，经济活动主体会根据自己过去在作预期时所犯错误的程度，来修正他们以后每一时期的预期，即按照过去预测偏差的某一比例对当前期望进行修正，使其适应新的经济环境。

由于预期变量是不可实际观测的，往往作如下**自适应预期假定：**

$$X_t^e - X_{t-1}^e = r(X_t - X_{t-1}^e)$$

其中：**r**为**预期系数**（coefficient of expectation），$0 \le \mathbf{r} \le 1$。

该式的经济含义为：“经济行为者将根据过去的经验修改他们的预期”，即本期预期值的形成是一个逐步调整过程，**本期预期值的增量是本期实际值与前一期预期值之差的一部分**，其比例为**r** 。

这个假定还可写成：

$$X_t^e = rX_t + (1-r)X_{t-1}^e$$

将 $X_t^e = rX_t + (1-r)X_{t-1}^e$ 代入

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t^e + \mu_t \qquad (*)$$

得

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1[rX_t + (1-r)X_{t-1}^e] + \mu_t$$

将（*）式滞后一期并乘以(1-r)，得

$$(1-r)Y_{t-1} = \beta_0(1-r) + \beta_1(1-r)X_{t-1}^e + (1-r)\mu_{t-1} \qquad (**)$$

以(*)减去（**），整理得

$$Y_t = \beta_0 r + \beta_1 r X_t + (1-r)Y_{t-1} + v_t$$

其中 $v_t = \mu_t - (1-r)\mu_{t-1}$

可见自适应预期模型转化为自回归模型。

（2）局部调整(Partial Adjustment)模型

在经济活动中，会遇到为了适应解释变量的变化，被解释变量有一个预期的最佳值与之对应的现象。

例如，企业为了确保生产或供应，必须保持一定的原材料储备，对应于一定的产量或销售量，存在着预期最佳库存量；为了确保一国经济健康发展，中央银行必须保持一定的货币供应，对应于一定的经济总量水平，应该有一个预期的最佳货币供应量。

- 局部调整模型主要是用来研究物资储备问题的。
- **例如**，企业为了保证生产和销售，必须保持一定的原材料储备。对应于一定的产量或销售量X_t，存在着预期的最佳库存Y_t^e。
- 局部调整模型的最初形式为

$$Y_t^e = \beta_0 + \beta_1 X_t + \mu_t \qquad (9.3.7)$$

Y_t^e不可观测。由于生产条件的波动，生产管理方面的原因，库存储备Y_t的实际变化量只是预期变化的一部分。

储备按预定水平逐步进行调整，故有如下**局部调整假设**：

$$Y_t - Y_{t-1} = \delta(Y_t^e - Y_{t-1})$$

或：

$$Y_t = \delta Y_t^e + (1-\delta)Y_{t-1} \qquad (*)$$

其中，δ为**调整系数**，0≤ δ ≤1

将(*)式代入 $Y_t^e = \beta_0 + \beta_1 X_t + \mu_t$ 得

$$Y_t = \delta\beta_0 + \delta\beta_1 X_t + (1-\delta)Y_{t-1} + \delta\mu_t$$

可见，**局部调整模型转化为自回归模型**

评价

1. 相同点

库伊克模型 、自适应预期模型与局部调整模的最终形式都是一阶自回归模型，这样，对这三类模型的估计就转化为对相应一阶自回归模型的估计。