第39练 抛物线

一、课本变式练

1.（人A选择性必修一P133练习T2变式）抛物线$x^2=-8y$的准线方程是（　）

A．$x=\frac{1}{32}$　　B．$y=4$　　C．$x=\frac{1}{4}$　　D．$y=2$

2.（人A选择性必修一P133练习T3变式）已知抛物线C：$y^2=4x$上一点到y轴的距离是5，则该点到抛物线C焦点的距离是（　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

3.（人A选择性必修一P138习题3.3T4变式）（多选）经过点$P(4,-2)$的抛物线的标准方程为（　）

A．$y^2=x$　　B．$x^2=8y$　　C．$x^2=-8y$　　D．$y^2=-8x$

4.（人A选择性必修一P138习题3.3T2（1）变式）已知抛物线$y=mx^2$的准线方程为$y=\frac{1}{8}$，则实数$m=$________.

二、考点分类练

(一)抛物线的方程与性质

5.（2023届辽宁省鞍山市高三上学期质量监测）抛物线$y=\frac{4}{3}x^2$的焦点坐标为（　）

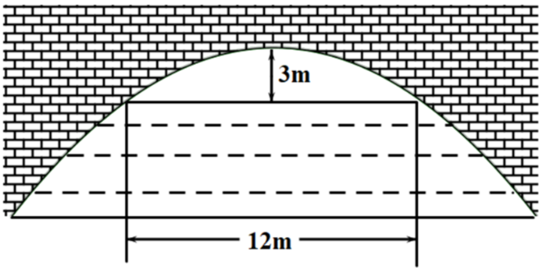
A．$\left(0,\frac{1}{3}\right)$　　B．$\left(\frac{1}{3},0\right)$　　C．$\left(0,\frac{3}{16}\right)$　　D．$\left(0,\frac{2}{3}\right)$

6.（多选）（2023届福建省三明第一中学高三上学期期中）已知抛物线$y^2=2px$ $(p>0)$的焦点F到准线的距离为4，直线l过点F且与抛物线交于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点，若$M(m,2)$是线段AB的中点，则（　）

A．$p=4$　　B．抛物线的方程为$y^2=16x$

C．直线l的方程为$y=2x-4$　　D．$|AB|=10$

7.（2023届海市宝山区高三上学期10月教学质量检测）如图抛物线型拱桥，当拱桥的顶点距离水面3米时，水面宽12米，则水面上升1米后，水面宽度为__________米.



(二)抛物线定义及应用

8.（2023届云南省曲靖市第一中学高三上学期第三次月考）已知平面四边形$ABCD$的四个顶点都在抛物线$y^2=ax(a\neq 0)$上，其中顶点$D(1,-2)$，F为抛物线的焦点，若$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，则$\left|\overrightarrow{AF}\right|+\left|\overrightarrow{BF}\right|+\left|\overrightarrow{CF}\right|=$（　　）

A．12　　B．9　　C．6　　D．3

9.（多选）（2023届湖南省湘潭市第一中学高三上学期期中）已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，点$M\left(x_0,y_0\right)$在抛物线C上，若$|MF|=4$，则（　　）

A．$x_0=3$　　B．$y_0=2\sqrt{3}$

C．$|OM|=\sqrt{21}$　　D．F的坐标为$(0,1)$

10.（2022届辽宁省沈阳市五校协作体高三联考）已知点P是抛物线$y=\frac{x^2}{4}$上的动点，点P在x轴上的射影是点Q，点A的坐标是$(4,3)$，则$|PA|+|PQ|$的最小值为______.

(三)抛物线中的长度与面积问题

11.（2023届贵州省贵阳第一中学高三月考）O为坐标原点，F为抛物线$C:y^2=8x$的焦点，M为C上一点，若$|MF|=8$，则$\triangle MOF$的面积为（　　）

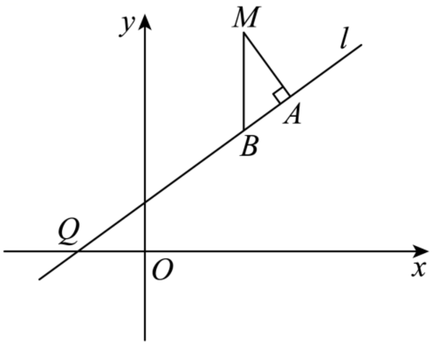
A．$4\sqrt{3}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．8　　D．$3\sqrt{3}$

12.（2023届福建福州第十一中学高三上学期期中考）已知抛物线C：$y^2=2px\ (p>0)$的焦点为F，点$P\left(1,\sqrt{3}\right)$在抛物线C上.

