联立方程组模型的参数估计

一、最小二乘估计及其问题

二、间接最小二乘估计

三、工具变量法估计

四、两阶段最小二乘估计

一、最小二乘估计及其问题

可以用普通最小二乘法估计参数的情况：

- 联立方程组模型的方程没有内生解释变量；
- 内生解释变量与方程的误差项没有强相关性。

例：递归模型

$$Y_{1t} = \beta_{11} X_{1t} + \beta_{12} X_{2t} + \varepsilon_{1t},$$

$$Y_{2t} = \gamma_{21} Y_{1t} + \beta_{21} X_{1t} + \beta_{22} X_{2t} + \varepsilon_{2t},$$

$$Y_{3t} = \gamma_{31} Y_{1t} + \gamma_{32} Y_{2t} + \beta_{31} X_{1t} + \beta_{32} X_{2t} + \varepsilon_{3t}$$

- 如果联立方程组模型的方程，既非解释变量全部是外生变量或前定变量，也不像递归模型那样解释变量与误差项都没有相关性，那么普通最小二乘估计得到的参数估计量既非无偏的，也不是一致估计。

二、间接最小二乘估计

1、基本思想

- 对于恰好可识别的联立方程组模型方程，结构式参数与简约式参数有一一对应关系。由于简约式参数不存在内生解释变量的问题，最小二乘估计是有效的。
- 通过简约式参数的最小二乘估计间接得到结构式参数的估计。这种估计方法称为"间接最小二乘估计"。

2、间接最小二乘估计一般步骤和公式的推导。

- 设联立方程组模型的结构式为：

$$\mathbf{\Gamma Y_t} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{X_t} + \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t}$$

- 化为简约式为： $\mathbf{Y_t} = \mathbf{\Pi X_t} + \mathbf{u}_t$
- 结构式参数和简约式参数之间的关系为：

$$\mathbf{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{\Pi} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{\Gamma\Pi}$$

- 假设需要估计的结构式方程是恰好可识别的，因此可以采用间接最小二乘法估计参数。

（1）用最小二乘估计简约式的参数。

- 以简约式的第l个方程为例：

$$Y_{lt} = \Pi_{l1} X_{1t} + \Pi_{l2} X_{2t} + \cdots + \Pi_{lK} X_{Kt} + u_{lt}$$

该方程的系数构成行向量 $\mathbf{\Pi}_l = \left(\Pi_{l1}, \cdots, \Pi_{lK}\right)$，它的最小二乘估计量为：

$$\hat{\mathbf{\Pi}}'_l = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}_l$$

这些参数估计向量可以合并成下列简约式模型参数的估计量矩阵：

$$\hat{\mathbf{\Pi}}' = \left(\hat{\mathbf{\Pi}}_1' \hat{\mathbf{\Pi}}_2' \cdots \hat{\mathbf{\Pi}}_g'\right) = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{11} & \hat{\Pi}_{12} & \cdots & \hat{\Pi}_{1K} \\ \hat{\Pi}_{21} & \hat{\Pi}_{22} & \cdots & \hat{\Pi}_{2K} \\ & & \vdots & \\ \hat{\Pi}_{g1} & \hat{\Pi}_{g2} & \cdots & \hat{\Pi}_{gK} \end{bmatrix}'$$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\left[\mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 \cdots \mathbf{Y}_g\right] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

（2）根据结构式参数与简约式参数的关系解结构式参数的间接最小二乘估计

- 模型的结构式参数和简约式参数总体上有关系：$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Gamma\Pi}$
- 第一个结构式方程的参数与简约式参数之间有关系式：

$$\boldsymbol{\beta}_1' = \boldsymbol{\Pi}'\boldsymbol{\Gamma}_1'$$

- 因此第一个结构式方程参数的间接最小二乘估计，与简约式参数的最小二乘估计的关系为：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1' = \hat{\boldsymbol{\Pi}}'\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_1'$$

