4 - 3 质点和质点系的动能定理

点积和叉积

$$\vec{a}\times\vec{b} \qquad \vec{b}\times\vec{a} \qquad \vec{a}\times\vec{a}=0$$

$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})-\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})$$

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$

点积的微商

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}+\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}$$

叉积的微商

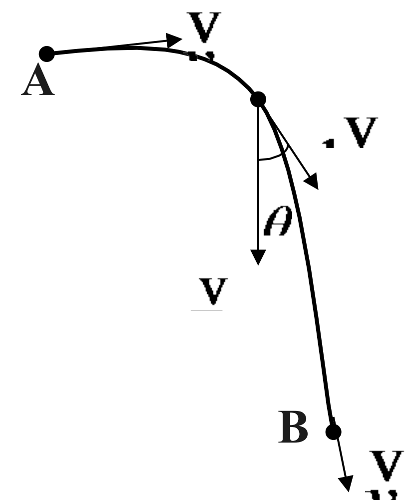
$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}+\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}$$

4 - 3　质点和质点系的动能定理

一　质点的动能定理 (theorem of kinetic energy)

- 由牛顿第二定律: $\dfrac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}$，用 $\vec{v}$ 点积等式两边，得

$$\vec{F}\cdot\vec{v}=\frac{d\vec{P}}{dt}\cdot\vec{v}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}\cdot\vec{v}$$



借助标量积的微分法则，得:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})=2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

在非相对论情况下，质量 m 为常数，则

$$\vec{F}\cdot\vec{v}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^{2}\right)$$

4 - 3 质点和质点系的动能定理

$$\vec{F}\cdot\vec{v}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^{2}\right)$$

又 $d\vec{r}=\vec{v}dt$ 于是：$\vec{F}\cdot d\vec{r}=d\left(\frac{1}{2}mv^{2}\right)$

$dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}$ 称为元功，描述了力的空间累积效应。

物理上，称 $E_{k}=\frac{1}{2}mv^{2}=\frac{P^{2}}{2m}$ 为质点的动能.

于是有：$$dE_{k}=d\left(\frac{1}{2}mv^{2}\right)=\vec{F}\cdot d\vec{r}=dA$$

可见：质点动能的微分等于作用于质点的合外力所作的元功，

——动能定理的微分形式

4 - 3 质点和质点系的动能定理

$$dE_k = dA$$

对于有限的过程：

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k2} - E_{k1}$$

即，合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

—— 有限的过程的动能定理.

Note:

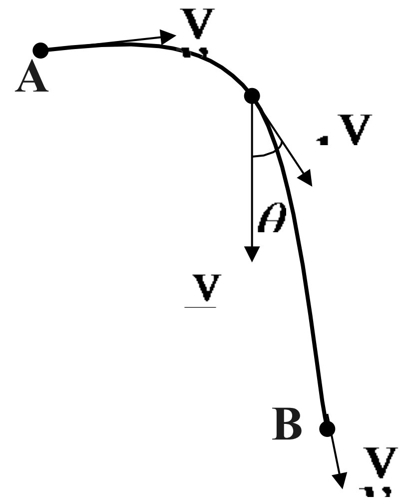
若质点速度接近光速，则动能定理的论述不变，但动能体现式变化!

一 质点的动能定理

$$A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int F_{\mathrm{t}}\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\int F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s \qquad F_{\mathrm{t}}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$A=\int_{v_1}^{v_2}m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=\int_{v_1}^{v_2}mv\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

- 动能（状态函数）$E_{\mathrm{k}}=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{p^2}{2m}$