(1)求点F的坐标和抛物线C的准线方程；

(2)过点F的直线l与抛物线C交于A，B两个不同点，若AB的中点为$M(m,-3)$，求$\triangle OAB$的面积.

13. 已知曲线C是到点$P\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{8}\right)$和到直线$y=-\frac{5}{8}$距离相等的点的轨迹．$l$是过点$Q(-1,0)$的直线，$M$是$C$上（不在$l$上）的动点；$A$、$B$在$l$上，$MA\perp l$，$MB\perp x$轴（如图）.



(1)求曲线 C 的方程；

(2)求出直线 l 的方程，使得 $\dfrac{|QB|^2}{|QA|}$ 为常数.

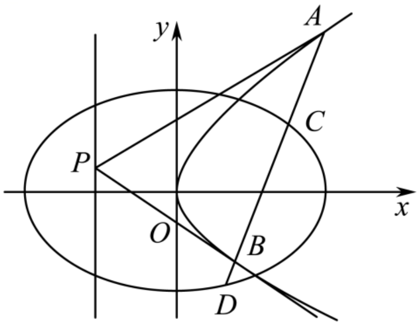
(四)抛物线中的定点定值及范围问题

14. 已知动圆过定点 $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，且与直线 $x=-\dfrac{p}{2}$ 相切，其中 $p>0$.

(1)求动圆圆心 C 的轨迹的方程；

(2)设 A,B 是轨迹 C 上异于原点 O 的两个不同点，直线 OA 和 OB 的倾斜角分别为 α 和 β，当 α,β 变化且 $\alpha+\beta$ 为定值 $\theta(0<\theta<\pi)$ 时，证明直线 AB 恒过定点，并求出该定点的坐标.

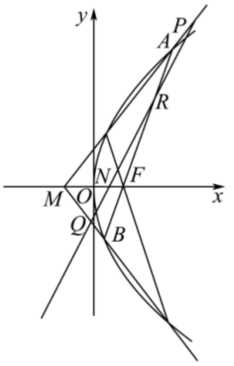
15. 已知中心在原点的椭圆 Γ_1 和抛物线 Γ_2 有相同的焦点 $(1,0)$，椭圆 Γ_1 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，抛物线 Γ_2 的顶点为原点.



(1)求椭圆 Γ_1 和抛物线 Γ_2 的方程；

(2)设点 P 为抛物线 Γ_2 准线上的任意一点，过点 P 作抛物线 Γ_2 的两条切线 PA，PB，其中 A,B 为切点.设直线 PA，PB 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：k_1k_2 为定值.

16. 如图，已知 F 是抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点，M 是抛物线的准线与 x 轴的交点，且 $\left|MF\right|=2$，



(1)求抛物线的方程；

(2)设过点 F 的直线交抛物线与 A、B 两点，斜率为 2 的直线 l 与直线 MA, MB, AB ，x 轴依次交于点 P，Q，R，N，且 $|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$，求直线 l 在 x 轴上截距的范围.

三、最新模拟练

17. （2022 届云南省玉溪市民族中学高三模拟）已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 M 在抛物线 C 的准线 l 上，线段 MF 与 y 轴交于点 A，与抛物线 C 交于点 B，若 $|MA|=3|AB|=3$，则 $p=$（　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

18. （2023 届山西省山西大学附属中学校高三上学期 9 月模块诊断）已知抛物线 C： $x^2=2py\left(p>0\right)$ 的焦点为 F， P 是 C 上位于第一象限内的一点，若 C 在点 P 处的切线与 y 轴交于 N 点，且 $\angle FPN=30^\circ$， O 为坐标原点，则直线 OP 的斜率为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D．1

19. （多选）（2023 届河北省衡水市部分学校高三上学期 9 月月考）已知抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 F，过 F 的直线与抛物线相交于 A，B 两点.过 A，B 两点分别作抛物线的切线，两切线交于点 Q.直线 l 为抛物线 C 的准线，与 x 轴交于点 D，则（　）