- 也就是

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_{11} \\ \hat{\beta}_{12} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{1K_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{\gamma}_{12} \\ \vdots \\ -\hat{\gamma}_{1g_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 分别由分块矩阵$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1^1 & \mathbf{Y}_1^2\end{bmatrix}$和$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1^1 & \mathbf{X}_1^2\end{bmatrix}$表示$\mathbf{Y}$和$\mathbf{X}$。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1^1 & \mathbf{X}_1^2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1^1 & \mathbf{X}_1^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\beta}_{11}\\ \vdots \\ \hat{\beta}_{1K_1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1^1 & \mathbf{X}_1^2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1^1 & \mathbf{Y}_1^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\hat{\gamma}_{12}\\ \vdots\\ -\hat{\gamma}_{1g_1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$
\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{1\prime}\mathbf{X}_1^{1} & \mathbf{X}_1^{1\prime}\mathbf{X}_1^{2} \\ \mathbf{X}_1^{2\prime}\mathbf{X}_1^{1} & \mathbf{X}_1^{2\prime}\mathbf{X}_1^{2} \end{bmatrix}
\begin{pmatrix} \hat{\beta}_{11} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{1K_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{1\prime}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1^{1\prime}\mathbf{Y}_1^{1} & \mathbf{X}_1^{1\prime}\mathbf{Y}_1^{2} \\ \mathbf{X}_1^{2\prime}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1^{2\prime}\mathbf{Y}_1^{1} & \mathbf{X}_1^{2\prime}\mathbf{Y}_1^{2} \end{bmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{\gamma}_{12} \\ \vdots \\ -\hat{\gamma}_{1g_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{1\prime}\mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_1^{2\prime}\mathbf{X}_1^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{11} \\ \mathrm{M} \\ \hat{\beta}_{1K_1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{1\prime}\mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{X}_1^{2\prime}\mathbf{Y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{1\prime}\mathbf{Y}_1^1 \\ \mathbf{X}_1^{2\prime}\mathbf{Y}_1^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{\gamma}_{12} \\ \mathrm{M} \\ -\hat{\gamma}_{1g_1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{1\prime}\mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_1^{2\prime}\mathbf{X}_1^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{11} \\ \mathrm{M} \\ \hat{\beta}_{1K_1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{1\prime}\mathbf{Y}_1^1 \\ \mathbf{X}_1^{2\prime}\mathbf{Y}_1^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{12} \\ \mathrm{M} \\ \hat{\gamma}_{1g_1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{1\prime}\mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{X}_1^{2\prime}\mathbf{Y}_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^1 & \mathbf{X}_1^2 \end{bmatrix}' \mathbf{X}_1^1 \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{11} \\ \mathrm{M} \\ \hat{\beta}_{1K_1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^1 & \mathbf{X}_1^2 \end{bmatrix}' \mathbf{Y}_1^1 \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{12} \\ \mathrm{M} \\ \hat{\gamma}_{1g_1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^1 & \mathbf{X}_1^2 \end{bmatrix}' \mathbf{Y}_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^1 & \mathbf{X}_1^2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^1 & \mathbf{X}_1^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{12} \\ \mathrm{M} \\ \hat{\gamma}_{1g_1} \\ \hat{\beta}_{11} \\ \mathrm{M} \\ \hat{\beta}_{1K_1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^1 & \mathbf{X}_1^2 \end{bmatrix}' \mathbf{Y}_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{12} \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_{1g_1} \\ \hat{\beta}_{11} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{1K_1} \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^1 & \mathbf{X}_1^2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^1 & \mathbf{X}_1^1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^1 & \mathbf{X}_1^2 \end{bmatrix}' \mathbf{Y}_1 = \left(\mathbf{X}' \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^1 & \mathbf{X}_1^1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y}_1$$

- 这就是联立方程组模型的恰好可识别方程参数的间接最小二乘估计的一般式。

例

- 假设已经根据20组观测数据计算出如下的二阶矩矩阵

$$
\begin{bmatrix}\mathbf{Y} & \mathbf{X}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{Y} & \mathbf{X}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}' \\ \mathbf{X}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Y} & \mathbf{X}\end{bmatrix}=
\begin{array}{c}
\\ Q_t \\ P_t \\ l \\ P_{t-1} \\ Y_t
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} Q_t & P_t & l & P_{t-1} & Y_t \end{array} \\
\begin{bmatrix}
20 & 6 & 8 & 4 & 3 \\
6 & 10 & 4 & 3 & 6 \\
8 & 4 & 20 & 4 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 5 & 2 \\
3 & 6 & 4 & 2 & 5
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

求市场供求均衡模型

$$Q_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 P_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Y_t + \varepsilon_{2t}$$

第一个方程的参数估计。

- 首先确定 $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Q}_t, \mathbf{Y}_1^1 = \mathbf{P}_t, \mathbf{X}_1^1 = [\mathbf{1} \quad \mathbf{P}_{t-1}],$

$\mathbf{X} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{P}_{t-1} \quad \mathbf{Y}_t]$

- 市场均衡模型第一个方程三个参数的间接最小二乘估计向量：

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{2ILS} \\ \hat{\alpha}_{1ILS} \\ \hat{\alpha}_{3ILS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 20 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.17 & 0.04 & 0.17 \\ 1.11 & 0.14 & -1.44 \\ -0.28 & -0.10 & 0.61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ 5.12 \\ -0.81 \end{bmatrix}$$

- 根据这些参数估计，得到该方程的回归直线为：

$$\hat{Q}_t = 5.12 - 0.69P_t - 0.81P_{t-1}$$

三、工具变量法估计

（一）用例子说明联立方程组模型参数的工具变量法估计：

一个三方程联立方程组模型为

$$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{3t} + \varepsilon_{1t}$$

$$Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{3t} + \beta_2 X_{1t} + \varepsilon_{2t}$$

$$Y_{3t} = Y_{1t} + Y_{2t} + X_{2t}$$