- 动能定理：

  合外力对质点所作的功，等于质点动能的增量．

$$A=E_{\mathrm{k2}}-E_{\mathrm{k1}}$$

注意

功和动能

（1）功是能量变化的量度．功是一种过程量；而动能是一种状态量（只有外力对质点作功，才干使得质点的动能发生变化）；

（2）质点动能定理是根据第二定律导出的，与牛二律一样，动能定理也仅合用于惯性系宏观低速运动的质点 ，而且功和动能都与 参照系的选用有关；

（3）动能的单位和量纲与功的单位和量纲相同。

- 动能定理和动量定理比较：

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

力的空间累积效应

$$\int_A^B \vec{F}\cdot dt = m\vec{v}_B - m\vec{v}_A$$

力的时间累积效应

4 - 3 质点和质点系的动能定理

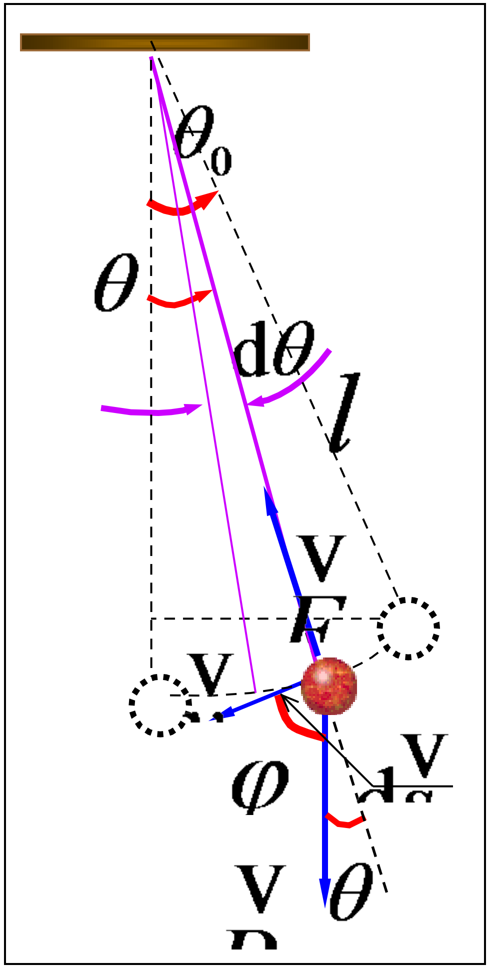
※ 动量与动能的比较

- 物理量　　动量 (momentum)　　　　动能 (kinetic energy)
- 体现式　　$\vec{p} = m\vec{v}$　　　　$E_k = \frac{1}{2}mv^2$
- 单　位：　kg·m/s（公斤·米/秒）　　J(焦耳)(或N·m牛顿·米)
- 性　质：　矢量　　　　标量
- 变化量：　$\Delta\vec{p}$ 由力的冲量决定　　　　ΔE_k由力的功决定
- 对于给定两个时刻t_1和t_2：　　对于给定两个时刻t_1和t_2：
- $\Delta\vec{p}$ 与惯性系的选择无关　　　　ΔE_k随惯性系的不同而不同
- 关　系：

$$E_k = p^2/(2m)$$

4－3 质点和质点系的动能定理

例: 一质量为1.0kg 的小球系在长为1.0m 细绳下端，绳的上端固定在天花板上．起初把绳子放在与竖直线成 30° 角处，然后放手使小球沿圆弧下落．试求绳与竖直线成 10° 角时小球的速率．



解:

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \vec{F}_{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

$$\boxed{\mathrm{d}s = -l\mathrm{d}\theta}$$

$$-\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -mgl\mathrm{d}\theta\cos\varphi$$

$$= -mgl\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$A = -mgl\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$m = 1.0\mathrm{kg} \quad l = 1.0\mathrm{m}$