A．当 $|AF|=2$ 时，$|BF|=\dfrac{2}{3}$　　　　B．若 $M\left(1,1\right)$，P 是抛物线上一个动点，则 $|PM|+|PF|$ 的最小值为 2

C． $QA\perp QB$　　　　D．若点 Q 不在坐标轴上，直线 AB 的倾斜角为 θ，则 $\tan\angle ADB=\dfrac{2\tan^2\theta}{\sin\theta}$

20. （2023 届江苏省南通市通州区高三上学期期中）已知抛物线 M： $x^2=4y$，圆 C： $x^2+(y-3)^2=4$，在抛物线 M 上任取一点 P，向圆 C 作两条切线 PA 和 PB，切点分别为 A， B，则 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的取值范围是______．

21．（2023届江西省智慧上进高三上学期考试）已知抛物线 C： $y^2=2px\left(0<p<4\right)$ 上一纵坐标为4的点 M 到其焦点 F 的距离为5，过点 $N\left(2,0\right)$ 的直线 l 与 C 相交于 A，B 两点．

(1)求 C 的标准方程；

(2)在 x 轴上是否存在异于点 N 的定点 P，使得点 F 到直线 PA 与直线 PB 的距离相等？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，试说明理由．

22．（2022届陕西省渭南市富平县高三下学期二模）已知抛物线 $C:x^2=2py\left(p>0\right)$ 的焦点为 F， P 为抛物线 C 上的动点， Q 为 P 在动直线 $y=t\left(t<0\right)$ 上的投影，当 $\triangle PQF$ 为等边三角形时，其面积为 $\sqrt{3}$．

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)设 O 为原点，过点 P 的直线 l 与 C 相切，且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 交于 A， B 两点，直线 OQ 与线段 AB 交于点 M，试问：是否存在 t，使得 $\triangle QMA$ 和 $\vee QMB$ 的面积相等恒成立？若存在，求 t 的值；若不存在，请说明理由．

四、高考真题练

23．(2021新高考全国Ⅱ卷)抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点到直线 $y=x+1$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则 $p=$ （　　）

A．1　　B．2　　C． $2\sqrt{2}$　　D．4

24.（多选）(2022新高考全国II卷)已知 O 为坐标原点，过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 的直线与 C 交于 A．B 两点，其中 A 在第一象限，点 $M(p,0)$，若 $|AF|=|AM|$，则 （　　）

A．直线 AB 的斜率为 $2\sqrt{6}$　　B． $|OB|=|OF|$

C． $|AB|>4|OF|$　　D． $\angle OAM+\angle OBM<180°$

25.（多选）(2022新高考全国I卷)已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$ 在抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上，过点 $B(0,-1)$ 的直线交 C 于 P，Q 两点，则 （　　）

A．C 的准线为 $y=-1$　　B．直线 AB 与 C 相切

C． $\left|OP\right|\cdot\left|OQ\right|>\left|OA\right|^2$　　D． $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

26．(2021年新高考全国Ⅰ卷)已知 O 为坐标原点，抛物线 C： $y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F， P 为 C 上一点， PF 与 x 轴垂直，Q 为 x 轴上一点，且 $PQ\perp OP$，若 $\left|FQ\right|=6$，则 C 的准线方程为______．

五、综合提升练

27. 已知点 P 为抛物线 $y^2=4x$ 上一动点，$A(1,0)$，$B(3,0)$，则 $\angle APB$ 的最大值为（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

28.（多选）在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，过点 F 且斜率大于 0 的直线交抛物线 C 于 A，B 两点(其中 A 在 B 的上方)，过线段 AB 的中点 M 且与 x 轴平行的直线依次交直线 OA，OB，l 于点 P，Q，N.则（　）

A. $|PM|=|NQ|$

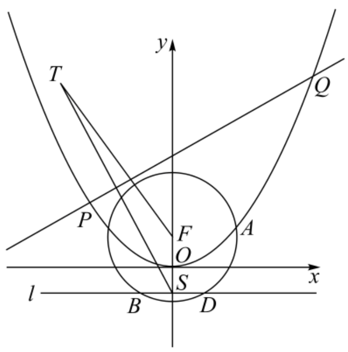
B. 若 P，Q 是线段 MN 的三等分点，则直线 AB 的斜率为 $2\sqrt{2}$

C. 若 P，Q 不是线段 MN 的三等分点，则一定有 $|PQ|>|OQ|$

D. 若 P，Q 不是线段 MN 的三等分点，则一定有 $|NQ|>|OQ|$

29.（2023 届四川省成都市第七中学高三上学期第三次质量检测）过点 $M(-1,m)$ 作抛物线 $C:y^2=2px,(p>0)$ 的两条切线，切点分别为 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，又直线 AB 经过抛物线 C 的焦点 F，那么 $\frac{y_1y_2}{k_{MA}k_{MB}}=$______.

30.抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l,A 为 C 上的一点，已知以 F 为圆心，FA 为半径的圆 F 交 l 于 B,D 两点，



(1)若 $\angle BFD=90°$,$\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$，求 p 的值及圆 F 的方程

(2)若直线 $y=kx+b$ 与抛物线 C 交于 P，Q 两点，且 $OP\perp OQ$，准线 l 与 y 轴交于点 S，点 S 关于直线 PQ 的对称点为 T，求 $|FT|$ 的取值范围.

第 39 练 抛物线

一、课本变式练

1.（人 A 选择性必修一 P133 练习 T2 变式）抛物线 $x^2=-8y$ 的准线方程是（　）

A．$x=\frac{1}{32}$　　B．$y=4$　　C．$x=\frac{1}{4}$　　D．$y=2$

【答案】D

【解析】抛物线 $x^2=-8y$ 的准线方程是 $y=2$.故选 D

2.（人 A 选择性必修一 P133 练习 T3 变式）已知抛物线 C：$y^2=4x$ 上一点到 y 轴的距离是 5，则该点到抛物线 C 焦点的距离是（　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【答案】B

【解析】由题意得：抛物线 C：$y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$，由焦半径公式得：该点到抛物线 C 焦点的距离等于 $5+1=6$.故选 B

3.（人 A 选择性必修一 P138 习题 3.3T4 变式）（多选）经过点 $P(4,-2)$ 的抛物线的标准方程为（　）

A．$y^2=x$　　B．$x^2=8y$　　C．$x^2=-8y$　　D．$y^2=-8x$

【答案】AC

【解析】若抛物线的焦点在 x 轴上，设抛物线的方程为 $y^2=2px\left(p>0\right)$，又因为抛物线经过点 $P(4,-2)$，所以 $(-2)^2=2p\times4$，解得 $p=\frac{1}{2}$，所以抛物线的方程为 $y^2=x$．

若抛物线的焦点在 y 轴上，设抛物线的方程为 $x^2=2py\left(p>0\right)$，又因为抛物线经过点 $P(4,-2)$，所以 $4^2=2p\times(-2)$，解得 $p=-4$，所以抛物线的方程为 $x^2=-8y$．

故选 AC．

4.（人 A 选择性必修一 P138 习题 3.3T2（1）变式）已知抛物线 $y=mx^2$ 的准线方程为 $y=\frac{1}{8}$，则实数 $m=$________.

【答案】-2

【解析】由 $y=mx^2$ 可得 $x^2=\frac{1}{m}\cdot y$，则其准线为：$y=-\frac{1}{4m}=\frac{1}{8}$，得 $m=-2$．

二、考点分类练

(一)抛物线的方程与性质

5．（2023 届辽宁省鞍山市高三上学期质量监测）抛物线 $y=\frac{4}{3}x^2$ 的焦点坐标为（　）

A．$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$　　B．$\left(\dfrac{1}{3},0\right)$　　C．$\left(0,\dfrac{3}{16}\right)$　　D．$\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$

【答案】C

【解析】由题意，抛物线$x^2=\dfrac{3}{4}y$的焦点坐标为$\left(0,\dfrac{3}{16}\right)$，故选 C

6．（多选）（2023 届福建省三明第一中学高三上学期期中）已知抛物线$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点F到准线的距离为4，直线l过点F且与抛物线交于$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$两点，若$M\left(m,2\right)$是线段AB的中点，则（　）