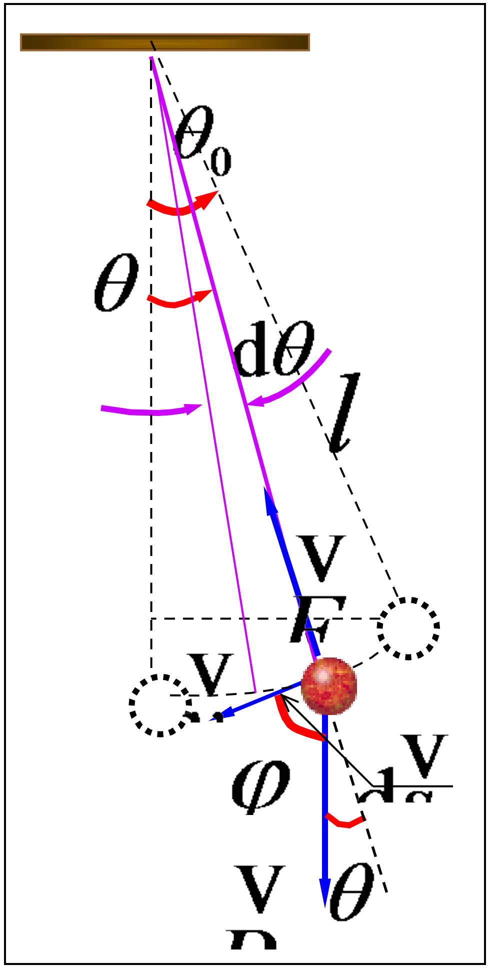
$\theta_0 = 30^\circ \quad \theta = 10^\circ$

$$A = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

由动能定理 $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

得 $v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

$= 1.53\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

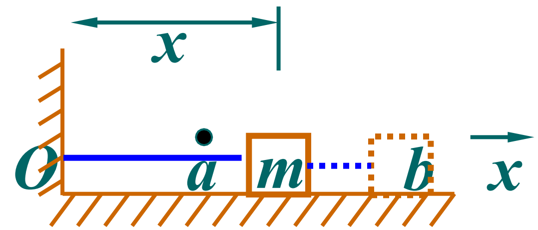


例题: 如图,物块质量m置于粗糙水平面上,用橡皮绳系于墙上,橡皮绳原长a，拉伸时相当于劲度系数为k的弹簧,现将物块向后拉伸至橡皮绳长为b后再由静止释放.求物块击墙的速度.物块与水平面间的摩擦系数为μ.

[解] 弹力只存在于$b \to a$ 过程，

摩擦力一直存在，

由动能定理有：（$v_0 = 0$）



$$\frac{1}{2}mv^2 = -\mu mgb + \int_b^a -k(x-a)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}k(b-a)^2 - \mu mgb$$

$$\therefore v = \left[\frac{k}{m}(b-a)^2 - 2\mu gb\right]^{\frac{1}{2}}$$

例： m=1kg的物体，在坐标原点处从静止出发沿x轴运动，合力 $\vec{F}=(3+2x)\vec{i}$ (SI)，则在x=0～3m内，合力作功A = ；x=3m处，物体速率v = ________.

解：

(1) $A=\int_0^x F_x \mathrm{d}x=\int_0^3(3+2x)\mathrm{d}x=18\ \mathrm{J}$

(2) $A=\frac{1}{2}mv^2-0 \rightarrow v=\sqrt{\frac{2A}{m}}=6\ \mathrm{m/s}$

例： 一质量为 m 的物体，受到沿 x 轴正方向外力 $F=F_0+kx$ 的作用（F_0、k为常数），从坐标原点由静止开始运动，求质点运动位移为 x_0 时外力作的功以及速度与位移之间的函数关系 .

解：

（1）直线运动作功的体现式为

$$A=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^x F_x dx$$

F_x 为 F 沿 x 轴的投影，于是

$$A=\int_0^x F_x dx=\int_0^x (F_0+kx)dx=F_0x+\frac{1}{2}kx^2$$

当 $x = x_0$ 时，外力作功为

$$A = F_0 x_0 + \frac{1}{2} k x_0^{\ 2}$$

（2）由动能定理，得

$$A = \Delta E_k = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

求得速度与位移之间的函数关系为

$$v^2 = \frac{2A}{m} = \frac{2}{m} F_0 x + \frac{k}{m} x^2$$