A．$p=4$　　B．抛物线的方程为$y^2=16x$

C．直线l的方程为$y=2x-4$　　D．$|AB|=10$

【答案】ACD

【解析】因为焦点F到准线的距离为 4，根据抛物线的定义可知$p=4$，故 A 正确

故抛物线的方程为$y^2=8x$，焦点$F\left(2,0\right)$，故 B 错误

则$y_1^2=8x_1$，$y_2^2=8x_2$．

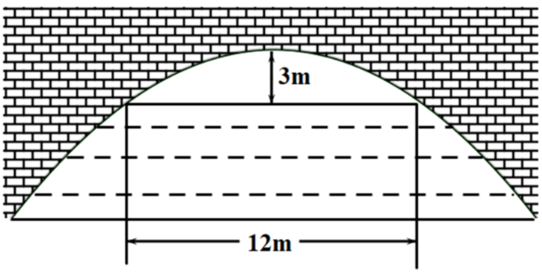
又$M\left(m,2\right)$是AB的中点，则$y_1+y_2=4$，所以$y_1^2-y_2^2=8x_1-8x_2$，

即$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{8}{y_1+y_2}=2$，所以直线$l$的方程为$y=2x-4$．故 C 正确

由$y_1+y_2=2\left(x_1+x_2\right)-8=4\Rightarrow x_1+x_2=6$，

得$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+4=10$．故 D 正确，故选 ACD.

7．（2023 届海市宝山区高三上学期 10 月教学质量检测）如图抛物线型拱桥，当拱桥的顶点距离水面 3 米时，水面宽 12 米，则水面上升 1 米后，水面宽度为___________米.



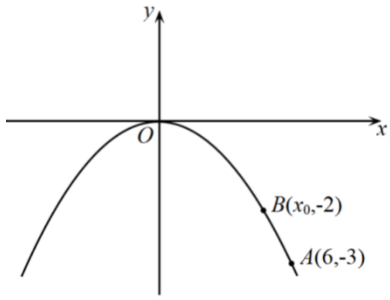
【答案】$4\sqrt{6}$

【解析】如图建立直角坐标系，设抛物线方程为$x^2=my$，

将 A（6，-3）代入$x^2=my$，

得$m=-12$，$\therefore x^2=-12y$，代入$B\left(x_0,-2\right)$得$x_0=2\sqrt{6}$，

故水面宽为$4\sqrt{6}$米，



(二)抛物线定义及应用

8.（2023届云南省曲靖市第一中学高三上学期第三次月考）已知平面四边形 $ABCD$ 的四个顶点都在抛物线 $y^2=ax(a\neq 0)$ 上，其中顶点 $D(1,-2)$，F 为抛物线的焦点，若

$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，则 $\left|\overrightarrow{AF}\right|+\left|\overrightarrow{BF}\right|+\left|\overrightarrow{CF}\right|=$（　）

A．12　　　　B．9　　　　C．6　　　　D．3

【答案】C

【解析】因为 $D(1,-2)$ 在抛物线上，所以 $a=4$，即 $2p=4$，所以 $F(1,0)$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，

由 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ 得 $3(1-x_1,-y_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1)+(x_3-x_1,y_3-y_1)$，

所以 $3-3x_1=x_2-x_1+x_3-x_1$，即 $x_1+x_2+x_3=3$，

根据抛物线的定义可得

$\left|\overrightarrow{AF}\right|+\left|\overrightarrow{BF}\right|+\left|\overrightarrow{CF}\right|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}+x_3+\frac{p}{2}=x_1+x_2+x_3+\frac{3p}{2}=6$.故选 C.

9.（多选）（2023届湖南省湘潭市第一中学高三上学期期中）已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，点 $M(x_0,y_0)$)在抛物线 C 上，若 $|MF|=4$，则（　）

A．$x_0=3$　　　　B．$y_0=2\sqrt{3}$

C．$|OM|=\sqrt{21}$　　　　D．F 的坐标为 $(0,1)$

【答案】AC

【解析】由题可知 $F(1,0)$，由 $MF=x_0+1=4$，$y_0^2=4x_0$，所以 $x_0=3$，$y_0=\pm 2\sqrt{3}$.

$|OM|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\sqrt{9+12}=\sqrt{21}$，故选 AC.

10.（2022届辽宁省沈阳市五校协作体高三联考）已知点 P 是抛物线 $y=\frac{x^2}{4}$ 上的动点，点 P 在 x 轴上的射影是点 Q，点 A 的坐标是 $(4,3)$，则 $|PA|+|PQ|$ 的最小值为______.

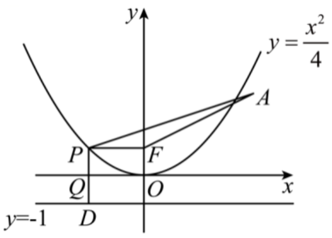
【答案】$2\sqrt{5}-1$

【解析】由题意可得：抛物线$y=\frac{x^2}{4}$的焦点$F(0,1)$，准线$y=-1$，

过点P作准线的垂线，垂足为D，则有

$|PA|+|PQ|=|PA|+|PD|-1=|PA|+|PF|-1\geq|AF|-1=\sqrt{4^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}-1$，

$\therefore|PA|+|PQ|$的最小值为$2\sqrt{5}-1$.



(三)抛物线中的长度与面积问题

11. （2023届贵州省贵阳第一中学高三月考）O为坐标原点，F为抛物线$C:y^2=8x$的焦点，M为C上一点，若$|MF|=8$，则$\triangle MOF$的面积为（　）

A．$4\sqrt{3}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．8　　D．$3\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】由$y^2=8x$可得抛物线的焦点$F(2，0)$，准线方程为$x=-2$，由抛物线焦半径公式知$MF=x_M+\frac{p}{2}=x_M+2=8\Rightarrow x_M=6$，将$x=6$代入$y^2=8x$，可得$y=\pm4\sqrt{3}$，所以$\triangle MOF$的面积为$\frac{1}{2}|y|gOF=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$，故选A.

12. （2023届福建福州第十一中学高三上学期期中考）已知抛物线C：$y^2=2px\ (p>0)$的焦点为F，点$P(1,\sqrt{3})$在抛物线C上.

(1)求点F的坐标和抛物线C的准线方程；

(2)过点F的直线l与抛物线C交于A，B两个不同点，若AB的中点为$M(m,-3)$，求$\mathrm{V}OAB$的面积.

【解析】(1）解：因为点$P(1,\sqrt{3})$在抛物线上，所以$(\sqrt{3})^2=2p$，即$2p=3$，则$p=\frac{3}{2}$，

所以抛物线方程为$y^2=3x$，则其焦点坐标为$F\left(\frac{3}{4},0\right)$，准线方程为$x=-\frac{3}{4}$；

（2）解：设点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为AB的中点为$M(m,-3)$，所以$y_1+y_2=-6$，

$x_1+x_2=2m$，

所以$\begin{cases}y_1^2=3x_1\\y_2^2=3x_2\end{cases}$，则$y_1^2-y_2^2=3x_1-3x_2$，所以$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{3}{y_1+y_2}=\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2}$，

所以直线l的斜率为$-\frac{1}{2}$，

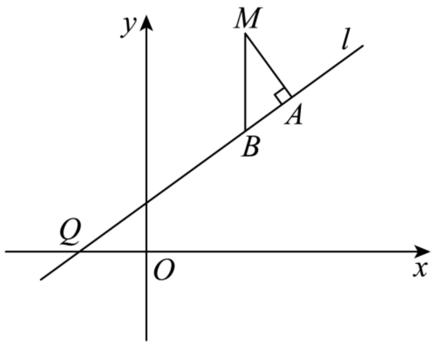
所以直线l的方程为$y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{4}\right)$，所以$-3=-\frac{1}{2}\left(m-\frac{3}{4}\right)$，即$m=\frac{27}{4}$，

所以$|AB|=x_1+x_2+p=2m+\frac{3}{2}=15$，

点O到直线l的距离$d=\frac{|-3|}{\sqrt{4^2+8^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{20}$，

所以$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times15\times\frac{3\sqrt{5}}{20}=\frac{9\sqrt{5}}{8}$．

13．已知曲线C是到点$P\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{8}\right)$和到直线$y=-\frac{5}{8}$距离相等的点的轨迹．$l$是过点$Q(-1,0)$的直线，$M$是$C$上（不在$l$上）的动点；$A$、$B$在$l$上，$MA\perp l$，$MB\perp x$轴（如图）．



(1)求曲线C的方程；

(2)求出直线l的方程，使得$\frac{|QB|^2}{|QA|}$为常数．

【解析】（1）设N（x,y）为C上的点，则$|NP|=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{8})^2}$，

N到直线$y=-\frac{5}{8}$的距离为$|y+\frac{5}{8}|$．

由题设得$\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{8})^2}=|y+\frac{5}{8}|$，

化简，得曲线C的方程为$y=\frac{1}{2}(x^2+x)$．

（2）设$M(x,\frac{x^2+x}{2})$，

明显直线l的斜率存在，设直线l：$y=kx+k$，则B（x,$kx+k$），从而$|QB|=\sqrt{1+k^2}\,|x+1|$．

在$\mathrm{Rt}\triangle QMA$中，

因为$|QM|^2=(x+1)^2+(\frac{x^2+x}{2})^2=(x+1)^2(1+\frac{x^2}{4})$，

$$|MA|^2=\left(\frac{\left|kx-\frac{x^2+x}{2}+k\right|}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2=\frac{(x+1)^2(k-\frac{x}{2})^2}{1+k^2}.$$

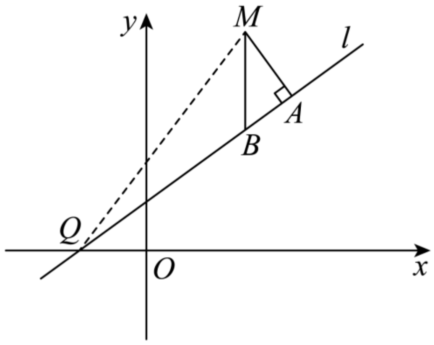
所以$|QA|^2=|QM|^2-|AM|^2=(x+1)^2(1+\frac{x^2}{4})-\frac{(x+1)^2(k-\frac{x}{2})^2}{1+k^2}=\frac{(x+1)^2}{4(1+k^2)}(kx+2)^2$，

$\therefore |QA|=\frac{|x+1|\cdot|kx+2|}{2\sqrt{1+k^2}}$，

$$\frac{|QB|^2}{|QA|}=\frac{\left(\sqrt{1+k^2}\,|x+1|\right)^2}{\frac{|x+1|\cdot|kx+2|}{2\sqrt{1+k^2}}}=\frac{2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}{|k|}\cdot\left|\frac{x+1}{x+\frac{2}{k}}\right|.$$

当 $k=2$ 时，$\frac{|QB|^2}{|QA|}=\frac{2(1+2^2)\sqrt{1+2^2}}{2}=5\sqrt{5}$，

从而所求直线 l 方程为 $2x-y+2=0$，使得$\frac{|QB|^2}{|QA|}$为常数$5\sqrt{5}$



(四)抛物线中的定点定值及范围问题

14. 已知动圆过定点$\left(\frac{p}{2},0\right)$，且与直线$x=-\frac{p}{2}$相切，其中$p>0$.

(1)求动圆圆心C的轨迹的方程；

(2)设 A、B 是轨迹 C 上异于原点 O 的两个不同点，直线OA和OB的倾斜角分别为α 和β，当α,β变化且$\alpha+\beta$为定值$\theta(0<\theta<\pi)$时，证明直线AB恒过定点，并求出该定点的坐标.

【解析】(1) 由题可知动圆圆心C到定点$\left(\frac{p}{2},0\right)$的距离与定直线$x=-\frac{p}{2}$的距离相等，

由抛物线的定义知，点C的轨迹为抛物线，其中$\left(\frac{p}{2},0\right)$为焦点，$x=-\frac{p}{2}$为准线，

所以动圆圆心C的轨迹方程为$y^2=2px(p>0)$；

(2) 设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由题意得$x_1\neq x_2$(否则$\alpha+\beta=\pi$)，且$x_1,x_2\neq 0$，

由题意知直线 AB 的斜率存在，从而设 AB 的方程为 $y=kx+b$，显然 $x_1=\frac{y_1^2}{2p},x_2=\frac{y_2^2}{2p}$，

将 $y=kx+b$ 与 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 联立消去 x，得 $ky^2-2py+2pb=0$，

由韦达定理知 $y_1+y_2=\frac{2p}{k}$，$y_1\cdot y_2=\frac{2pb}{k}$，

因为 $\alpha+\beta$ 为定值 $\theta(0<\theta<\pi)$，

当 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan\theta=\tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}}{1-\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}}=\frac{2p\left(y_1+y_2\right)}{y_1y_2-4p^2}$

$=\frac{2p\left(\frac{2p}{k}\right)}{\frac{2pb}{k}-4p^2}=\frac{2p}{b-2kp}$，

所以 $b=\frac{2p}{\tan\theta}+2kp$，

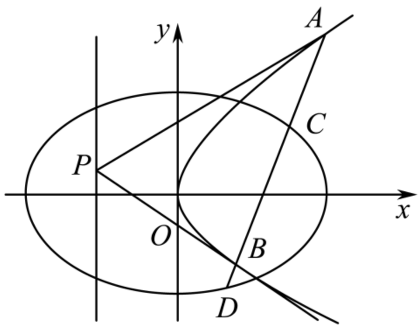
所以直线 AB 的方程为 $y=kx+\frac{2p}{\tan\theta}+2kp$，即 $y-\frac{2p}{\tan\theta}=k\left(x+2p\right)$，

所以直线 AB 恒过定点 $\left(-2p,\frac{2p}{\tan\theta}\right)$，

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，则 $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=1$，可得 $b=2kp$，直线 AB 的方程为 $y=k\left(x+2p\right)$，恒过定点 $\left(-2p,0\right)$，

综上，当 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 时，直线 AB 恒过定点 $\left(-2p,\frac{2p}{\tan\theta}\right)$，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，直线 AB 恒过定点 $\left(-2p,0\right)$.

15. 已知中心在原点的椭圆 Γ_1 和抛物线 Γ_2 有相同的焦点 $(1,0)$，椭圆 Γ_1 的离心率为 $\frac{1}{2}$，抛物线 Γ_2 的顶点为原点.



(1)求椭圆 Γ_1 和抛物线 Γ_2 的方程；

(2)设点 P 为抛物线 Γ_2 准线上的任意一点，过点 P 作抛物线 Γ_2 的两条切线 PA，PB，其中 A,B 为切点.设直线 PA，PB 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：k_1k_2 为定值.

【解析】(1)设椭圆Γ_1和抛物线Γ_2的方程分别为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$y^2=2px$，$(p>0)$，

$\because$ 椭圆Γ_1和抛物线Γ_2有相同的焦点$(1,0)$，椭圆Γ_1的离心率为$\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\\ c=1\\ \dfrac{p}{2}=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\ c=1\\ p=2\end{cases}$，$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 椭圆Γ_1的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，抛物线$\Gamma_2$的方程为$y^2=4x$.

(2)由题意知过点P与抛物线$y^2=4x$相切的直线斜率存在且不为0，设$P(-1,t)$，则切线方程为$y-t=k(x+1)(k\neq 0)$，

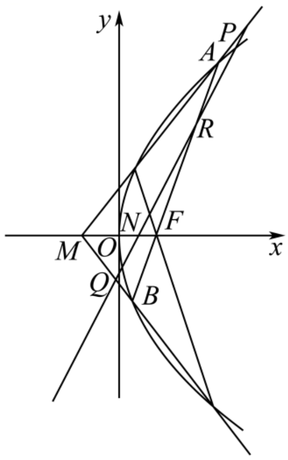
联立$\begin{cases}y-t=k(x+1)\\ y^2=4x\end{cases}$，消去$x$，得$y^2-\dfrac{4}{k}y+\dfrac{4t}{k}+4=0$，

由$\Delta=\left(-\dfrac{4}{k}\right)^2-4\left(\dfrac{4t}{k}+4\right)=0$，得$k^2+tk-1=0$，

$\because$ 直线PA，PB的斜率分别为k_1，k_2，$\therefore k_1k_2=-1$，

$\therefore k_1k_2$为定值.

16. 如图，已知F是抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点，M是抛物线的准线与x轴的交点，且$|MF|=2$，



(1)求抛物线的方程；

(2)设过点F的直线交抛物线与A、B两点，斜率为2的直线l与直线MA,MB,AB，x轴依次交于点P，Q，R，N，且$|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$，求直线l在x轴上截距的范围.

【解析】(1) 因为$|MF|=2$，故$p=2$，故抛物线的方程为：$y^2=4x$.

(2) [方法一]：通式通法